

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Московский физико-технический институт (государственный университет)"  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки:** 03.04.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Проблемы теоретической физики

# Квантовые поправки в задаче неидеального движущегося зеркала

(магистерская диссертация)

**Студентка:**

Акопян Лианна Ашотовна

**Научный руководитель:**

Ахмедов Эмиль Тофик Оглы,  
д-р физ.-мат. наук, проф.

Москва 2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Свободная теория</b>	<b>6</b>
2.1	Моды для неидеального зеркала . . . . .	6
2.2	Проверка выполнения коммутационного соотношения . . . . .	13
2.3	Замечание о выборе мод . . . . .	17
2.4	Необходимые материалы для расчетов . . . . .	21
2.5	Вакуумное среднее ТЭИ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Теория с взаимодействием: техника Келдыша</b>	<b>31</b>
3.1	Связь вакуумного среднего ТЭИ и пропагатора Келдыша . . . . .	31
3.2	Общие формулы для поправки второго порядка к пропагатору Келдыша	32
3.3	Вычисление поправки второго порядка . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Анализ результатов (вместо заключения)</b>	<b>40</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>40</b>

# 1 Введение

После открытия квантовой механики в начале XX столетия стало ясно, что описание природы должно проводиться в терминах квантовых объектов, а успехи квантовой теории поля позволили шагнуть далеко за пределы понимания физики ядер и элементарных частиц. Являясь достаточно общей, квантовая теория поля позволяет получать правильные результаты не только для систем частиц. Действительно, квантово-полевые методы успешно применяются в теории конденсированного состояния [1], статистической физике [2], теории металлов и сверхпроводимости [3], описании искривленных пространств [4].

Основной задачей квантовой теории поля является нахождение квантовых средних различных функций от полей и их производных, отвечающих за физические свойства рассматриваемых систем. Чаще всего эту задачу не удается решить точно, и в таких случаях применяется теория возмущений, представляющая собой разложение по параметру, который можно считать малым. В таких случаях о физических свойствах системы можно судить по конечному числу членов разложения. К задачам такого типа относятся все задачи, в которых применима диаграммная техника Фейнмана: точность ответа в них зависит от количества учтённых вкладов ряда теории возмущений. Однако в тех задачах, для которых гамильтониан системы явно зависит от времени или не является ограниченным снизу, а также для неравновесных начальных состояний систем требуется применение более общей техники, разработанной Швингером и развитой в дальнейшем Келдышем [5] - [7].

Диаграммная техника Швингера-Келдыша позволяет исследовать системы, в ходе эволюции которых основное состояние квантовых полей меняется. Традиционно такие задачи рассматриваются в рамках физики конденсированного состояния, но недавние исследования показывают применимость такого подхода к задачам квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени. Более того, в некоторых задачах КТП наблюдается секулярный рост квантовых поправок, что говорит о необходимости пересуммирования растущих со временем вкладов во всех петлях. Таким образом, в настоящее время актуальна задача изучения секулярного роста поправок в квантовой теории поля и выяснения отличительных характеристик систем, которые обладают таким свойством. Примерами таких систем служат:

- квантовые поля на фоне сильного электрического поля, для которого в темпоральной калибровке гамильтониан зависит явно от времени, а в пространственной является неограниченным снизу [8] - [9];
- поля в пространствах де Ситтера и анти-де Ситтера [10] - [17];
- поля на фоне сильных скалярных полей [18] - [20];

- поля на фоне коллапса звезды в чёрную дыру [21];
- поля на фоне движущихся не по инерции зеркал [22] - [27].

Отметим, что фактически во всех этих типах систем имеют место эффекты рождения частиц и излучения, подобные эффектам Швингера и Хокинга [27] - [33]. В литературе исследование данных задач ограничивается вычислением вакуумного среднего тензора энергии-импульса и исследованием его свойств [34] - [36]. Однако как показано в [24], стандартное вычисление дает лишь древесный вклад к искомому потоку ТЭИ, в то время как петлевые поправки остаются за гранью рассмотрения. Использование техники Келдыша, подходящее для изучения динамики таких систем, позволяет найти петлевые поправки к найденным выражениям и исправить данный недостаток.

Отметим также близость задачи идеального зеркала и задачи нахождения излучения Хокинга [27], [35], [23], [28]. Известно, что вакуумное среднее ТЭИ для конкретных траекторий движения идеального зеркала в древесном приближении совпадает по форме с потоком Хокинга. Однако идеальные зеркала являются физически недостижимыми объектами, а значит актуальным является рассмотрение задачи неидеального движущегося зеркала, которое способно частично пропускать и частично отражать высокочастотные кванты поля. Именно поведение скалярного поля на фоне неидеального движущегося зеркала и является темой данной диссертации.

Таким образом, рассматриваемая в данной диссертации задача позволяет изучить пересечение следующих вопросов:

1. техника Келдыша в задачах квантовой теории поля;
2. неидеальное зеркало как дельта-потенциал, зависящий от времени;
3. секулярно растущие петлевые вклады;
4. излучение Хокинга.

Как и в перечисленных выше системах теория возмущений в данной задаче формулируется в рамках диаграммной техники Швингера-Келдыша, позволяющей искать корреляторы полей и широко распространенной в теории конденсированного состояния [5], [6]. Детальное изучение квантовых поправок для самодействующего вещественного скалярного поля проведено в работе [24]. В частности, показан секулярный рост поправок второго порядка, неминуемо ведущий к необходимости пересуммирования вкладов от всех петель. Впервые задача неидеального зеркала (моделируемого дельта-барьером вместо граничного условия) и скалярного поля в его присутствии была сформулирована и рассмотрена в работах [24] и [26]. Мы покажем, что в данной задаче также существуют петлевые вклады, дающие секулярный рост пропагаторам, а значит задача суммирования вкладов от всех петель по-прежнему актуальна.

В данной диссертации рассмотрено поведение скалярного поля на фоне неидеального движущегося зеркала с самодействием  $\lambda\phi^4$ . В части 2.1 сформулирована постановка задачи и найдены гармоники, решающие уравнение для скалярного поля в невзаимодействующей теории. В части 2.2 проверено выполнение коммутационных соотношений для найденных мод и их физическая осмысленность. Завершается разговор о модах замечанием 2.3 о важности выбора правильных гармоник в квантовой теории поля. Часть 2.5 содержит вычисление вакуумного среднего ТЭИ скалярного поля (древесное приближение для диаграммной техники Келдыша в самодействующей теории). Включение самодействия и общие формулы петлевых поправок техники Швингера-Келдыша заключены в части 3.1. В части 3.2 найдены общие формулы для петли второго порядка и вычислена поправка второго порядка к пропагатору Келдыша, показан её секулярный рост. Анализ результатов и замечание о необходимости пересуммирования растущих вкладов приведены в заключении 4.

## 2 Свободная теория

### 2.1 Моды для неидеального зеркала

Рассмотрим безмассовое вещественное скалярное поле в двумерном пространстве-времени

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{\alpha}{2} \delta(x - z(t)) \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right], \quad (1)$$

где  $\delta$ –потенциал моделирует зеркало, движущееся по произвольной траектории  $x = z(t)$ ,  $\alpha$  – коэффициент, отвечающий за пропускаемость зеркала, интегрирование производится по всему двумерному пространству-времени. Уравнения движения для данного действия:

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \alpha \delta(x - z(t)) \varphi = -\frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \quad (2)$$

Для квантования теории введем разложение поля по операторам рождения и уничтожения следующим образом:

$$\varphi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \{ A_k g_k(t, x) \hat{a}_k + h.c. \}, \quad (3)$$

где  $A_k = \frac{1}{\sqrt{2|k|}}$  нормировка мод и  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$  – операторы рождения и уничтожения для положительно-частотных мод  $g_k$  с импульсом  $k$  и частотой  $\omega = |k|$ ,  $h.c.$  - эрмитово сопряжение. Отметим, что квантование и выбор мод определяют выбранное начальное состояние, эволюция которого изучается в данной задаче.

Решения для тривиальной траектории  $z(t) \equiv 0$  в невзаимодействующем случае хорошо известны:

$$g_k^0(u, v) = \theta(k) \left\{ e^{-iku} + \frac{\alpha}{2ik - \alpha} (\theta[-x] e^{-ikv} + \theta[x] e^{-iku}) \right\} + \\ + \theta(-k) \left\{ e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik + \alpha} (\theta[-x] e^{ikv} + \theta[x] e^{iku}) \right\}, \quad (4)$$

здесь  $u = t - x, \quad v = t + x$ . Перечислим основные свойства этих мод:

1. решают уравнения на поле и удовлетворяют правильным коммутационным соотношениям;
2. в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  переходят в свободные волны, т.е. без зеркала имеем свободное скалярное поле;
3. в пределе  $k \rightarrow \infty$  переходят в свободные волны, т.е. высокочастотные кванты не чувствуют присутствия зеркала.
4. в пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  переходят в решения задачи идеального зеркала.

Данные свойства имеют физическую значимость, поэтому должны быть выполнены для всех типов мод данной задачи. Руководствуясь этими условиями, запишем решения для зеркала, движущегося с постоянной скоростью  $-\beta$ ,  $|\beta| < 1$ .

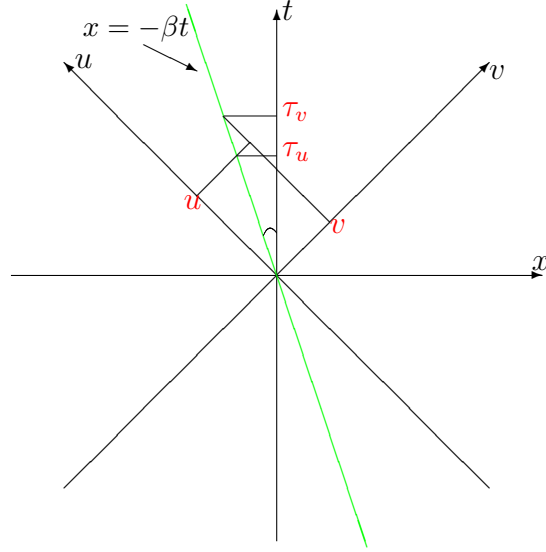


Рис. 2.2. Траектория для зеркала, движущегося с постоянной скоростью  $-\beta$ . Здесь

$$\tau_u = \frac{u}{1+\beta}; \tau_v = \frac{v}{1-\beta}.$$

Уравнение движения

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' + \alpha \delta(x + \beta t) \varphi(t, x) = 0$$

Решения, полученные лоренцевым бустом предыдущих мод и заменой переменной интегрирования  $k$ :

$$g_\beta = \theta(k) \left[ \left( e^{-iku} + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-ikv \frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) \theta(-(x + \beta t)) + \frac{2ik(1+\beta)}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-iku} \theta(x + \beta t) \right] + \\ + \theta(-k) \left[ \left( e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{iku \frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) \theta(x + \beta t) + \frac{2ik(1-\beta)}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ikv} \theta(-(x + \beta t)) \right].$$

Данные решения обладают теми же свойствами, что и моды для неподвижного зеркала. Коммутационные соотношения и условия шивки для данного типа мод будут проверены в следующих пунктах. Нетрудно заметить, что решением для ломаной с двумя звеньями является прямое обобщение полученных мод на случай двух скоростей (траектория  $z(t) = -\theta(t)\beta t - \theta(-t)\gamma t$ ):

$$g_b = \theta(k) \left[ e^{-iku} \theta(u) \theta(-(x + \beta t)) + e^{-iku} \theta(-u) \theta(-(x + \gamma t)) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-ikv \frac{1+\beta}{1-\beta}} \theta(v) \theta(-(x + \beta t)) + \frac{\alpha}{2ik(1+\gamma) - \alpha} e^{-ikv \frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \theta(-v) \theta(-(x + \gamma t)) + \right. \\ \left. + \frac{2ik(1+\beta)}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-iku} \theta(u) \theta(x + \beta t) + \frac{2ik(1+\gamma)}{2ik(1+\gamma) - \alpha} e^{-iku} \theta(-u) \theta(x + \gamma t) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +\theta(-k) \left[ e^{ikv}\theta(v)\theta(x+\beta t) + e^{ikv}\theta(-v)\theta(x+\gamma t) + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta)+\alpha} e^{iku\frac{1-\beta}{1+\beta}}\theta(u)\theta(x+\beta t) + \right. \\
& + \frac{-\alpha}{2ik(1-\gamma)+\alpha} e^{iku\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}\theta(-u)\theta(x+\gamma t) + \frac{2ik(1-\beta)}{2ik(1-\beta)+\alpha} e^{ikv}\theta(v)\theta(-(x+\beta t)) + \\
& \left. + \frac{2ik(1-\gamma)}{2ik(1-\gamma)+\alpha} e^{ikv}\theta(-v)\theta(-(x+\gamma t)) \right].
\end{aligned}$$

Перейдем к нахождению мод для произвольного движения зеркала. Напомним уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} - \varphi'' + \alpha \delta(x - z(t)) \varphi(t, x) = 0 \quad (5)$$

и следующие из них условия сшивки

$$\begin{aligned}
g(+0) &= g(-0) = g(0); \\
\partial_{x+\beta t}(g|_{+0} - g|_{-0}) &= \frac{\alpha g(0)}{1 - \beta^2}.
\end{aligned} \quad (6)$$

Ниже будет показано, что следующие моды решают задачу:

$$\begin{aligned}
g_k(u, v) &= \theta(k) \left\{ e^{-iku} \left[ \theta[z(\tau_u) - x] + \frac{2ik(1 + \beta_u)}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] \right] + \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] \right\} + \\
& + \theta(-k) \left\{ e^{ikv} \left[ \theta[x - z(\tau_v)] + \frac{2ik(1 - \beta_v)}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] \right] + \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] \right\},
\end{aligned} \quad (7)$$

здесь для каждой точки  $(u, v)$  пространства-времени  $\tau_u$  решает уравнение  $\tau_u - z(\tau_u) = u$ , а  $\tau_v$  решает уравнение  $\tau_v + z(\tau_v) = v$ ,  $\beta_v = \beta(\tau_v) = -\frac{dz}{dt}(\tau_v, z(\tau_v))$  – скорость зеркала в точке  $t = \tau_v$ , а  $\beta_u = \beta(\tau_u) = -\frac{dz}{dt}(\tau_u, z(\tau_u))$  – скорость зеркала в точке  $t = \tau_u$ .

Непосредственная проверка показывает выполнение всех требуемых физических свойств для найденных мод:

1. решают уравнения на поле и удовлетворяют условиям сшивки (см. 2.1);
2. в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  переходят в свободные волны, т.е. без зеркала имеем свободное скалярное поле;
3. в пределе  $k \rightarrow \infty$  переходят в свободные волны, т.е. высокочастотные кванты не чувствуют присутствия зеркала.
4. в пределе  $\alpha \rightarrow \infty$  переходят в решения задачи идеального зеркала.

Приведём наглядную иллюстрацию полученным модам.



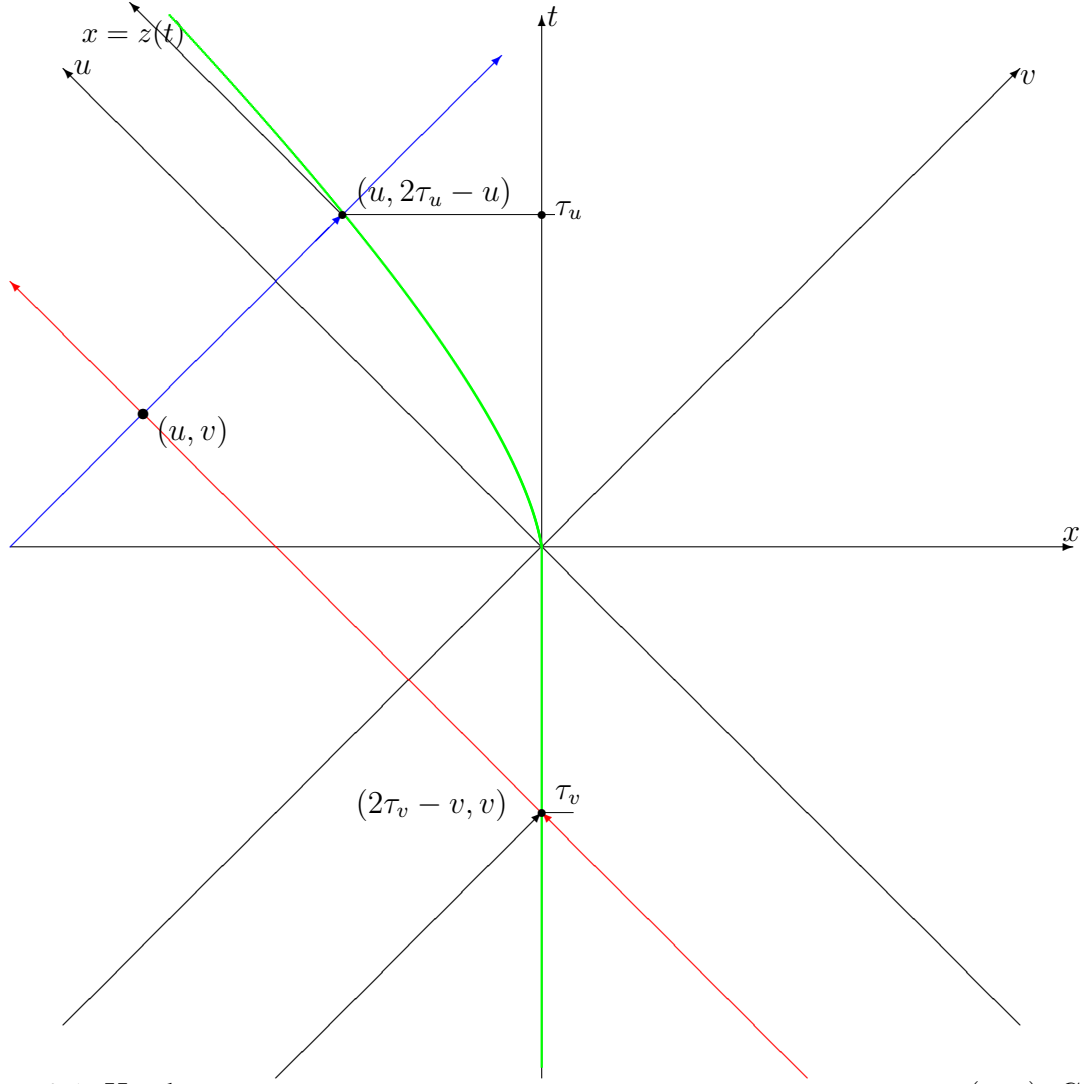


Рис. 2.1. Изображение всех волн, проходящих через заданную точку  $(u, v)$ . Синяя волна до точки  $(u, 2\tau_u - u)$  - это падающая на зеркало волна  $e^{-iku}$ . Синяя волна после точки  $(u, 2\tau_u - u)$  - это прошедшая часть волны  $e^{-iku}$  и отраженная часть волны  $e^{ikv}|_{v=2\tau_u-u}$ , падающей на зеркало справа. Аналогично, красная волна до точки  $(2\tau_v - v, v)$  - это падающая на зеркало справа волна  $e^{ikv}$ . Красная волна после точки  $(2\tau_v - v, v)$  - это прошедшая часть падающей волны  $e^{ikv}$  и отраженная часть волны  $e^{iku}|_{u=2\tau_v-v}$ , падающей на зеркало слева. Все эти волны выделены в формуле моды соответствующим цветом.

Все цвета падающих, прошедших и отраженных волн и их формульных представлений совпадают:

$$g_k(t, x) = \theta(k) \left\{ e^{-iku} \theta[z(\tau_u) - x] + \frac{2ik(1 + \beta_u)e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] + \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] \right\} +$$

$$+\theta(-k) \left\{ e^{ikv} \theta[x - z(\tau_v)] + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] + \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] \right\}.$$

Выражения для мод получены тем же способом, каким в задаче идеального зеркала воспользовался впервые ДеВитт (см. [25] и вычисление в [24]). Приведём явное вычисление.

Приблизим траекторию зеркала ломаной мировой линией. Для этого введем разбиение  $(x_i, t_i)$  и для каждого  $i$  рассмотрим линейное приближение к траектории зеркала  $z(t) = x_i + \beta_i t_i - \beta_i t$  со скоростью  $\beta_i = -\frac{z_i - z_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$ . Везде ниже  $\alpha_i = \frac{1 - \beta_i}{1 + \beta_i}$ . Запишем приближение ломаной для мод:

$$\begin{aligned}
g_k(u, v) = & \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta(k) \left\{ \theta(u - u_{i-1}) \theta(u_i - u) \left[ \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] + \right. \right. \\
& + \frac{2ik(1 + \beta_i)}{2ik(1 + \beta_i) - \alpha} \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] \left. \right] e^{-iku} + \\
& + \frac{\alpha}{2ik(1 + \beta_i) - \alpha} \theta(v - v_{i-1}) \theta(v_i - v) e^{-ik \left[ \alpha_i^{-1} v - (1 + \alpha_i^{-1}) \frac{z_{i-1} t_i - z_i t_{i-1}}{\Delta t} \right]} \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] \left. \right\} + \\
& + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta(-k) \left\{ \theta(v - v_{i-1}) \theta(v_i - v) \left[ \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] + \right. \right. \\
& + \frac{2ik(1 - \beta_i)}{2ik(1 - \beta_i) + \alpha} \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] \left. \right] e^{ikv} + \\
& + \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_i) + \alpha} \theta(u - u_{i-1}) \theta(u_i - u) e^{ik \left[ \alpha_i u + (1 + \alpha_i) \frac{z_{i-1} t_i - z_i t_{i-1}}{\Delta t} \right]} \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] \left. \right\} = \dots
\end{aligned}$$

Разложим функции от аргументов  $(x_{i-1}, t_{i-1})$  по переменным  $(x_i, t_i)$  и рассмотрим первый порядок разложения:

$$\begin{aligned}
\dots = & \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta(k) \left\{ \theta(u_i - u) [\theta(u - u_i) + \delta(u - u_i) (1 - \frac{\Delta z}{\Delta t}) \Delta t] \left[ \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] + \right. \right. \\
& + \frac{2ik(1 + \beta_i)}{2ik(1 + \beta_i) - \alpha} \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] \left. \right] e^{-iku} + \\
& + \theta(v_i - v) [\theta(v - v_i) + \delta(v - v_i) (1 + \frac{\Delta z}{\Delta t}) \Delta t] \cdot \\
& \cdot \frac{\alpha}{2ik(1 + \beta_i) - \alpha} e^{-ik \left[ \alpha_i^{-1} v - (1 + \alpha_i^{-1}) (z_i - \frac{\Delta z}{\Delta t} t_i) \right]} \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] \left. \right\} + \\
& + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \theta(-k) \left\{ \theta(v_i - v) [\theta(v - v_i) + \delta(v - v_i) (1 + \frac{\Delta z}{\Delta t}) \Delta t] \left[ \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] + \right. \right. \\
& + \frac{2ik(1 - \beta_i)}{2ik(1 - \beta_i) + \alpha} \theta[-x - \beta_i t + x_i + \beta_i t_i] \left. \right] e^{ikv} + \\
& + \theta(u_i - u) [\theta(u - u_i) + \delta(u - u_i) (1 - \frac{\Delta z}{\Delta t}) \Delta t] \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_i) + \alpha} e^{ik \left[ \alpha_i u + (1 + \alpha_i) (z_i - \frac{\Delta z}{\Delta t} t_i) \right]} \theta[x + \beta_i t - x_i - \beta_i t_i] \left. \right\} = \dots
\end{aligned}$$

В пределе  $dx \rightarrow 0$  сумма переходит в интеграл:

$$\dots = \theta(k) \theta(0) \int_{-\infty}^{+\infty} (d\tau - dz) \delta[u - (\tau - z(\tau))] \left[ \theta[-x - \beta(\tau)t + z(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\beta(\tau)\tau] + \frac{2ik(1+\beta(\tau))}{2ik(1+\beta(\tau))-\alpha} \theta[x+\beta(\tau)t-z(\tau)-\beta(\tau)\tau] \Big] e^{-iku} + \\
& +\theta(0)\theta(k) \int_{-\infty}^{+\infty} (d\tau+dz)\delta[v-(\tau+z(\tau))] \frac{\alpha}{2ik(1+\beta(\tau))-\alpha} \cdot \\
& \cdot \theta[-x-\beta(\tau)t+z(\tau)+\beta(\tau)\tau] e^{-ik[\alpha^{-1}(\tau)v-(1+\alpha^{-1}(\tau))(z(\tau)+\beta(\tau)\tau)]} + \\
& +\theta(0)\theta(-k) \int_{-\infty}^{+\infty} (d\tau+dz)\delta[v-(\tau+z(\tau))] \Big[ \theta[x+\beta(\tau)t-z(\tau)-\beta(\tau)\tau] + \\
& + \frac{2ik(1-\beta(\tau))}{2ik(1-\beta(\tau))+\alpha} \theta[-x-\beta(\tau)t+z(\tau)+\beta(\tau)\tau] \Big] e^{ikv} + \\
& +\theta(0)\theta(-k) \int_{-\infty}^{+\infty} (d\tau-dz)\delta[u-(\tau-z(\tau))] \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta(\tau))+\alpha} \cdot \\
& \cdot e^{ik[\alpha(\tau)u+(1+\alpha(\tau))(z(\tau)+\beta(\tau)\tau)]} \theta[x+\beta(\tau)t-z(\tau)-\beta(\tau)\tau] = \dots
\end{aligned}$$

Наконец, проинтегрируем явно  $\delta$ -функцию и получим окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
\dots = & \theta(0)\theta(k) \left\{ e^{-iku} \left[ \theta[-x-\beta(\tau_u)t+z(\tau_u)+\beta(\tau_u)\tau_u] + \right. \right. \\
& + \left. \frac{2ik(1+\beta(\tau_u))}{2ik(1+\beta(\tau_u))-\alpha} \theta[x+\beta(\tau_u)t-z(\tau_u)-\beta(\tau_u)\tau_u] \right] + \\
& + \left. \frac{\alpha}{2ik(1+\beta(\tau_u))-\alpha} e^{-ik(2\tau_u-v)} \theta[-x-\beta(\tau_u)t+z(\tau_u)+\beta(\tau_u)\tau_u] \right\} + \\
& +\theta(0)\theta(-k) \left\{ e^{ikv} \left[ \theta[x+\beta(\tau_v)t-z(\tau_v)-\beta(\tau_v)\tau_v] + \right. \right. \\
& + \left. \frac{2ik(1-\beta(\tau_v))}{2ik(1-\beta(\tau_v))+\alpha} \theta[-x-\beta(\tau_v)t+z(\tau_v)+\beta(\tau_v)\tau_v] \right] + \\
& + \left. \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta(\tau_v))+\alpha} e^{ik(2\tau_v-u)} \theta[x+\beta(\tau_v)t-z(\tau_v)-\beta(\tau_v)\tau_v] \right\}.
\end{aligned}$$

Сравнивая с решением для траектории с постоянной скоростью  $\beta$ , получаем  $\theta(0) = 1$ . Окончательно получаем следующие моды (для краткости введены обозначения  $\beta_u = \beta(\tau_u)$  и  $\beta_v = \beta(\tau_v)$ ,  $z_u = z(\tau_u)$ ,  $z_v = z(\tau_v)$ ):

$$\begin{aligned}
g_k(u, v) = & \theta(k) \left\{ e^{-iku} \left[ \theta[-x-\beta_u t+z_u+\beta_u \tau_u] + \frac{2ik(1+\beta_u)}{2ik(1+\beta_u)-\alpha} \theta[x+\beta_u t-z_u-\beta_u \tau_u] \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\alpha}{2ik(1+\beta_u)-\alpha} e^{-ik(2\tau_u-v)} \theta[-x-\beta_u t+z_u+\beta_u \tau_u] \right\} + \\
& +\theta(-k) \left\{ e^{ikv} \left[ \theta[x+\beta_v t-z_v-\beta_v \tau_v] + \frac{2ik(1-\beta_v)}{2ik(1-\beta_v)+\alpha} \theta[-x-\beta_v t+z_v+\beta_v \tau_v] \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\left. + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta_u) + \alpha} e^{ik(2\tau_u - u)} \theta[x + \beta_u t - z_u - \beta_u \tau_u] \right\}.$$

Покажем, что полученные моды удовлетворяют условиям сшивки.

Условия сшивки - это условия непрерывности мод при переходе через зеркало и условия разрыва производной (см. аналогию с обычным потенциалом дельта-ямы в квантовой механике). В данном случае переход через зеркало осуществляется в направлении, перпендикулярном зеркалу.

$$g(+0) = g(-0) = g(0);$$

$$g'_{x+\beta t}(+0) - g'_{x+\beta t}(-0) = \frac{\alpha}{1-\beta^2} g(0),$$

здесь предел  $(\pm 0)$  - это рассмотрение точек соответственно справа и слева от зеркала (т.е. когда являются ненулевыми соответствующие тета-функции), дифференцирование производится по аргументу тета-функций, т.е. по направлению, касательному к траектории зеркала  $(x + \beta t)$ .

В окрестности зеркала имеем следующее равенство  $\tau_u = \tau_v$ , поэтому первое условие удовлетворено.

Докажем второе условие. Введем замену переменных:

$$\xi = x + \beta t, \quad \eta = \beta x + t$$

$$t = \frac{\eta - \beta \xi}{1 - \beta^2}, \quad x = \frac{\xi - \beta \eta}{1 - \beta^2}$$

Имеем (напомним, что в данном вычислении мы работаем в линейном приближении в окрестности зеркала, в котором  $\beta = \beta_u = \beta_v = const$ , и в модах  $\theta(0) = 1/2$ ):

$$\partial_\xi = \partial_t \frac{\partial t}{\partial \xi} + \partial_x \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial_x - \beta \partial_t}{1 - \beta^2}; \quad \partial_x = \partial_v - \partial_u, \quad \partial_t = \partial_u + \partial_v$$

$$\partial_\xi = \frac{\partial_v - \partial_u - \beta(\partial_u + \partial_v)}{1 - \beta^2} = \frac{\partial_v}{1 + \beta} - \frac{\partial_u}{1 - \beta};$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi g(+0) - \partial_\xi g(-0) = \theta(k) \left\{ \frac{2ik(1+\beta)ik}{[2ik(1+\beta) - \alpha](1-\beta)} e^{-iku} - \frac{ik}{1-\beta} e^{-iku} + \right. \\ \left. + \frac{ik\alpha}{[2ik(1+\beta) - \alpha](1-\beta)} e^{-iku} \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \theta(-k) \left\{ \frac{ik}{1+\beta} e^{ikv} + \frac{ik\alpha}{[2ik(1-\beta) + \alpha](1+\beta)} e^{ikv} - \frac{2ik(1-\beta)ik}{[2ik(1-\beta) + \alpha](1+\beta)} e^{ikv} \right\} =$$

$$= \theta(k) \frac{2ik\alpha(1+\beta)}{[2ik(1+\beta) - \alpha](1-\beta^2)} e^{-iku} + \theta(-k) \frac{2ik\alpha(1-\beta)}{[2ik(1-\beta) + \alpha](1-\beta^2)} e^{ikv} = \frac{\alpha}{1-\beta^2} g(0).$$

Следовательно, условия сшивки удовлетворены. Заметим, что аргументы тета-функций могут быть переписаны в более удобном виде:

$$\tau_u - z(\tau_u) = u, \quad \tau_v + z(\tau_v) = v, \quad x = \frac{v - u}{2}, \quad t = \frac{v + u}{2}$$

$$\begin{aligned} \theta[x + \beta_u t - z_u - \beta_u \tau_u] &= \theta\left[\frac{v - u}{2} + \beta_u \frac{v + u}{2} - \tau_u + u - \beta_u \tau_u\right] = \\ &= \theta\left[\frac{1 + \beta_u}{2}(v - [2\tau_u - u])\right] = \theta[v - (2\tau_u - u)] = \theta[v + u - 2\tau_u] = \theta[t - \tau_u] = \\ &= \theta[t - z(\tau_u) - u] = \theta[x - z(\tau_u)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta[x + \beta_v t - z_v - \beta_v \tau_v] &= \theta\left[\frac{v - u}{2} + \beta_v \frac{v + u}{2} + \tau_v - v - \beta_v \tau_v\right] = \\ &= \theta\left[\frac{1 - \beta_v}{2}([2\tau_v - v] - u)\right] = \theta[(2\tau_v - v) - u] = \theta[v + u - 2\tau_v] = \theta[t - \tau_v] = \\ &= \theta[t + z(\tau_v) - v] = \theta[z(\tau_v) - x]. \end{aligned}$$

## 2.2 Проверка выполнения коммутационного соотношения

В этой части приводится проверка коммутационного соотношения на поле и сопряженный импульс (для наглядности проверен случай движения зеркала с постоянной скоростью  $-\beta$ ). Мы накладываем стандартные коммутационные соотношения на операторы рождения-уничтожения  $[a_k, a_{k'}^+] = 2\pi\delta(k - k')$ ,  $[a_k^+, a_{k'}^+] = [a_k, a_{k'}] = 0$  и получаем следующие выражения:

$$\varphi(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} A_k \{g(k, t, x)\hat{a}_k + g^*(k, t, x)\hat{a}_k^+\};$$

$$\pi(t, y) = \partial_t \varphi(t, y) = \int \frac{dk'}{2\pi} A_{k'} \{\partial_t g(k', t, y)\hat{a}_{k'} + \partial_t g^*(k', t, y)\hat{a}_{k'}^+\};$$

$$[\varphi(t, x), \pi(t, y)] = \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 [g(k, t, x)\partial_t g^*(k, t, y) - g^*(k, t, x)\partial_t g(k, t, y)].$$

Выпишем еще раз выражения для мод:

$$\begin{aligned} g_k(t, x) &= \theta(k) \left\{ e^{-iku_x} + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-iku_x} \theta[+] + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-ik\frac{1+\beta}{1-\beta}v_x} \theta[-] \right\} + \\ &+ \theta(-k) \left\{ e^{ikv_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ikv_x} \theta[-] + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ik\frac{1-\beta}{1+\beta}u_x} \theta[+] \right\}, \end{aligned}$$

получим для производных:

$$\begin{aligned} \partial_t g_k^*(t, y) &= \theta(k) \left\{ ik \left[ e^{iky_y} + \frac{-\alpha e^{iky_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \theta[+] + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{-\alpha e^{ik\frac{1+\beta}{1-\beta}v_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \theta[-] \right] + \right. \\ &+ \theta(-k) \left\{ (-ik) \left[ e^{-ikv_y} + \frac{\alpha e^{-ikv_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \theta[-] + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{-ik\frac{1-\beta}{1+\beta}u_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \theta[+] \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_k^*(t, x) &= \theta(k) \left\{ e^{iku_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1+\beta) + \alpha} e^{iku_x} \theta[+] + \frac{-\alpha}{2ik(1+\beta) + \alpha} e^{ik \frac{1+\beta}{1-\beta} v_x} \theta[-] \right\} + \\
&+ \theta(-k) \left\{ e^{-ikv_x} + \frac{\alpha}{2ik(1-\beta) - \alpha} e^{-ikv_x} \theta[-] + \frac{\alpha}{2ik(1-\beta) - \alpha} e^{-ik \frac{1-\beta}{1+\beta} u_x} \theta[+] \right\}; \\
\partial_t g_k(t, y) &= \theta(k) \left\{ (-ik) \left[ e^{-iku_y} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1+\beta) - \alpha} \theta[+] + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{\alpha e^{-ik \frac{1+\beta}{1-\beta} v_y}}{2ik(1+\beta) - \alpha} \theta[-] \right] \right\} + \\
&+ \theta(-k) \left\{ ik \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1-\beta) + \alpha} \theta[-] + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{-\alpha e^{ik \frac{1-\beta}{1+\beta} u_y}}{2ik(1-\beta) + \alpha} \theta[+] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

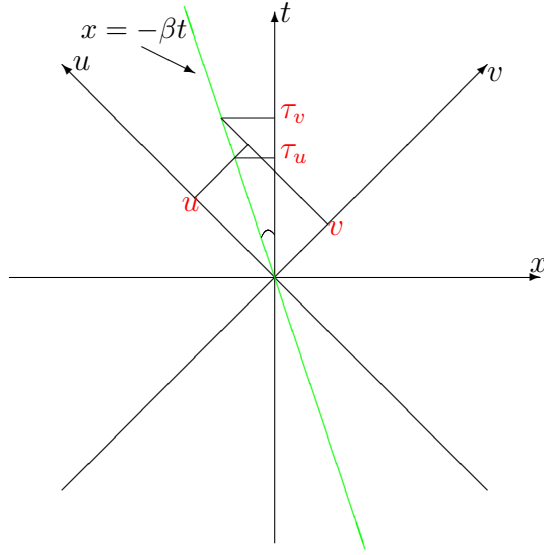


Рис. 1. Зеркало, движущееся с постоянной скоростью. Здесь  $\tau_u = \frac{u}{1+\beta}$ ;  $\tau_v = \frac{v}{1-\beta}$ .

Существуют 4 различных случая (везде ниже  $\gamma = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ ).

1.  $x, y > z(t)$ .

$$\begin{aligned}
[\varphi(t, x), \pi(t, y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk}{4\pi} \left\{ \left[ e^{-iku_x} + \frac{\alpha e^{-iku_x}}{2ik(1+\beta) - \alpha} \right] \left[ e^{iku_y} + \frac{-\alpha e^{iku_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \right] + \right. \\
&+ \left. \left[ e^{ikv_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ik\gamma u_x} \right] \left[ e^{-ikv_y} + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{-ik\gamma u_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \right] \right\} = \\
&= i\delta(x-y) + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) - \alpha} + \frac{-\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) + \alpha} + \frac{-\alpha^2 e^{ik(x-y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} \right] + \\
&+ \int \frac{idk}{4\pi} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{-\alpha^2 e^{-ik\gamma(x-y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} = i\delta(x-y) +
\end{aligned}$$

$$+ \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{\alpha^2 e^{ik(x-y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} - \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha^2 e^{-ik\gamma(x-y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} \right] = \\ = i\delta(x-y).$$

Из рисунка (2.2) видно, что  $\frac{1-\beta}{1+\beta}u_y < v_x$  для любых  $x$  и  $y$ , расположенных на линии постоянного  $t$  справа от зеркала. Следовательно интегралы  $\frac{-\alpha}{2ik(1-\beta)+\alpha}e^{ik(\frac{1-\beta}{1+\beta}u_x-v_y)}$  и  $\frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{\alpha e^{-ik(\frac{1-\beta}{1+\beta}u_y-v_x)}}{2ik(1-\beta)-\alpha}$  равны нулю (контур интегрирования и единственный полюс подынтегрального выражения находятся в разных полуплоскостях). Последние два интеграла равны после следующей замены во втором интеграле  $[k \rightarrow -\frac{1-\beta}{1+\beta}k]$ .

2.  $x, y < z(t)$ .

$$[\varphi(t, x), \pi(t, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk}{4\pi} \left\{ \left[ e^{-iku_x} + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-ik\gamma^{-1}v_x} \right] \right. \\ \left. \left[ e^{iku_y} + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{-\alpha e^{ik\gamma^{-1}v_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \right] + \right. \\ \left. + \left[ e^{ikv_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ikv_x} \right] \left[ e^{-ikv_y} + \frac{\alpha e^{-ikv_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \right] \right\} = \\ = i\delta(x-y) + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) - \alpha} + \frac{-\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) + \alpha} + \frac{-\alpha^2 e^{ik(x-y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} \right] + \\ + \int \frac{idk}{4\pi} \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{-\alpha^2 e^{-ik\gamma^{-1}(x-y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} = i\delta(x-y) + \\ + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{\alpha^2 e^{ik(x-y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} - \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{\alpha^2 e^{-ik\gamma^{-1}(x-y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} \right] = \\ = i\delta(x-y).$$

Аналогично предыдущему случаю получаем из (2.2), что  $\frac{1+\beta}{1-\beta}v_y < u_x$  для любых двух точек  $x$  и  $y$  расположенных на линии постоянного  $t$  слева от зеркала. Следовательно интегралы  $\frac{\alpha}{2ik(1+\beta)-\alpha}e^{-ik(\frac{1+\beta}{1-\beta}v_x-u_y)}$  и  $\frac{1+\beta}{1-\beta}\frac{-\alpha e^{ik(\frac{1+\beta}{1-\beta}v_y-u_x)}}{2ik(1+\beta)+\alpha}$  равны 0 (контур интегрирования и единственный полюс подынтегрального выражения находятся в разных полуплоскостях).

И вновь последние два интеграла равны друг другу после замены  $[k \rightarrow -\frac{1+\beta}{1-\beta}k]$  во втором.

3.  $x > z(t), y < z(t)$ .

$$[\varphi(t, x), \pi(t, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk}{4\pi} \left\{ \left[ e^{-iku_x} + \frac{\alpha e^{-iku_x}}{2ik(1+\beta) - \alpha} \right] \left[ e^{iku_y} + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{-\alpha e^{ik\gamma^{-1}v_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \right] + \right. \\ \left. + \left[ e^{ikv_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ik\gamma u_x} \right] \left[ e^{-ikv_y} + \frac{\alpha e^{-ikv_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= i\delta(x-y) + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) - \alpha} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1+\beta - \alpha e^{-ik(u_x - \gamma^{-1}v_y)}}{1-\beta} \frac{1}{2ik(1+\beta) + \alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{-\alpha^2 e^{-ik(u_x - \gamma^{-1}v_y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} \right] + \\
&\quad + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{-\alpha e^{ik(\gamma u_x - v_y)}}{2ik(1-\beta) + \alpha} + \frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) - \alpha} + \frac{-\alpha^2 e^{-ik(\gamma u_x - v_y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} \right] = i\delta(x-y).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что в этом случае  $x > y$  для любых  $x > z(t)$  и  $y < z(t)$  на прямой  $t = const$ . Следовательно интегралы  $\frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) - \alpha}$  и  $\frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) - \alpha}$  равны 0 (контур интегрирования и единственный полюс подынтегрального выражения находятся в разных полуплоскостях). После замены  $[k \rightarrow -\frac{1+\beta}{1-\beta}k]$  последние два интеграла в сумме дают число, противоположное оставшемуся интегралу.

4.  $x < z(t)$ ,  $y > z(t)$ .

$$\begin{aligned}
[\varphi(t, x), \pi(t, y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idk}{4\pi} \left\{ \left[ e^{-iku_x} + \frac{\alpha}{2ik(1+\beta) - \alpha} e^{-ik\gamma^{-1}v_x} \right] \left[ e^{iku_y} + \frac{-\alpha e^{iku_y}}{2ik(1+\beta) + \alpha} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left[ e^{ikv_x} + \frac{-\alpha}{2ik(1-\beta) + \alpha} e^{ikv_x} \right] \left[ e^{-ikv_y} + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{-ik\gamma u_y}}{2ik(1-\beta) - \alpha} \right] \right\} = \\
&= i\delta(x-y) + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{-\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) + \alpha} + \frac{\alpha e^{-ik(\gamma^{-1}v_x - u_y)}}{2ik(1+\beta) - \alpha} + \frac{-\alpha^2 e^{-ik(\gamma^{-1}v_x - u_y)}}{[2ik(1+\beta) + \alpha][2ik(1+\beta) - \alpha]} \right] + \\
&\quad + \int \frac{idk}{4\pi} \left[ \frac{-\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) + \alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{ik(v_x - \gamma u_y)}}{2ik(1-\beta) - \alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{-\alpha^2 e^{ik(v_x - \gamma u_y)}}{[2ik(1-\beta) + \alpha][2ik(1-\beta) - \alpha]} \right] = \\
&= i\delta(x-y).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что в этом случае  $x < y$  для любых  $x < z(t)$  и  $y > z(t)$  на прямой  $t = const$ . Следовательно интегралы  $\frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1+\beta) + \alpha}$  и  $\frac{\alpha e^{ik(x-y)}}{2ik(1-\beta) + \alpha}$  равны 0 (контур интегрирования и единственный полюс подынтегрального выражения находятся в разных полуплоскостях). После замены  $[k \rightarrow -\frac{1+\beta}{1-\beta}k]$  последние два интеграла в сумме дают число, противоположное по знаку оставшемуся интегралу.

Таким образом, в данном пункте показано, что коммутационное соотношение для мод в случае движущегося с постоянной скоростью зеркала имеет канонический вид:

$$[\varphi(t, x), \pi(t, y)] = i\delta(x-y).$$

Поскольку гармоники в случае произвольного движения зеркала найдены из приближения мировой линии движения ломаной линией, можно сделать вывод о выполнении коммутационных соотношений и для этих мод.



## 2.3 Замечание о выборе мод

В этом параграфе приведён анализ некоторых симметричных мод (полученных конформным преобразованием мод для случая неподвижного зеркала) для задач идеального и неидеального зеркал и рассуждения о важности выбора мод в данной задаче.

Напомним, что задача идеального зеркала и взаимодействующего с ним скалярного поля представляет собой уравнения движения относительно поля  $\phi$  и граничное условие, при котором поле на зеркале обязано зануляться:

$$\partial_u \partial_v \phi = 0, \quad \phi[t, z(t)] = 0.$$

В работах [22] - [24] приведен детальный анализ данной задачи, вплоть до квантовых поправок в самодействующей теории. Мы сосредоточим наше внимание на другом выборе мод и покажем, что физические свойства поля изменятся.

Прямой подстановкой можно показать, что следующие моды решают задачу идеального зеркала:

$$\phi(t, x) = \int_0^{+\infty} d\omega \left\{ \frac{g_\omega(t, x)}{\sqrt{2\omega}} \hat{a}_\omega + h.c. \right\},$$

$$g_\omega(u, v) = i [e^{-i\omega\tau_v} - e^{-i\omega\tau_u}], \quad (8)$$

где  $u = t - x$ ,  $v = t + x$  координаты светового конуса, а  $\tau_u$ ,  $\tau_v$  - неявные функции  $u$ ,  $v$ , решающие следующие уравнения:  $\tau_u - z(\tau_u) = u$ ,  $\tau_v + z(\tau_v) = v$ . Действительно, уравнения движения решаются:

$$\partial_u \partial_v \phi = 0.$$

Граничные условия также удовлетворены, поскольку  $\tau_u = \tau_v$  тогда и только тогда, когда  $x = z(t)$ .

Коммутационные соотношения для данных мод имеют канонический вид, если отбросить граничные члены (та же ситуация наблюдалась для физических мод, с которыми работали в [24] и [22]):

$$g_\omega^*(u, v) = -i [e^{i\omega\tau_v} - e^{i\omega\tau_u}].$$

$$\begin{aligned} [\phi, \pi] &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{2} [g_\omega(x)g_\omega^*(y) + g_\omega^*(x)g'_\omega(y)] = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{2} \left\{ [e^{-i\omega\tau_v^x} - e^{-i\omega\tau_u^x}] [\tau_v'^y e^{i\omega\tau_v^y} - \tau_u'^y e^{i\omega\tau_u^y}] + [e^{i\omega\tau_v^x} - e^{i\omega\tau_u^x}] [\tau_v'^y e^{-i\omega\tau_v^y} - \tau_u'^y e^{-i\omega\tau_u^y}] \right\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{2} \left\{ \tau_v'^y e^{i\omega(\tau_v^y - \tau_v^x)} + \tau_u'^y e^{i\omega(\tau_u^y - \tau_u^x)} - \tau_v'^y e^{i\omega(\tau_v^y - \tau_u^x)} - \tau_u'^y e^{i\omega(\tau_u^y - \tau_v^x)} + h.c. \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{2} \left\{ \tau_v'^y e^{i\omega(\tau_v^y - \tau_v^x)} + \tau_u'^y e^{i\omega(\tau_u^y - \tau_u^x)} - \tau_v'^y e^{i\omega(\tau_v^y - \tau_u^x)} - \tau_u'^y e^{i\omega(\tau_u^y - \tau_v^x)} \right\} = \\ &= \frac{i}{2} [\tau_v'^y \delta(\tau_v^y - \tau_v^x) + \tau_u'^y \delta(\tau_u^y - \tau_u^x) - \tau_v'^y \delta(\tau_v^y - \tau_u^x) - \tau_u'^y \delta(\tau_u^y - \tau_v^x)] = i\delta(x - y) + \text{boundary terms}, \end{aligned}$$

где  $f'$  обозначает дифференцирование функции  $f$  по своему аргументу, а граничные члены представляют из себя дельта-функции, которые не нуль только на самом зеркале.

Эти моды являются для нас примечательными, поскольку в задаче неидеального зеркала можно написать моды похожего вида, но симметричные относительно  $u$  и  $v$ . Действительно, следующие моды решают задачу неидеального движущегося зеркала:

$$g(k, u, v) = \theta(k) \left[ e^{-ik\tau_u} + \frac{\alpha}{2ik - \alpha} (e^{-ik\tau_v} \theta[-(x - z(t))] + e^{-ik\tau_v} \theta[x - z(t)]) \right] + \\ + \theta(-k) \left[ e^{ik\tau_v} + \frac{-\alpha}{2ik + \alpha} (e^{ik\tau_u} \theta[x - z(t)] + e^{ik\tau_u} \theta[-(x - z(t))]) \right].$$

В этих модах появляются коэффициенты отражения и прохождения, зависящие от импульса падающей волны. Отметим, что перечисленные здесь моды (и для идеального, и для неидеального зеркала) могут быть получены конформными преобразованиями  $v \rightarrow \tau_v$ ,  $u \rightarrow \tau_u$  гармоник для покоящегося зеркала. Свойства мод:

- при  $\alpha \rightarrow \infty$  решают задачу об идеальном, движущемся по произвольной траектории зеркале (дают моды, полученные выше);
- при переходе через зеркало в направлении, перпендикулярном движению зеркала в каждой его точке, удовлетворяют условиям сшивки (т.е. решают уравнения движения);
- удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению (граничных членов, в отличие от случая идеального зеркала, не возникает).

Отметим, что для этих мод не выполняется одно из главных физических свойств – переход к свободным волнам для квантов с высокой энергией (т.е. в пределе  $k \rightarrow \infty$ ). Поэтому в работе был использован метод ДеВитта нахождения общих мод, которые удовлетворяют всем необходимым физическим и математическим условиям.

Вернёмся к изучению симметричных мод. Для случаев мод в присутствии идеального и неидеального зеркала можно посчитать поток энергии-импульса. Примечательно, что оба типа мод дают один и тот же ответ:

$$\langle T_{tx} \rangle = \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{3}{2} \left\{ \left( \frac{\tau_v''}{\tau_v'} \right)^2 - \left( \frac{\tau_u''}{\tau_u'} \right)^2 \right\} - \left\{ \frac{\tau_v'''}{\tau_v'} - \frac{\tau_u'''}{\tau_u'} \right\} \right],$$

имеющий следующие свойства:

- конечная величина;
- является разностью шварцианов преобразований координат:

$$T_{tx}(u, v) = \frac{1}{12\pi} [\{\tau_u, u\} - \{\tau_v, v\}];$$

- зануляется для неподвижного и равномерно движущегося зеркала;

- не ноль для равномерно ускоряющегося зеркала;
- не зависит от  $\alpha$ .

Второе свойство неудивительно, если вспомнить сделанное выше наблюдение о конформном преобразовании мод покоящегося зеркала в данные моды. Пятое свойство нефизично: в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  поток должен исчезать. Приведём проверку четвертого свойства. Рассмотрим зеркало, движущееся релятивистски равноускоренно. Траектория для такого движения - гипербола:

$$z(t) = a - \sqrt{t^2 + a^2},$$

где  $w_\mu w^\mu = -\frac{1}{a^2}$  - постоянное 4-ускорение в сопутствующей системе отсчета.

Найдем  $\tau_v$ ,  $\tau_u$ :

$$\begin{aligned} \tau_u - z(\tau_u) &= \tau_u - a + \sqrt{\tau_u^2 + a^2} = u; \\ \tau_u^2 + a^2 &= (u - \tau_u + a)^2 = \tau_u^2 + a^2 + u^2 - 2u\tau_u - 2a\tau_u + 2au; \\ \tau_u &= \frac{u(u + 2a)}{2(u + a)} = \frac{u^2 + 2au}{2u + 2a}. \end{aligned}$$

Из общей формулы для вакуумного среднего ТЭИ:

$$\begin{aligned} \langle T_{tx} \rangle &= \frac{1}{12\pi} \left[ \frac{3}{2} \left\{ \left( \frac{\tau_v''}{\tau_v'} \right)^2 - \left( \frac{\tau_u''}{\tau_u'} \right)^2 \right\} - \left\{ \frac{\tau_v'''}{\tau_v'} - \frac{\tau_u'''}{\tau_u'} \right\} \right]. \\ \tau_u' &= \frac{1}{1 + \beta(\tau_u)}; \quad \tau_u'' = \frac{-\beta'(\tau_u)}{(1 + \beta(\tau_u))^3}; \\ \tau_u' &= 1 - \frac{u^2 + 2au}{2(u + a)^2} = \frac{u^2 + 2au + 2a^2}{2(u + a)^2}; \\ \tau_u'' &= -\frac{1}{u + a} + \frac{u^2 + 2au}{(u + a)^3} = \frac{-a^2}{(u + a)^3}; \\ \tau_u''' &= \frac{1}{(u + a)^2} + \frac{2}{(u + a)^2} - \frac{3(u^2 + 2au)}{(u + a)^4} = \frac{3a^2}{(u + a)^4}; \\ \frac{\tau_u'''}{\tau_u'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\tau_u''}{\tau_u'} \right)^2 &= \frac{6a^2}{(u^2 + 2au + 2a^2)(u + a)^2} - \frac{6a^4}{(u^2 + 2au + 2a^2)^2(u + a)^2} = \\ &= \frac{6a^2(u^2 + 2au + a^2)}{(u^2 + 2au + 2a^2)^2(u + a)^2} = \frac{6a^2}{(u^2 + 2au + 2a^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_v + z(\tau_v) &= \tau_v + a - \sqrt{\tau_v^2 + a^2} = v; \\ \tau_v^2 + a^2 &= (\tau_v + a - v)^2 = \tau_v^2 + a^2 + v^2 + 2a\tau_v - 2v\tau_v - 2av; \\ \tau_v &= \frac{v(v - 2a)}{2(v - a)} = \frac{v^2 - 2av}{2v - 2a}; \\ \frac{3}{2} \left( \frac{\tau_v''}{\tau_v'} \right)^2 - \frac{\tau_v'''}{\tau_v'} &= \frac{-6a^2}{(v^2 - 2av + 2a^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\langle T_{tx} \rangle = \frac{a^2 (u^2 + v^2 + 2a(u - v) + 4a^2)(v - u - 2a)(v + u)}{2\pi (u^2 + 2au + 2a^2)^2(v^2 - 2av + 2a^2)^2}.$$

Данный поток равен нулю лишь в тривиальном случае ( $a = 0$ ). В силу равенства выражений для потоков в задачах идеального и неидеального зеркал имеем, что в обоих случаях поток не равен нулю и, более того, потоки для идеального и неидеального зеркал равны. Это значит, что данные моды не учитывают нужных физических характеристик рассматриваемых задач (поскольку не различаются для идеального и неидеального зеркала) и не позволяют судить о поведении квантованного поля в окрестности зеркал, несмотря на то что все математические требования выполнены (решают уравнения движения, удовлетворяют условиям сшивки, коммутационное соотношение для них выполнено).

Напомним также, что в физически грамотных модах задачи идеального зеркала поток ТЭИ для равноускоренно движущегося зеркала равен нулю. Наличие излучения для данных мод позволяет сделать следующий вывод: физические характеристики полей при наличии зеркала (как идеального, так и неидеального) зависят от выбора мод. Выбор мод означает выбор начального состояния, с которого начинается эволюция системы. Это значит, что наблюдаемые эффекты зависят от выбора начального состояния системы. В частности, при соответствующем выборе начального состояния может появиться ненулевой поток энергии - т.е. то, что покажет детектор, расположенный вне зеркала. Следовательно, для того чтобы правильно судить о физике происходящего в данной задаче, нужно определиться с выбором начального состояния, а значит выбрать моды, имеющие правильный физический смысл. Все требования, которым должны удовлетворять моды, перечислены в предыдущем параграфе. Найденные в данной работе моды удовлетворяют всем требованиям.

Отметим, что проблема выбора начального состояния и правильных мод в задачах квантовой теории поля не нова и возникает не только в задачах с движущимися зеркалами: во всех задачах, в которых лагранжиан поля явно зависит от времени, т.е. в задачах, в которых основное состояние может меняться в ходе эволюции системы, требуется тщательный анализ выбранных гармоник на физическое соответствие требуемому начальному состоянию системы.

## 2.4 Необходимые материалы для расчетов

Ниже приведены определения и формулы, необходимые для дальнейших расчетов. Везде в тексте отсутствие пределов интегрирования означает интегрирование по всей числовой оси, т.е. с пределами от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Определение интегральной показательной функции  $Ei(x)$  (см. [37]):

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xe^t} dt = -Ei(-x).$$

Тогда верно следующее:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dk}{k+z} e^{-kg} = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k+1} e^{-kzg} = e^{zg} \int_1^{+\infty} \frac{dk}{k} e^{-kzg} = -e^{zg} Ei(-zg) \quad \rightarrow$$

введём еще одно определение:

$$\Phi(ab) = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k+ia} e^{ikb} = -e^{ab} Ei(-ab).$$

Определим функцию  $G(ab)$  :

$$G(ab) = \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k+ia} e^{ikb} + \int_0^{+\infty} \frac{dk}{k-ia} e^{ikb} = \Phi(ab) + \Phi(-ab).$$

Разложение интегральной показательной функции  $Ei$  для вещественного  $x > 0$  (здесь  $\gamma$  – постоянная Эйлера):

$$\begin{aligned} -Ei(-x) &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_x^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{k-1}}{k!} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \log t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k \cdot k!} \right] - \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot k!} = -\gamma - \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot k!}. \end{aligned}$$

В пределе  $x \rightarrow 0$  получим логарифмическую расходимость и следующее приближение:

$$-Ei(-x) \approx -\gamma - \log x.$$

В случае комплексного  $x$  в рассматриваемом пределе разложение для функций  $G(ax)$  и  $\Phi(ax)$  можно получить аналогично, при этом для функции  $G(ax)$  мнимые части взаимно сократятся.

$$\Phi(ax) \approx -\gamma - \log |ax| - i \arg(ax),$$

$$G(ax) \approx -2\gamma - 2 \log a - 2 \log x.$$

Вспомогательные соотношения:

$$\frac{k}{(k-a)(k+a)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k+a} + \frac{1}{k-a} \right);$$

$$\frac{k^3}{(k-a)^2(k+a)^2} = \frac{a}{4(k-a)^2} - \frac{a}{4(k+a)^2} + \frac{1}{2(k-a)} + \frac{1}{2(k+a)};$$

$$\frac{k^2}{(k-a)^2(k+a)} = \frac{a}{2(k-a)^2} + \frac{3}{4(k-a)} + \frac{1}{4(k+a)};$$

$$\frac{k^2}{(k+a)^2(k-a)} = \frac{-a}{2(k+a)^2} + \frac{3}{4(k+a)} + \frac{1}{4(k-a)};$$

$$\begin{aligned} \tau_u - z(\tau_u) &= u; & \tau_v + z(\tau_v) &= v; \\ \tau'_u &= \frac{1}{1 + \beta(\tau_u)} = \frac{1}{1 + \beta_u}; & \tau'_v &= \frac{1}{1 - \beta(\tau_v)} = \frac{1}{1 - \beta_v}; \\ \tau''_u &= -\frac{\beta'_u}{(1 + \beta_u)^3}; & \tau''_v &= \frac{\beta'_v}{(1 - \beta_v)^3}; \\ (2\tau_u - u)' &= \frac{1 - \beta_u}{1 + \beta_u}; & (2\tau_v - v)' &= \frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v}; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0.$$

Вспомогательные интегралы:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dk \frac{e^{ikb}}{(k+ia)^2} = \lim_{b \rightarrow 0} \left[ -\frac{e^{ikb}}{k+ia} \Big|_0^{+\infty} + ib \int_0^{+\infty} dk \frac{e^{ikb}}{(k+ia)} \right] = \frac{1}{ia};$$

$$\int_0^{+\infty} dpe^{ipx} = \frac{i}{x+i\epsilon} = \frac{-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} + \frac{x}{x^2+\epsilon^2} = -i\pi\delta(x) + P\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dpe^{ipx} = 2\pi\delta(x).$$

## 2.5 Вакуумное среднее ТЭИ

В этом параграфе будет вычислено квантовое среднее смешанной компоненты тензора энергии-импульса. Данная величина позволяет судить о наличии излучения и поведении скалярного поля в пространстве вне зеркала. Наличие ненулевого потока энергии будет означать наличие излучения. По аналогии с задачей идеального зеркала ожидается, что поток энергии будет генерироваться на самом зеркале (т.е. при непосредственном взаимодействии квантов поля с зеркалом) и распространяться в направлении вправо и влево от зеркала. Также ожидается зануление потока энергии при движении зеркала без ускорения. Качественно наличие излучения при движении с непостоянной скоростью можно объяснить тем, что нетривиальное движение зеркала (требующее затрат энергии двигателя) возбуждает уровни энергии квантованного поля, генерируя

поток энергии (в общем случае не делящийся на отдельные частицы). Отметим, что после включения самодействия вакуумное среднее ТЭИ будет являться древесным приближением к пропагатору Келдыша, подробнее об этом будет сказано в 3.1. Подробнее о свойствах и методах вычисления вакуумного среднего ТЭИ [34] - [36].

В общем случае вакуумное среднее ТЭИ - расходящаяся величина, поэтому для регуляризации используется метод раздвижки точек: к сопряженным величинам добавляется поправка к временной координате  $t \rightarrow t + i\epsilon$ , позволяющая избежать суммирования полей в совпадающих точках. Усреднение производится по вакуумному состоянию  $|0\rangle$ , которое аннигилируется всеми операторами уничтожения  $a_k|0\rangle = 0$  (т.е. для любого  $k$ ), тогда  $\langle 0|a_k a_{k'}^\dagger|0\rangle = 2\pi\delta(k - k')$ :

$$\langle T_{tx} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \partial_t \varphi(t, x) \partial_x \varphi(t + i\epsilon, x) + \partial_x \varphi(t, x) \partial_t \varphi(t + i\epsilon, x) \rangle.$$

Для вычисления вакуумного среднего ТЭИ выпишем выражения для мод и их производных. Напомним, как выглядят моды:

$$g_k(u, v) = \theta(k) \left\{ e^{-iku} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] + \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] \right\} + \\ + \theta(-k) \left\{ e^{ikv} + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \theta[z(\tau_v) - x] + \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \theta[x - z(\tau_u)] \right\}.$$

Правило дифференцирования тета-функций дает следующие результаты:

$$\partial_t [x - z(\tau_u)] = \frac{\beta_u}{1 + \beta_u} \delta[x - z(\tau_u)]; \quad \partial_x [x - z(\tau_u)] = \frac{1}{1 + \beta_u} \delta[x - z(\tau_u)]; \\ \partial_t [z(\tau_v) - x] = -\frac{\beta_v}{1 - \beta_v} \delta[z(\tau_v) - x]; \quad \partial_x [z(\tau_v) - x] = -\frac{1}{1 - \beta_v} \delta[z(\tau_v) - x].$$

Прямым дифференцированием получим следующие выражения для производных мод:

$$\partial_t g_k(t, x) = \theta(k) \left\{ (-ik) \left[ e^{-iku} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta[t - \tau_u] + \frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta[t - \tau_v] \right] - \right. \\ - \frac{\alpha 2ik\beta'_u}{[2ik(1 + \beta_u) - \alpha]^2 (1 + \beta_u)} e^{-iku} \theta[t - \tau_u] - \frac{\alpha 2ik\beta'_v}{[2ik(1 + \beta_v) - \alpha]^2 (1 - \beta_v)} e^{-ik(2\tau_v - v)} \theta[t - \tau_v] + \\ \left. + \frac{\beta_u}{1 + \beta_u} \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \delta[t - \tau_u] - \frac{\beta_v}{1 - \beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \delta[t - \tau_v] \right\} + \\ + \theta(-k) \left\{ ik \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \theta[t - \tau_v] + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \theta[t - \tau_u] \right] + \right. \\ + \frac{\alpha 2ik\beta'_v}{[2ik(1 - \beta_v) + \alpha]^2 (1 - \beta_v)} e^{ikv} \theta[t - \tau_v] + \frac{\alpha 2ik\beta'_u}{[2ik(1 - \beta_u) + \alpha]^2 (1 + \beta_u)} e^{ik(2\tau_u - u)} \theta[t - \tau_u] - \\ \left. - \frac{\beta_v}{1 - \beta_v} \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \delta[t - \tau_v] + \frac{\beta_u}{1 + \beta_u} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \delta[t - \tau_u] \right\};$$

$$\begin{aligned}
\partial_x g_k^*(t+i\epsilon, x) = & \theta(k) \left\{ -ik \left[ e^{iku_\epsilon} + \frac{-\alpha e^{iku_\epsilon}}{2ik(1+\beta_u^\epsilon) + \alpha} \theta[t - \tau_u] - \frac{1 + \beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)}}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} \theta[t - \tau_v] \right] - \right. \\
& - \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha]^2(1 + \beta_u^\epsilon)} e^{iku_\epsilon} \theta[t - \tau_u] + \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)} \theta[t - \tau_v] + \\
& \left. + \frac{1}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{-\alpha e^{iku_\epsilon}}{2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_u^\epsilon] - \frac{1}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)}}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_v^\epsilon] \right\} + \\
& + \theta(-k) \left\{ (-ik) \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{\alpha e^{-ikv_\epsilon}}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} \theta[t - \tau_v] - \frac{1 - \beta_u^\epsilon}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)}}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha} \theta[t - \tau_u] \right] + \right. \\
& - \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_v) - \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{-ikv_\epsilon} \theta[t - \tau_v] + \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha]^2(1 + \beta_u^\epsilon)} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)} \theta[t - \tau_u] + \\
& \left. - \frac{1}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{\alpha e^{-ikv_\epsilon}}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_v^\epsilon] + \frac{1}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)}}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_u^\epsilon] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x g_k(t, x) = & \theta(k) \left\{ ik \left[ e^{-iku} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta[t - \tau_u] - \frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta[t - \tau_v] \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha 2ik\beta_u'}{[2ik(1 + \beta_u) - \alpha]^2(1 + \beta_u)} e^{-iku} \theta[t - \tau_u] - \frac{\alpha 2ik\beta_v'}{[2ik(1 + \beta_v) - \alpha]^2(1 - \beta_v)} e^{-ik(2\tau_v - v)} \theta[t - \tau_v] + \\
& \left. + \frac{1}{1 + \beta_u} \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \delta[t - \tau_u] - \frac{1}{1 - \beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \delta[t - \tau_v] \right\} + \\
& + \theta(-k) \left\{ ik \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} e^{ikv} \theta[t - \tau_v] - \frac{1 - \beta_u}{1 + \beta_u} \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} e^{ik(2\tau_u - u)} \theta[t - \tau_u] \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha 2ik\beta_v'}{[2ik(1 - \beta_v) + \alpha]^2(1 - \beta_v)} e^{ikv} \theta[t - \tau_v] - \frac{\alpha 2ik\beta_u'}{[2ik(1 - \beta_u) + \alpha]^2(1 + \beta_u)} e^{ik(2\tau_u - u)} \theta[t - \tau_u] + \\
& \left. - \frac{1}{1 - \beta_v} \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \delta[t - \tau_v] + \frac{1}{1 + \beta_u} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \delta[t - \tau_u] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t g_k^*(t+i\epsilon, x) = & \theta(k) \left\{ ik \left[ e^{iku_\epsilon} + \frac{-\alpha e^{iku_\epsilon}}{2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha} \theta[t - \tau_u] + \frac{1 + \beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)}}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} \theta[t - \tau_v] \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha]^2(1 + \beta_u^\epsilon)} e^{iku_\epsilon} \theta[t - \tau_u] + \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)} \theta[t - \tau_v] +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_u^\epsilon}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{-\alpha e^{iku_\epsilon}}{2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_u^\epsilon] - \frac{\beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v^\epsilon)}}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_v^\epsilon] \Big\} + \\
& + \theta(-k) \Big\{ (-ik) \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{\alpha e^{-ikv_\epsilon}}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} \theta[t - \tau_v] + \frac{1 - \beta_\epsilon}{1 + \beta_\epsilon} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)}}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha} \theta[t - \tau_u] \right] - \\
& - \frac{\alpha 2ik \beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha]^2 (1 - \beta_v^\epsilon)} e^{-ikv} \theta[t - \tau_v] - \frac{\alpha 2ik \beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha]^2 (1 + \beta_u^\epsilon)} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)} \theta[t - \tau_u] + \\
& - \frac{\beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{\alpha e^{-ikv_\epsilon}}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_v^\epsilon] + \frac{\beta_u^\epsilon}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)}}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) + \alpha} \delta[t + i\epsilon - \tau_u^\epsilon] \Big\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что полученные при дифференцировании  $\delta$ -функции не равны нулю только в точках на самом зеркале (при  $x = z(\tau_u)$  или  $x = z(\tau_v)$ ). Поскольку поток энергии-импульса может быть только вне зеркала, все члены с дельта-функциями могут быть опущены в вычислении вакуумного среднего  $T_{tx}$ . Прямой подстановкой производных и учетом того факта, что  $\theta[x - z(\tau_u)]\theta[z(\tau_v) - x] = 0$ , получим, что вычисление сводится к следующему пределу:

$$\begin{aligned}
\langle T_{tx} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 [\partial_t g_k(t, x) \partial_x g_k^*(t + i\epsilon, x) + \partial_x g_k(t, x) \partial_t g_k^*(t + i\epsilon, x)] = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int \frac{dk}{4\pi} (-k) \theta(k) \Big\{ \theta[+] \Big\{ \left[ e^{-iku} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} - \frac{\alpha 2ik \beta_u'}{[2ik(1 + \beta_u) - \alpha]^2 (1 + \beta_u)} e^{-iku} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ e^{iku_\epsilon} + \frac{-\alpha}{2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha} e^{iku_\epsilon} - \frac{\alpha 2ik \beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha]^2 (1 + \beta_u^\epsilon)} e^{iku_\epsilon} \right] + \\
&\quad + \left[ e^{-iku} + \frac{\alpha}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} e^{-iku} + \frac{\alpha 2ik \beta_u'}{[2ik(1 + \beta_u) - \alpha]^2 (1 + \beta_u)} e^{-iku} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ e^{iku_\epsilon} + \frac{-\alpha e^{iku_\epsilon}}{2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha} + \frac{\alpha 2ik \beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_u^\epsilon) + \alpha]^2 (1 + \beta_u^\epsilon)} e^{iku_\epsilon} \right] \Big\} + \\
&\quad + \theta[-] \Big\{ \left[ e^{-iku} + \frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} - \frac{\alpha 2ik \beta_v'}{[2ik(1 + \beta_v) - \alpha]^2 (1 - \beta_v)} e^{-ik(2\tau_v - v)} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ e^{iku_\epsilon} - \frac{1 + \beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)} + \frac{\alpha 2ik \beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha]^2 (1 - \beta_v^\epsilon)} e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)} \right] + \\
&\quad + \left[ e^{-iku} - \frac{1 + \beta_v}{1 - \beta_v} \frac{\alpha}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} e^{-ik(2\tau_v - v)} - \frac{\alpha 2ik \beta_v'}{[2ik(1 + \beta_v) - \alpha]^2 (1 - \beta_v)} e^{-ik(2\tau_v - v)} \right] \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ e^{iku_\epsilon} + \frac{1 + \beta_v^\epsilon}{1 - \beta_v^\epsilon} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)}}{2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha} + \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 + \beta_v^\epsilon) + \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{ik(2\tau_v^\epsilon - v_\epsilon)} \right] \Bigg\} + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int \frac{dk}{4\pi} (-k)\theta(-k) \left[ \theta[+] \left\{ \left[ e^{ikv} + \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} + \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon e^{ik(2\tau_u - u)}}{[2ik(1 - \beta_u) + \alpha]^2(1 + \beta_u)} \right] \right. \right. \\
& \cdot \left[ e^{-ikv_\epsilon} - \frac{1 - \beta_u^\epsilon}{1 + \beta_u^\epsilon} \frac{\alpha}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)} + \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha]^2(1 + \beta_u^\epsilon)} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)} \right] + \\
& + \left[ e^{ikv} - \frac{1 - \beta_u}{1 + \beta_u} \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} e^{ik(2\tau_u - u)} - \frac{\alpha 2ik\beta_u'}{[2ik(1 - \beta_u) + \alpha]^2(1 + \beta_u)} e^{ik(2\tau_u - u)} \right] \cdot \\
& \cdot \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{1 - \beta_\epsilon}{1 + \beta_\epsilon} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)}}{2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha} - \frac{\alpha 2ik\beta_u'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_u^\epsilon) - \alpha]^2(1 + \beta_u^\epsilon)} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon - u_\epsilon)} \right] + \\
& + \theta[-] \left\{ \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} + \frac{\alpha 2ik\beta_v'}{[2ik(1 - \beta_v) + \alpha]^2(1 - \beta_v)} e^{ikv} \right] \right. \\
& \cdot \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{\alpha}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} e^{-ikv_\epsilon} - \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{-ikv_\epsilon} \right] + \\
& + \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} e^{ikv} + \frac{\alpha 2ik\beta_v'}{[2ik(1 - \beta_v) + \alpha]^2(1 - \beta_v)} e^{ikv} \right] \cdot \\
& \cdot \left. \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{\alpha e^{-ikv_\epsilon}}{2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha} - \frac{\alpha 2ik\beta_v'^\epsilon}{[2ik(1 - \beta_v^\epsilon) - \alpha]^2(1 - \beta_v^\epsilon)} e^{-ikv_\epsilon} \right] \right\} = \dots
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем для удобства введены обозначения  $f(v) = 2\tau_v - v$ ,  $f(u) = 2\tau_u - u$ . Аргументы в записи этих функций будут опускаться. Индекс  $\epsilon$  означает сдвигу по времени на  $i\epsilon$  в аргументе. Заметим, что все интегралы, содержащие только экспоненту и тета-функцию, сокращают друг друга (первые члены из каждой квадратной скобки). Результаты расчетов также показывают, что во всех интегралах параметр  $\epsilon$  входит лишь как множитель, давая логарифмическую расходимость. Это значит, что во всех предэкспонентах параметр  $\epsilon$  можно положить равным нулю, он будет важен лишь в показателях экспоненты в разнице  $f_\epsilon(u) - f(u)$  или  $f_\epsilon(v) - f(v)$ . В связи с этим получим следующее выражение (все нетривиальные интегралы, вычисление которых будет проведено далее, показаны пронумерованными стрелками):

$$\dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dk}{4\pi} (-k)\theta(k) \left[ \theta[+] \left\{ \underbrace{\left[ e^{-iku} + \frac{\alpha e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \right]}_1 - \underbrace{\left[ \frac{\alpha 2ik\beta_u'}{[2ik(1 + \beta_u) - \alpha]^2(1 + \beta_u)} e^{-iku} \right]}_2 \right\} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ \overbrace{e^{iku_\epsilon} + \frac{-\alpha}{2ik(1+\beta_u) + \alpha} e^{iku_\epsilon}}^1 - \overbrace{\frac{\alpha 2ik\beta'_u{}^\epsilon}{[2ik(1+\beta_u) + \alpha]^2(1+\beta'_u)} e^{iku_\epsilon}}^2 \right] + \\
& + \theta[-] \left\{ \left[ \overbrace{\frac{1+\beta_v}{1-\beta_v} \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v-v)}}{2ik(1+\beta_v) - \alpha}}^3 - \overbrace{\frac{\alpha 2ik\beta'_v}{[2ik(1+\beta_v) - \alpha]^2(1-\beta_v)} e^{-ik(2\tau_v-v)}}^4 \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[ -\overbrace{\frac{1+\beta_v}{1-\beta_v} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_v^\epsilon-v_\epsilon)}}{2ik(1+\beta_v) + \alpha}}^3 + \overbrace{\frac{\alpha 2ik\beta'_v e^{ik(2\tau_v^\epsilon-v_\epsilon)}}{[2ik(1+\beta_v) + \alpha]^2(1-\beta_v)}}^4 \right] + \\
& + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dk}{4\pi} (-k) \theta(-k) \left[ \theta[+] \left\{ \left[ \overbrace{\frac{1-\beta_u}{1+\beta_u} \frac{-\alpha e^{ik(2\tau_u-u)}}{2ik(1-\beta_u) + \alpha}}^{5,7+8} + \overbrace{\frac{\alpha 2ik\beta'_u e^{ik(2\tau_u-u)}}{[2ik(1-\beta_u) + \alpha]^2(1+\beta_u)}}^{7+8,6}} \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[ -\overbrace{\frac{1-\beta_u}{1+\beta_u} \frac{\alpha}{2ik(1-\beta_u) - \alpha} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon-u_\epsilon)}}^{5,7+8} + \overbrace{\frac{\alpha 2ik\beta'_u}{[2ik(1-\beta_u) - \alpha]^2(1+\beta_u)} e^{-ik(2\tau_u^\epsilon-u_\epsilon)}}^{7+8,6} \right] + \\
& + \theta[-] \left\{ \left[ e^{ikv} + \frac{-\alpha e^{ikv}}{2ik(1-\beta_v) + \alpha} + \frac{\alpha 2ik\beta'_v}{[2ik(1-\beta_v) + \alpha]^2(1-\beta_v)} e^{ikv} \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[ e^{-ikv_\epsilon} + \frac{\alpha}{2ik(1-\beta_v) - \alpha} e^{-ikv_\epsilon} - \frac{\alpha 2ik\beta'_v}{[2ik(1-\beta_v) - \alpha]^2(1-\beta_v)} e^{-ikv_\epsilon} \right] = \dots
\end{aligned}$$

С учетом перечисленных упрощений посчитаем все входящие в выражение интегралы.

1. Вычисление интеграла (1). Для удобства записи введем следующее обозначение:  $a = \frac{\alpha}{2i(1+\beta_u)}$ .

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \theta[+] \frac{a^2}{2} e^{-k\epsilon} \left[ \frac{k}{k-a} + \frac{k}{k+a} \right] = \\
&= -\frac{\theta[+]}{8\pi} \left[ \frac{\alpha}{2i(1+\beta_u)} \right]^2 \left[ \int_0^{+\infty} \frac{dke^{-k\epsilon}}{k + \frac{i\alpha}{2(1+\beta_u)}} + \int_0^{+\infty} \frac{dke^{-k\epsilon}}{k - \frac{i\alpha}{2(1+\beta_u)}} \right] = \\
&= \theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2}{32\pi(1+\beta_u)^2} G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1+\beta_u)} \right].
\end{aligned}$$

2. Интеграл (2) вычисляется так же, как и интеграл (4), для него приведем ответ.

$$I_2 = \theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2 \beta_u'^2}{32\pi(1 + \beta_u)^6} \left( G \left[ \frac{\alpha \epsilon}{2(1 + \beta_u)} \right] - 1 \right).$$

3. Вычисление интеграла (3).

$$\begin{aligned} I_3 &= \theta[-] \int_0^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \frac{k\alpha^2 e^{ik(f_\epsilon - f)}}{(1 - \beta_v)^2 \cdot 4 \left[ k - \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right] \left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]} = \\ &= \theta[-] \int_0^{+\infty} \frac{dk}{16\pi} \frac{\alpha^2}{(1 - \beta_v)^2} \left\{ \frac{e^{ik(f_\epsilon - f)}}{\left[ k - \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]} + \frac{e^{ik(f_\epsilon - f)}}{\left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]} \right\} = \\ &= \theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2}{32\pi(1 - \beta_v)^2} G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 + \beta_v)} \right). \end{aligned}$$

4. Вычисление интеграла 4. Введено следующее обозначение:  $\left[ a = \frac{\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]$ .

$$\begin{aligned} I_4 &= \theta[-] \int_0^{+\infty} \frac{dk}{4\pi} \frac{\alpha^2 \beta_v'^2}{(-4)(1 + \beta_v)^4(1 - \beta_v)^2} \frac{k e^{ik(f_\epsilon - f)}}{\left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]^2 \left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]^2} = \\ &= \theta[-] \int_0^{+\infty} \frac{dk}{16\pi} \frac{-\alpha^2 \beta_v'^2}{(1 + \beta_v)^4(1 - \beta_v)^2} e^{ik(f_\epsilon - f)} \left[ \frac{k^3}{\left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]^2 \left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 + \beta_v)} \right]^2} \right] = \\ &= \theta[-] \int_0^{+\infty} \frac{dk}{32\pi} \frac{-\alpha^2 \beta_v'^2}{(1 + \beta_v)^4(1 - \beta_v)^2} e^{ik(f_\epsilon - f)} \cdot \left\{ \frac{ia}{2(k - ia)^2} - \frac{ia}{2(k + ia)^2} + \frac{1}{k - ia} + \frac{1}{k + ia} \right\} = \\ &= \theta[z(\tau_v) - v] \frac{\alpha^2 \beta_v'^2}{32\pi(1 + \beta_v)^4(1 - \beta_v)^2} \left[ 1 - G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 + \beta_v)} \right) \right]. \end{aligned}$$

5. Вычисление интеграла 5.

$$\begin{aligned} I_5 &= \theta[+] \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{4\pi} \frac{\alpha^2}{4(1 + \beta_u)^2} e^{ik(f - f_\epsilon)} \frac{k}{\left[ k - \frac{i\alpha}{2(1 - \beta_u)} \right] \left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 - \beta_u)} \right]} = \\ &= -\theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2}{32\pi(1 + \beta_u)^2} G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right). \end{aligned}$$

6. Вычисление интеграла 6.

$$\begin{aligned} I_6 &= \theta[+] \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{4\pi} \frac{\alpha^2 \beta_u'^2}{-4(1 - \beta_u)^4(1 + \beta_u)^2} e^{ik(f - f_\epsilon)} \frac{-k^3}{\left[ k - \frac{i\alpha}{2(1 - \beta_u)} \right]^2 \left[ k + \frac{i\alpha}{2(1 - \beta_u)} \right]^2} = \\ &= \theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2 \beta_u'^2}{32\pi(1 - \beta_u)^4(1 + \beta_u)^2} \left[ 1 - G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right) \right]. \end{aligned}$$

7. Вычисление суммы интегралов 7 и 8  $\left[ a = \frac{\alpha}{2(1 - \beta_u)} \right]$ .

$$I_7 + I_8 = \theta[+] \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha^2 \beta_u' e^{ik(f - f_\epsilon)}}{(-4)(1 - \beta_u)^2(1 + \beta_u)^2} \left[ \frac{ia}{2(k - ia)^2} - \frac{ia}{2(k + ia)^2} + \frac{1}{k + ia} + \frac{1}{k - ia} \right] =$$

$$= \theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2 \beta'_u}{16\pi(1 - \beta_u)^2(1 + \beta_u)^2} \left[ G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right) - 1 \right].$$

8. Вычисление оставшихся интегралов (9), (10)+(11), (12), (13)+(14).

$$I_9 = -\theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2}{32\pi(1 - \beta_v)^2} G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right];$$

$$I_{10} + I_{11} = \theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2 \beta'_v}{16\pi(1 - \beta_v)^4} \left( 1 - G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] \right);$$

$$I_{12} = \theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2 \beta_v'^2}{32\pi(1 - \beta_v)^6} \left( G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] - 1 \right);$$

$$I_{13} + I_{14} = \theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2 \beta'_v}{8\pi(1 - \beta_v)^4} \left( G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] - 1 \right).$$

Таким образом, получим следующее выражение для  $\langle T_{tx} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle T_{tx} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta[x - z(\tau_u)] \left\{ \frac{\alpha^2}{32\pi(1 + \beta_u)^2} G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 + \beta_u)} \right] + \frac{\alpha^2 \beta_u'^2}{32\pi(1 + \beta_u)^6} \left( G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 + \beta_u)} \right] - 1 \right) - \right. \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{32\pi(1 + \beta_u)^2} G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right) + \frac{\alpha^2 \beta_u'^2}{32\pi(1 - \beta_u)^4(1 + \beta_u)^2} \left[ 1 - G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{\alpha^2 \beta'_u}{16\pi(1 - \beta_u)^2(1 + \beta_u)^2} \left[ G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 - \beta_u)} \right) - 1 \right] \left. \right\} + \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta[z(\tau_v) - x] \left\{ \frac{\alpha^2}{32\pi(1 - \beta_v)^2} G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 + \beta_v)} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha^2 \beta_v'^2}{32\pi(1 + \beta_v)^4(1 - \beta_v)^2} \left[ 1 - G \left( \frac{\alpha[f_\epsilon - f]}{2(1 + \beta_v)} \right) \right] - \frac{\alpha^2}{32\pi(1 - \beta_v)^2} G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] + \\ &\quad + \frac{\alpha^2 \beta'_v}{16\pi(1 - \beta_v)^4} \left( G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] - 1 \right) + \frac{\alpha^2 \beta_v'^2}{32\pi(1 - \beta_v)^6} \left( G \left[ \frac{\alpha\epsilon}{2(1 - \beta_v)} \right] - 1 \right) \left. \right\} = \\ &= \frac{\alpha^2 \theta[x - z(\tau_u)]}{32\pi(1 + \beta_u)^2} \left[ 1 + 2\gamma + 2 \log \frac{\alpha}{2(1 + \beta_u)} + 2 \log \epsilon \right] \left\{ \frac{\beta_u'^2}{(1 - \beta_u)^4} - \frac{\beta_u'^2}{(1 + \beta_u)^4} - \frac{2\beta'_u}{(1 - \beta_u)^2} \right\} + \\ &\quad + \frac{\alpha^2 \theta[z(\tau_v) - x]}{32\pi(1 - \beta_v)^2} \left[ 1 + 2\gamma + 2 \log \frac{\alpha}{2(1 - \beta_v)} + 2 \log \epsilon \right] \left\{ \frac{\beta_v'^2}{(1 + \beta_v)^4} - \frac{\beta_v'^2}{(1 - \beta_v)^4} - \frac{2\beta'_v}{(1 - \beta_v)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим свойства конечной части вакуумного среднего ТЭИ:

$$\begin{aligned} \langle T_{tx} \rangle &= \theta[x - z(\tau_u)] \frac{\alpha^2}{32\pi(1 + \beta_u)^2} \left[ 1 + 2\gamma + 2 \log \frac{\alpha}{2(1 + \beta_u)} \right] \left\{ \frac{\beta_u'^2}{(1 - \beta_u)^4} - \frac{\beta_u'^2}{(1 + \beta_u)^4} - \frac{2\beta'_u}{(1 - \beta_u)^2} \right\} + \\ &\quad + \theta[z(\tau_v) - x] \frac{\alpha^2}{32\pi(1 - \beta_v)^2} \left[ 1 + 2\gamma + 2 \log \frac{\alpha}{2(1 - \beta_v)} \right] \left\{ \frac{\beta_v'^2}{(1 + \beta_v)^4} - \frac{\beta_v'^2}{(1 - \beta_v)^4} - \frac{2\beta'_v}{(1 - \beta_v)^2} \right\}; \end{aligned}$$

1. состоит из двух частей: потока, распространяющегося вправо от зеркала из точки  $x = z(\tau_u)$ , и потока, распространяющегося влево от зеркала из точки  $x = z(\tau_v)$ ;
2. излучение генерируется на самом зеркале;
3. в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  (т.е. при отсутствии зеркала) поток зануляется;

4. поток равен нулю, если зеркало движется с постоянной скоростью.
5. вычислением, аналогичным проведенному в 2.3, можно показать ненулевой поток энергии-импульса при равноускоренном движении зеркала (в отличие от случая идеального зеркала, в котором данный поток равен нулю).

На Рис.2.1 синим цветом показан поток энергии-импульса, распространяющийся вправо от зеркала из точки  $x = z(\tau_u)$  (существует только справа от зеркала), а красным цветом показан поток излучения, распространяющийся влево от зеркала из точки  $x = z(\tau_v)$  (существует только слева от зеркала).

### 3 Теория с взаимодействием: техника Келдыша

#### 3.1 Связь вакуумного среднего ТЭИ и пропагатора Келдыша

Оценив поток энергии-импульса в древесном приближении, включим самодействие поля и посчитаем квантовые поправки к полученной величине. Как показано в работе [24] смешанная компонента ТЭИ выражается через пропагатор Келдыша следующим образом

$$\langle T_{tx} \rangle = \partial_{t_x} \partial_{y} G^K(x, y) \Big|_{\underline{x}=\underline{y}},$$

$$G^K(\underline{x}, \underline{y}) \equiv \frac{1}{2} \langle \{ \varphi(\underline{x}), \varphi(\underline{y}) \} \rangle, \quad (9)$$

здесь  $G^K$  – пропагатор Келдыша,  $\{, \}$  - антикоммутатор. Понятно, что петлевые поправки к потоку энергии - это поправки к пропагатору Келдыша, которые и будут посчитаны в этой части. Ниже для справки приведен краткий обзор используемой диаграммной техники.

В представлении взаимодействия верны следующие соотношения для точных пропагаторов:

$$iG_{12}^{--} = \langle S^{-1} T[\varphi_1 \varphi_2 S] \rangle,$$

где в рассматриваемой задаче

$$S = T \exp \left( -i \frac{\lambda}{4!} \int \int dt dx [\varphi(t, x)]^4 \right).$$

Для нестационарной системы имеем 4 типа затравочных пропагаторов:

$$iG_{12}^{--} = \langle T \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \theta(t_1 - t_2) \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle \varphi_2 \varphi_1 \rangle;$$

$$iG_{12}^{++} = \langle \tilde{T} \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \theta(t_2 - t_1) \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle + \theta(t_1 - t_2) \langle \varphi_2 \varphi_1 \rangle;$$

$$iG_{12}^{+-} = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle; \quad iG_{12}^{-+} = \langle \varphi_2 \varphi_1 \rangle;$$

со следующими свойствами

$$G^{--} + G^{++} = G^{-+} + G^{+-}; \quad G_{12}^{--} = G_{21}^{--};$$

$$G_{12}^{++} = G_{21}^{++}; \quad G_{12}^{+-} = G_{21}^{+-}.$$

В технике Келдыша знаки + и – показывают, разложением какого оператора эволюции получены входящие в пропагатор операторы  $\varphi$ -поля: из анти-Т-упорядоченной части (т.е. из  $S^{-1}$ ) или из Т-упорядоченной части (т.е. из  $S$ ). Поправка соответствующего порядка получается суммированием по всем возможным комбинациям плюсов и минусов. Пропагатор Келдыша в терминах  $\pm$ -пропагаторов - это следующая сумма:

$$G^K = \frac{1}{2} [G_{12}^{--} + G_{12}^{++}].$$

Значит, поправка к пропагатору Келдыша может быть записана следующим образом:

$$\Delta G_{12}^K = \frac{1}{2}(\Delta G_{12}^{++} + \Delta G_{12}^{--});$$

где все нетривиальные вклады могут быть записаны в число заполнения  $n_{kk'}$  и аномальное квантовое среднее  $\kappa_{kk'}$ :

$$\Delta G_{12}^K = \int \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} [n_{kk'} g_{kx}^* g_{k'y} + \kappa_{kk'} g_{kx} g_{k'y} + h.c.].$$

В данной работе рассмотрены поправки второго порядка по константе  $\lambda$ . Также рассмотрен предел больших времен  $\frac{t_x+t_y}{2} = T \rightarrow \infty$ , в котором разница времен будет фиксирована  $|t_x - t_y| = const$ . В данном пределе для конкретного типа двухпетлевых диаграмм – диаграмм типа "заходящее солнце" (именно в них ожидается и наблюдается секулярный рост, для деталей см. [24], вычисление поправок приведено в следующем параграфе):

$$n_{kk'} \approx \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz} \right]^3 \theta(T - t_z) \theta(T - t_w); \quad (10)$$

$$\kappa_{kk'} \approx -\frac{\lambda^2}{6} \int \int d^2 Z d^2 W \theta(T - t_z) \theta(t_z - t_w) \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz} \right]^3 \{ [A_k^2 g_{kz}^*] [A_{k'}^2 g_{k'w}] + [A_k^2 g_{kw}^*] [A_{k'}^2 g_{k'z}^*] \}. \quad (11)$$

Также мы рассматриваем конкретный тип движения зеркала - зеркало, выходящее на постоянную, не световую скорость:

$$z(t) = \theta(t) [-\beta t + a(1 - e^{-t/a})]. \quad (12)$$

Именно для данной траектории (в пределе  $\beta \rightarrow 1$ ) в задаче идеального зеркала был наден поток ТЭИ, совпадающий по форме с излучением Хокинга. Есть надежда, что и в данной задаче связь с потоком Хокинга в окрестности черныж дыр будет обнаружена.

Для данной траектории с учетом всех приближений посчитаем число заполнения и аномальное квантовое среднее.

### 3.2 Общие формулы для поправки второго порядка к пропагатору Келдыша

Проверим полученные в [24] формулы для поправок второго порядка для диаграмм типа "заходящее солнце". Для данного типа диаграмм получим следующее приближение:

$$\begin{aligned} \Delta G_{12}^K = & \frac{\lambda^2}{12} \int d^2 z d^2 w \{ -[\theta(t_x - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx}^* g_{kz} + \theta(t_z - t_x) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kx}] \cdot \\ & \cdot [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw}^* g_{kz}]^3 [\theta(t_w - t_y) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw}^* g_{ky} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\theta(t_y - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky}^* g_{kw} - [\theta(t_x - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx} g_{kz}^* + \theta(t_z - t_x) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kx}^*] \cdot \\
& \quad \cdot [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kw}^* + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{kz}^*]^3 \cdot \\
& \quad \cdot [\theta(t_w - t_y) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{ky}^* + \theta(t_y - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky} g_{kw}^*] - \\
& - [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx}^* g_{kz}] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw}^* g_{kz}]^3 [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{ky}^*] - \\
& - [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx} g_{kz}^*] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kw}^* + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{kz}^*]^3 [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky} g_{kw}^*] + \\
& + [\theta(t_x - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx}^* g_{kz} + \theta(t_z - t_x) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kx}] [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw}^* g_{kz}]^3 [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky} g_{kw}^*] + \\
& + [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kx}] [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz}^* g_{kw}]^3 [\theta(t_w - t_y) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw}^* g_{ky} + \theta(t_y - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky}^* g_{kw}] + \\
& + [\theta(t_x - t_z) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kx} g_{kz}^* + \theta(t_z - t_x) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kx}^*] [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{kz}^*]^3 [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{ky}^*] + \\
& + [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kx}^*] [\int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kz} g_{kw}^*]^3 [\theta(t_w - t_y) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{kw} g_{ky}^* + \theta(t_y - t_w) \int \frac{dk}{2\pi} A_k^2 g_{ky} g_{kw}^*] \} \longrightarrow \\
& \Delta G_{12}^K = \int \int \frac{dk}{2\pi} \frac{dk'}{2\pi} [n_{kk'} g_{kx}^* g_{k'y} + \kappa_{kk'} g_{kx} g_{k'y} + h.c.].
\end{aligned}$$

Найдём выражение для числа заполнения:

$$\begin{aligned}
n_{kk'} &= \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W \{ [\theta(t_x - t_z) A_k^2 g_{kz}] [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] + \\
& \quad + [A_k^2 g_{kz}] [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz} g_{pw}^*]^3 [\theta(t_y - t_w) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] - \\
& - [\theta(t_x - t_z) A_k^2 g_{kz}] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 [\theta(t_w - t_y) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] - \\
& - [\theta(t_z - t_x) A_k^2 g_{kz}] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz} g_{pw}^* + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw} g_{pz}^*]^3 [\theta(t_y - t_w) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \} = \\
& = \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \{ [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 [\theta(t_x - t_z) + \theta(t_y - t_w) - \\
& \quad - \theta(t_x - t_z) \theta(t_w - t_z) \theta(t_w - t_y) - \theta(t_z - t_x) \theta(t_z - t_w) \theta(t_y - t_w)] - \\
& - [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw}]^3 [\theta(t_x - t_z) \theta(t_z - t_w) \theta(t_w - t_y) + \theta(t_z - t_x) \theta(t_w - t_z) \theta(t_y - t_w)] \} \approx \\
& \approx \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 [\theta(T - t_z) + \theta(T - t_w)] \longrightarrow \\
n_{kk'} &\approx \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 \theta(T - t_z) \theta(T - t_w).
\end{aligned}$$

А для аномального квантового среднего получим следующее выражение:

$$\kappa_{kk'} = \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W \{ [\theta(t_z - t_x) A_k^2 g_{kz}^*] [\int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}]^3 [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] +$$

$$\begin{aligned}
& + [A_k^2 g_{kz}^*] \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw} \right]^3 [\theta(t_w - t_y) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] - \\
& - [\theta(t_z - t_x) A_k^2 g_{kz}^*] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^*]^3 [\theta(t_w - t_y) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] - \\
& - [\theta(t_x - t_z) A_k^2 g_{kz}^*] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^*]^3 [\theta(t_y - t_w) A_{k'}^2 g_{k'w}^*] - \\
& - [A_k^2 g_{kz}^*] [\theta(t_z - t_w) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pz}^* g_{pw} + \theta(t_w - t_z) \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^*]^3 [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \} = \\
& = \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}^*] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \cdot \\
& \cdot \left\{ \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^* \right]^3 [\theta(t_z - t_x) - \theta(t_z - t_x) \theta(t_w - t_z) \theta(t_w - t_y) - \right. \\
& \quad \left. - \theta(t_x - t_z) \theta(t_z - t_w) \theta(t_y - t_w) - \theta(t_z - t_w)] + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^* \right]^3 [\theta(t_w - t_y) - \theta(t_z - t_x) \theta(t_z - t_w) \theta(t_w - t_y) - \right. \\
& \quad \left. - \theta(t_x - t_z) \theta(t_w - t_z) \theta(t_y - t_w) - \theta(t_w - t_z)] \right\} \approx \\
& \approx \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W [A_k^2 g_{kz}^*] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] \left\{ \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^* \right]^3 [-2\theta(T - t_z) \theta(t_z - t_w)] + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^* \right]^3 [-2\theta(T - t_w) \theta(t_w - t_z)] \right\} \longrightarrow \\
& \kappa_{kk'} \approx \frac{\lambda^2}{12} \int \int d^2 Z d^2 W \left[ \int \frac{dp}{2\pi} A_p^2 g_{pw}^* g_{pz}^* \right]^3 [-2\theta(T - t_z) \theta(t_z - t_w)] \cdot \\
& \quad \cdot \{ [A_k^2 g_{kz}^*] [A_{k'}^2 g_{k'w}^*] + [A_k^2 g_{kw}^*] [A_{k'}^2 g_{k'z}^*] \}.
\end{aligned}$$

Это общие формулы для поправки второго порядка. В следующих пунктах мы покажем, что диаграммы указанного типа дают секулярный рост поправки.

### 3.3 Вычисление поправки второго порядка

Проведем вычисление петли второго порядка для следующей траектории:

$$\begin{aligned}
z(t) &= \theta(t) [-\beta t + a(1 - e^{-\frac{\beta t}{a}})]; \\
\beta(t) &= \theta(t) [\beta - \beta e^{-\frac{\beta t}{a}}]; \\
\beta'(t) &= \theta(t) \beta^2 e^{-\frac{\beta t}{a}} \approx 0 \quad .
\end{aligned}$$

Заметим, что число заполнения  $n_{kk'}$  содержит произведение двух интегралов  $I_z$  и  $I_w$ , получающихся друг из друга комплексным сопряжением и заменой переменной  $k$  на переменную  $k'$ . Следовательно, посчитав один из интегралов, сможем сразу выписать второй и перемножением их получить выражение для числа заполнения.

Отметим, что поскольку на данном этапе изучения задачи нас интересует секулярный рост, т.е. вклады, пропорциональные времени  $T = \frac{t_1 + t_2}{2} \rightarrow \infty$ , все члены,

заведомо не имеющие секулярного роста, будут опущены. Мы покажем, что каждый из интегралов  $I_z$  и  $I_w$  линеен по  $T$ , а значит всё выражение будет квадратично по  $T$ . Вычисление поправки проведено, таким образом, лишь для старшего члена по  $T$  (с точностью до  $O(T)$ ).

Выпишем выражение для интеграла  $I_z$ , вычисление которого проведём явно.

$$I_z = \int d^2 Z \theta(T - t_z) g_{kz} g_{p_1 z} g_{p_2 z} g_{p_3 z} = I_w^* \Big|_{k' \rightarrow k}.$$

Подставим значения мод:

$$\begin{aligned} I_z &= \int d^2 Z \theta(T - t_z) \left( \left[ \theta(k) \left\{ \theta_u[-] e^{-iku} + \frac{2ik(1 + \beta_u) e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} \theta_u[+] + \frac{\alpha e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} \theta_v[-] \right\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(-k) \left\{ \theta_v[+] e^{ikv} + \frac{2ik(1 - \beta_v)}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \theta_v[-] e^{ikv} + \frac{-\alpha}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \theta_u[+] e^{ik(2\tau_u - u)} \right\} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[ \theta(p_1) \left\{ \theta_u[-] e^{-ip_1 u} + \frac{2ip_1(1 + \beta_u)}{2ip_1(1 + \beta_u) - \alpha} \theta_u[+] e^{-ip_1 u} + \frac{\alpha}{2ip_1(1 + \beta_v) - \alpha} \theta_v[-] e^{-ip_1(2\tau_v - v)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(-p_1) \left\{ \theta_v[+] e^{ip_1 v} + \frac{2ip_1(1 - \beta_v)}{2ip_1(1 - \beta_v) + \alpha} \theta_v[-] e^{ip_1 v} + \frac{-\alpha}{2ip_1(1 - \beta_u) + \alpha} \theta_u[+] e^{ip_1(2\tau_u - u)} \right\} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[ \theta(p_2) \left\{ \theta_u[-] e^{-ip_2 u} + \frac{2ip_2(1 + \beta_u)}{2ip_2(1 + \beta_u) - \alpha} \theta_u[+] e^{-ip_2 u} + \frac{\alpha}{2ip_2(1 + \beta_v) - \alpha} \theta_v[-] e^{-ip_2(2\tau_v - v)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(-p_2) \left\{ \theta_v[+] e^{ip_2 v} + \frac{2ip_2(1 - \beta_v)}{2ip_2(1 - \beta_v) + \alpha} \theta_v[-] e^{ip_2 v} + \frac{-\alpha}{2ip_2(1 - \beta_u) + \alpha} \theta_u[+] e^{ip_2(2\tau_u - u)} \right\} \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[ \theta(p_3) \left\{ \theta_u[-] e^{-ip_3 u} + \frac{2ip_3(1 + \beta_u)}{2ip_3(1 + \beta_u) - \alpha} \theta_u[+] e^{-ip_3 u} + \frac{\alpha}{2ip_3(1 + \beta_v) - \alpha} \theta_v[-] e^{-ip_3(2\tau_v - v)} \right\} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \theta(-p_3) \left\{ \theta_v[+] e^{ip_3 v} + \frac{2ip_3(1 - \beta_v)}{2ip_3(1 - \beta_v) + \alpha} \theta_v[-] e^{ip_3 v} + \frac{-\alpha}{2ip_3(1 - \beta_u) + \alpha} \theta_u[+] e^{ip_3(2\tau_u - u)} \right\} \right] \right] = \\ &= \int d^2 Z \theta(T - t_z) \left( \left[ \theta_u[-] \theta(k) e^{-iku} + \theta_v[-] \frac{\alpha \theta(k) e^{-ik(2\tau_v - v)}}{2ik(1 + \beta_v) - \alpha} + \theta_v[-] \theta(-k) \frac{2ik(1 - \beta_v) e^{ikv}}{2ik(1 - \beta_v) + \alpha} \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[ \theta_u[-] \theta(p_1) e^{-ip_1 u} + \theta_v[-] \frac{\alpha \theta(p_1) e^{-ip_1(2\tau_v - v)}}{2ip_1(1 + \beta_v) - \alpha} + \theta_v[-] \theta(-p_1) \frac{2ip_1(1 - \beta_v) e^{ip_1 v}}{2ip_1(1 - \beta_v) + \alpha} \right] \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ \theta_u[-] \theta(p_2) e^{-ip_2 u} + \theta_v[-] \frac{\alpha \theta(p_2) e^{-ip_2(2\tau_v - v)}}{2ip_2(1 + \beta_v) - \alpha} + \theta_v[-] \theta(-p_2) \frac{2ip_2(1 - \beta_v) e^{ip_2 v}}{2ip_2(1 - \beta_v) + \alpha} \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \theta_u[-] \theta(p_3) e^{-ip_3 u} + \theta_v[-] \frac{\alpha \theta(p_3) e^{-ip_3(2\tau_v - v)}}{2ip_3(1 + \beta_v) - \alpha} + \theta_v[-] \theta(-p_3) \frac{2ip_3(1 - \beta_v) e^{ip_3 v}}{2ip_3(1 - \beta_v) + \alpha} \right] + \\
& + \left[ \theta_u[+] \theta(k) \frac{2ik(1 + \beta_u) e^{-iku}}{2ik(1 + \beta_u) - \alpha} + \theta_v[+] \theta(-k) e^{ikv} + \theta_u[+] \frac{-\alpha \theta(-k) e^{ik(2\tau_u - u)}}{2ik(1 - \beta_u) + \alpha} \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \theta_u[+] \theta(p_1) \frac{2ip_1(1 + \beta_u) e^{-ip_1 u}}{2ip_1(1 + \beta_u) - \alpha} + \theta_v[+] \theta(-p_1) e^{ip_1 v} + \theta_u[+] \frac{-\alpha \theta(-p_1) e^{ip_1(2\tau_u - u)}}{2ip_1(1 - \beta_u) + \alpha} \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \theta_u[+] \theta(p_2) \frac{2ip_2(1 + \beta_u) e^{-ip_2 u}}{2ip_2(1 + \beta_u) - \alpha} + \theta_v[+] \theta(-p_2) e^{ip_2 v} + \theta_u[+] \frac{-\alpha \theta(-p_2) e^{ip_2(2\tau_u - u)}}{2ip_2(1 - \beta_u) + \alpha} \right] \cdot \\
& \cdot \left[ \theta_u[+] \theta(p_3) \frac{2ip_3(1 + \beta_u) e^{-ip_3 u}}{2ip_3(1 + \beta_u) - \alpha} + \theta_v[+] \theta(-p_3) e^{ip_3 v} + \theta_u[+] \frac{-\alpha \theta(-p_3) e^{ip_3(2\tau_u - u)}}{2ip_3(1 - \beta_u) + \alpha} \right] \Bigg).
\end{aligned}$$

В выражении содержится большое количество однотипных интегралов, но лишь 8 типов из них могут дать секулярный рост поправки. Это те интегралы, у которых в экспоненте функция лишь от одной из переменных – от  $u$  или от  $v$ . Проведем расчет для каждого из данных типов. Везде ниже ( $f$  – любая функция):

$$\theta(p_i) = \theta(k)\theta(p_1)\theta(p_2)\theta(p_3), \quad f(p_i) = f(k)f(p_1)f(p_2)f(p_3),$$

$$s = k + p_1 + p_2 + p_3.$$

Напомним, что заведомо не растущие секулярно вклады во всех интегралах будут опущены.

$$\begin{aligned}
& 1. \quad \theta(p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{-\infty}^{z(t_z)} dz e^{-isu} = \int_{t_0}^0 du \int_{2t_0 - u}^u dv \frac{e^{-isu}}{2} + \\
& + \int_0^{T-z(T)} du \int_{2t_0 - u}^{2\tau_u - u} dv \frac{e^{-isu}}{2} + \int_{T-z(T)}^{+\infty} du \int_{2t_0 - u}^{2T - u} dv \frac{e^{-isu}}{2} = \\
& = \theta(p_i) \left[ \int_{t_0}^0 du (u - t_0) e^{-isu} + \int_0^{T-z(T)} du (\tau_u - t_0) e^{-isu} + \int_{T-z(T)}^{+\infty} du (T - t_0) e^{-isu} \right] \rightarrow \\
& \theta(p_i) \left[ \int_0^T d[\tau_u - z(\tau_u)] \tau_u e^{-is[\tau_u - z(\tau_u)]} + T \int_{T-z(T)}^{+\infty} du e^{-isu} \right] \rightarrow \\
& \theta(p_i) \left[ \frac{iT}{s} e^{-is[T-z(T)]} - \frac{iT}{s - i\epsilon} e^{-is[T-z(T)]} \right] = \theta(p_i) \pi T \delta(s) = 0
\end{aligned}$$

- секулярного роста нет.

Везде ниже при возникновении член с  $\delta(s)$  опускается, поскольку содержит также произведение тета-функций  $\theta(p_i)$ .

Отметим также, что любая функция, содержащая вторую производную  $\beta'$ , считается в рассматриваемом пределе бесконечно малой более высокого порядка и опускается.

$$\begin{aligned}
2. \quad & \theta(p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{z(t_z)}^{+\infty} dz \frac{2ip_i(1+\beta_u)}{2ip_i(1+\beta_u)-\alpha} e^{-isu} = \theta(p_i) \left[ \int_{-\infty}^{t_0} du (T-t_0) \frac{2ip_i}{2ip_i-\alpha} e^{-isu} + \right. \\
& \left. + \int_{t_0}^0 (T-u) du \frac{2ip_i}{2ip_i-\alpha} e^{-isu} + \int_0^{T-z(T)} du \frac{2ip_i(1+\beta_u)}{2ip_i(1+\beta_u)-\alpha} (T-\tau_u) e^{-isu} \right] \rightarrow \\
& \frac{iT}{s+i\epsilon} \frac{2ip_i}{2ip_i-\alpha} + T \int_0^{T-z(T)} du \frac{2ip_i(1+\beta_u)}{2ip_i(1+\beta_u)-\alpha} e^{-isu} - \frac{iT}{s} \frac{2ip_i(1+\beta)}{2ip_i(1+\beta)-\alpha} e^{-is(T-z(T))} = \\
& = \theta(p_i) \left[ T \int_0^{T-z(T)} du \frac{2ip_i(1+\beta_u)}{2ip_i(1+\beta_u)-\alpha} e^{-isu} - \frac{iT}{s} \left[ \frac{2ip_i(1+\beta)}{2ip_i(1+\beta)-\alpha} e^{-is(T-z(T))} - \frac{2ip_i}{2ip_i-\alpha} \right] \right] -
\end{aligned}$$

секулярный рост вклада для рассматриваемой траектории.

$$\begin{aligned}
3. \quad & \theta(p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{-\infty}^{z(t_z)} dz \frac{\alpha}{2ip_i(1+\beta_v)-\alpha} e^{-is(2\tau_v-v)} = \theta(p_i) \left[ \int_{-\infty}^{t_0} dv (T-t_0) \frac{\alpha}{2ip_i-\alpha} e^{-isv} + \right. \\
& \left. + \int_{t_0}^0 dv (T-v) \frac{\alpha}{2ip_i-\alpha} e^{-isv} + \int_0^{T+z(T)} dv \frac{\alpha}{2ip_i(1+\beta_v)-\alpha} (T-\tau_v) e^{-is(2\tau_v-v)} \right] \rightarrow \\
& \theta(p_i) \left[ \frac{iT}{s} \frac{\alpha}{2ip_i-\alpha} + T \int_0^{T+z(T)} dv \frac{\alpha e^{-is(2\tau_v-v)}}{2ip_i(1+\beta_v)-\alpha} - \frac{iT}{s} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{-is(T-z(T))}}{2ip_i(1+\beta)-\alpha} \right] -
\end{aligned}$$

секулярный рост вклада.

$$\begin{aligned}
4. \quad & \theta(-p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{z(t_z)}^{+\infty} dz \frac{\alpha}{2ip_i(1-\beta_u)+\alpha} e^{is(2\tau_u-u)} = \theta(p_i) \left[ \int_{-\infty}^{t_0} (T-t_0) \frac{\alpha}{2ip_i+\alpha} e^{isu} + \right. \\
& \left. + \int_{t_0}^0 (T-u) \frac{\alpha}{2ip_i+\alpha} e^{isu} + \int_0^{T-z(T)} du \frac{\alpha}{2ip_i(1-\beta_u)+\alpha} (T-\tau_u) e^{is(2\tau_u-u)} \right] \rightarrow \\
& \theta(-p_i) \left[ \frac{iT}{s} \frac{\alpha}{2ip_i+\alpha} + T \int_0^{T-z(T)} d\tau_u \frac{\alpha(1+\beta_u) e^{is(\tau_u+z(\tau_u))}}{2ip_i(1-\beta_u)+\alpha} - \frac{iT}{s} \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)} \frac{\alpha e^{is(T+z(T))}}{2ip_i(1-\beta)+\alpha} \right] -
\end{aligned}$$

секулярный рост вклада.

$$\begin{aligned}
5. \quad & \theta(-p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{z(t_z)}^{+\infty} dz e^{isv} = \theta(p_i) \left[ \int_{t_0}^0 dv e^{isv} (v-t_0) + \int_0^{T+z(T)} dv (\tau_v-t_0) e^{isv} + \right. \\
& \left. + \int_{T+z(T)}^{+\infty} dv (T-t_0) e^{isv} \right] \rightarrow 0 -
\end{aligned}$$

секулярного роста нет.

$$6. \quad \theta(-p_i) \int_{t_0}^T dt_z \int_{-\infty}^{z(t_z)} dz \frac{2ip_i(1-\beta_v)}{2ip_i(1-\beta_v)+\alpha} e^{isv} = \theta(-p_i) \left[ \int_{-\infty}^{t_0} dv (T-t_0) \frac{2ip_i}{2ip_i+\alpha} e^{isv} + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^0 dv (T-v) \frac{2ip_i}{2ip_i + \alpha} e^{isv} + \int_0^{T+z(T)} dv \frac{2ip_i(1-\beta_v)}{2ip_i(1-\beta_v) + \alpha} (T-\tau_v) e^{isv} \Big] \rightarrow$$

$$\theta(-p_i) \left[ -\frac{iT}{s} \frac{2ip_i}{2ip_i + \alpha} + T \int_0^{T+z(T)} dv \frac{2ip_i(1-\beta_v)}{2ip_i(1-\beta_v) + \alpha} e^{isv} + \frac{iT}{s} \frac{2ip_i(1-\beta)}{2ip_i(1-\beta) + \alpha} e^{is(T+z(T))} \right] -$$

секулярный рост вклада.

Оставшиеся два типа интегралов по вычислениям и результату не отличаются от интегралов (3) и (4). Они являются комбинацией перечисленных выше результатов. А именно, каждый из этих вкладов получается при перемножении функций от  $(2\tau_v - v)$  и от  $v$  либо функций от  $(2\tau_u - u)$  и от  $u$  интеграла  $I_z$ , т.е. перемножением соответствующих интегралов всеми возможными способами (14 способов для каждой из переменных  $u$  и  $v$ ). Для записи этих вкладов в окончательный ответ введем следующую функцию:  $J_w^{p_l}$ , верхние индексы которой обозначают наличие функции от  $p_l$ , в которую входит сама переменная ( $u$  или  $v$ ), что значит, что для остальных из 4 переменных входит функция  $f$  (т.е.  $2\tau_u - u$  или  $2\tau_v - v$ ), а нижний индекс обозначает саму переменную. Например,

$$J_v^{p_1, p_2, p_3} = \frac{\theta_v[-] \alpha \theta(k)}{2ik(1+\beta_v) - \alpha} \frac{2ip_1(1-\beta_v)\theta(-p_1)}{2ip_1(1-\beta_v) + \alpha} \frac{2ip_2(1-\beta_v)\theta(-p_2)}{2ip_2(1-\beta_v) + \alpha} \frac{2ip_3(1-\beta_v)\theta(-p_3)}{2ip_3(1-\beta_v) + \alpha} e^{isv-2ikt_v}.$$

Сумма  $T \sum_p J_{u,v}^{p_l}$  означает сумму по интегралам от всех этих функций. Она также пропорциональна первой степени  $T$  времени, которая выделена явно для удобства. Окончательный ответ в первом порядке по  $T$  для интеграла выглядит следующим образом (напомним, что любая функция  $f(p_i)$  - это произведение значений функции  $f$  при всех  $p_i$  -  $f(p_i) = f(k)f(p_1)f(p_2)f(p_3)$ ):

$$I_z = T\theta(p_i) \left[ \int_0^{T-z(T)} du \frac{2ip_i(1+\beta_u)}{2ip_i(1+\beta_u) - \alpha} e^{-isu} - \frac{i}{s} \left[ \frac{2ip_i(1+\beta)}{2ip_i(1+\beta) - \alpha} e^{-is(T-z(T))} - \frac{2ip_i}{2ip_i - \alpha} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{s} \frac{\alpha}{2ip_i - \alpha} + \int_0^{T+z(T)} dv \frac{\alpha e^{-is(2\tau_v-v)}}{2ip_i(1+\beta_v) - \alpha} - \frac{i}{s} \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{\alpha e^{-is(T-z(T))}}{2ip_i(1+\beta) - \alpha} \right] +$$

$$+ T\theta(-p_i) \left[ \frac{i}{s} \frac{\alpha}{2ip_i + \alpha} + \int_0^{T-z(T)} d\tau_u \frac{\alpha(1+\beta_u) e^{is(\tau_u+z(\tau_u))}}{2ip_i(1-\beta_u) + \alpha} - \frac{i}{s} \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{\alpha e^{is(T+z(T))}}{2ip_i(1-\beta) + \alpha} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T+z(T)} dv \frac{2ip_i(1-\beta_v)}{2ip_i(1-\beta_v) + \alpha} e^{isv} + \frac{i}{s} \frac{2ip_i(1-\beta)}{2ip_i(1-\beta) + \alpha} e^{is(T+z(T))} - \frac{i}{s} \frac{2ip_i}{2ip_i + \alpha} \right] +$$

$$+ T \sum_p J_{u,v}^{p_l} \equiv Tg(k, p_1, p_2, p_3).$$

В силу отмеченной выше связи между интегралами  $I_z$  и  $I_w$ , получим квадратичную зависимость числа заполнения от времени  $T$ :

$$n_{k,k'} = \frac{\lambda^2 T^2}{12} \int \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(2\pi)^3} \frac{g(k, p_1, p_2, p_3)}{4|k||k'|} \frac{g^*(k', p_1, p_2, p_3)}{8|p_1||p_2||p_3|} -$$

секулярный рост числа заполнения для диаграмм типа "заходящее солнце" в поправке второго порядка.

Аналогичным вычислением можно показать, что аномальное квантовое среднее  $\kappa_{kk'}$  также квадратично растёт со временем. Для получения высших вкладов по  $T$ , нужно разделить интеграл на два — по  $z$  и  $w$  снова учесть только те интегралы, которые зависят лишь от одной из переменных ( $u$  или  $v$ ).

Действительно, в аномальное квантовое среднее входит следующий интеграл:

$$J_w = -2 \int_{t_0}^{t_z} dt_w \int_{-\infty}^{+\infty} dw g_{p_1 w}^* g_{p_2 w}^* g_{p_3 w}^* \{g_{k' w}^* g_{k z}^* + g_{k w}^* g_{k' z}^*\}.$$

Видно, что лишь линейный по  $t_z$  вклад от интеграла  $J_w$  может дать квадратичный рост аномального среднего по времени  $T$ . Также нетрудно заметить, что данный интеграл равен уже посчитанному в предыдущем вычислении интегралу  $I_w$  после следующей замены переменных:

$$J_w = -2[I_w(T \rightarrow t_z)g_{kz}^* + I_w(T \rightarrow t_z, k' \rightarrow k)g_{k'z}^*].$$

Тогда для интеграла по переменной  $z$  справедливо следующее выражение:

$$J_z = \int_{t_0}^T dt_z \int_{-\infty}^{+\infty} g_{p_1 z} g_{p_2 z} g_{p_3 z} \cdot 2t_z (f_{k'} g_{kz}^* + f_k g_{k'z}^*).$$

Вычисление показывает, что аномальное квантовое среднее также содержит секулярный рост, пропорциональный второй степени времени  $T$ :

$$\kappa_{kk'} = \frac{\lambda^2 T^2}{12} \int \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{(2\pi)^3 4|k||k'|} \frac{h(k, k', p_1, p_2, p_3)}{8|p_1||p_2||p_3|},$$

где  $h(k, k', p_1, p_2, p_3)$  — некоторая функция импульсов, не содержащая степеней  $T$ .

## 4 Анализ результатов (вместо заключения)

В магистерской диссертации рассмотрено поведение самодействующего квантованного скалярного поля при наличии неидеального движущегося зеркала. Найдены гармоники, решающие уравнения движения свободной теории, и выведены основные формулы диаграммной техники Швингера-Келдыша, позволяющие находить квантовые поправки к пропагаторам и корреляторам. В ходе исследования были получены следующие результаты:

1. найдены гармоники, решающие уравнения движения в свободной теории, проверено выполнение для них коммутационного соотношения и условий сшивки;
2. вычислено вакуумное среднее смешанной компоненты тензора энергии-импульса и показано наличие распространяющегося от зеркала потока энергии;
3. получены формулы для пропагаторов и квантовых поправок в рассматриваемой теории;
4. в пределе больших времен, но при фиксированной разнице между ними вычислена квантовая поправка второго порядка к пропагатору Келдыша (для диаграмм типа "заходящее солнце"), обнаружен секулярный рост, пропорциональный второй степени времени  $T^2$ , в рассматриваемой поправке.

Несмотря на достигнутый прогресс в изучении данной задачи, многое ещё остается неясным и неисследованным. А именно, дальнейший анализ задачи требует:

- выяснения причин, по которым логарифмические расходимости в смешанной компоненте тензора энергии-импульса не сократились в результате регуляризации;
- нахождения траектории (или доказательства, что такой траектории быть не может), которая позволит получить ответ для вакуумного среднего в виде, похожем на поток Хокинга (см. [28]), выяснения связи между данными задачами;
- вычисления петлевых вкладов второго порядка от других диаграмм в указанных приближениях и сравнения этих вкладов с найденными для диаграмм типа "заходящее солнце";
- нахождения всех ведущих секулярно растущих вкладов в указанных приближениях и выяснения возможности их пересуммирования;
- составления и решения кинетического уравнения, суммирования всех секулярно растущих вкладов.

Только ответы на сформулированные вопросы помогут понять физику происходящего в задаче квантовых полей на фоне неидеального движущегося зеркала.



## Список литературы

- [1] Л. С. Левитов и А. В. Шитов, “Функции Грина. Задачи с решениями” Москва, издательство “Физико-математическая литература”, 2002
- [2] А. А. Абрикосов и Л. П. Горьков и И. Е. Дзялошинский, “Методы квантовой теории поля в статистической физике,” Москва, издательство “Физматгиз”, 1962
- [3] J. Rammer and H. Smith, “Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals,” *Rev. Mod. Phys.* **58**, 323-359 (1986) doi:10.1103/RevModPhys.58.323
- [4] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “Quantum Fields in Curved Space,” doi:10.1017/CBO9780511622632
- [5] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, “Статистическая физика, Ч.2. Теория конденсированного состояния,” Москва, издательство “Физико-математическая литература”, 2000
- [6] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, “Физическая кинетика,” Москва, издательство “Физико-математическая литература”, 2000
- [7] L. V. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1515 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965)].
- [8] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, “Secularly growing loop corrections in strong electric fields,” *JHEP* **1409** (2014) 071 doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [9] E. Akhmedov and F. Popov, “A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields,” *JHEP* **09**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085 [arXiv:1412.1554 [hep-th]].
- [10] E. Akhmedov and A. Sadofyev, “Comparative study of loop contributions in AdS and dS,” *Phys. Lett. B* **712**, 138-142 (2012) doi:10.1016/j.physletb.2012.04.061 [arXiv:1201.3471 [hep-th]].
- [11] E. Akhmedov, “IR divergences and kinetic equation in de Sitter space. Poincare patch: Principal series,” *JHEP* **01**, 066 (2012) doi:10.1007/JHEP01(2012)066 [arXiv:1110.2257 [hep-th]].
- [12] E. T. Akhmedov, “Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,” *Int. J. Mod. Phys. D* **23** (2014) 1430001 doi:10.1142/S0218271814300018 [arXiv:1309.2557 [hep-th]].

- [13] E. T. Akhmedov, U. Moschella and F. K. Popov, “Ultraviolet phenomena in AdS self-interacting quantum field theory,” *JHEP* **03**, 183 (2018) doi:10.1007/JHEP03(2018)183 [arXiv:1802.02955 [hep-th]].
- [14] E. Akhmedov and P. Burda, “Solution of the Dyson–Schwinger equation on de Sitter background in IR limit,” *Phys. Rev. D* **86**, 044031 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.86.044031 [arXiv:1202.1202 [hep-th]].
- [15] E. Akhmedov, F. Popov and V. Slepukhin, “Infrared dynamics of the massive 4 theory on de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **88**, 024021 (2013) doi:10.1103/PhysRevD.88.024021 [arXiv:1303.1068 [hep-th]].
- [16] E. Akhmedov, U. Moschella and F. Popov, “Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **99**, no.8, 086009 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.99.086009 [arXiv:1901.07293 [hep-th]].
- [17] E. Akhmedov, U. Moschella, K. Pavlenko and F. Popov, “Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space,” *Phys. Rev. D* **96**, no.2, 025002 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.025002 [arXiv:1701.07226 [hep-th]].
- [18] E. Akhmedov, O. Diatlyk and A. Semenov, [arXiv:1909.12805 [hep-th]].
- [19] E. Akhmedov, E. Lanina and D. Trunin, “Quantization in background scalar fields,” *Phys. Rev. D* **101**, no.2, 025005 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.025005 [arXiv:1911.06518 [hep-th]].
- [20] E. Akhmedov and O. Diatlyk, “Secularly growing loop corrections in scalar wave background,” [arXiv:2004.01544 [hep-th]].
- [21] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, *Phys. Rev. D* **93**, no.2, 024029 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].
- [22] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, “Radiation from a moving mirror in two-dimensional space-time conformal anomaly,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **348** (1976) 393.
- [23] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, “Radiation from Moving Mirrors and from Black Holes,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **356**, 237 (1977). doi:10.1098/rspa.1977.0130
- [24] E. T. Akhmedov and S. O. Alexeev, “Dynamical Casimir effect and loop corrections,” *Phys. Rev. D* **96** (2017) no.6, 065001 doi:10.1103/PhysRevD.96.065001 [arXiv:1707.02242 [hep-th]].
- [25] B. S. DeWitt, “Quantum Field Theory in Curved Space-Time,” *Phys. Rept.* **19** (1975) 295. doi:10.1016/0370-1573(75)90051-4

- [26] L. Astrahantsev and O. Diatlyk, “Massive quantum scalar field in presence of moving mirror,” arXiv:1805.00549 [hep-th].
- [27] M. Weinstein, “Moving mirrors, black holes, Hawking radiation and all that,” Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **108**, 68-73 (2002) doi:10.1016/S0920-5632(02)01306-3 [arXiv:gr-qc/0111027 [gr-qc]].
- [28] P. Davies, “Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics,” J. Phys. A **8**, 609-616 (1975) doi:10.1088/0305-4470/8/4/022
- [29] E. T. Akhmedov and D. Singleton, “On the relation between Unruh and Sokolov-Ternov effects,” Int. J. Mod. Phys. A **22**, 4797-4823 (2007) doi:10.1142/S0217751X07037081 [arXiv:hep-ph/0610391 [hep-ph]].
- [30] E. T. Akhmedov and D. Singleton, “On the physical meaning of the Unruh effect,” Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **86**, 702-706 (2007) doi:10.1134/S0021364007210138 [arXiv:0705.2525 [hep-th]].
- [31] E. T. Akhmedov, V. Akhmedova and D. Singleton, “Hawking temperature in the tunneling picture,” Phys. Lett. B **642**, 124-128 (2006) doi:10.1016/j.physletb.2006.09.028 [arXiv:hep-th/0608098 [hep-th]].
- [32] E. T. Akhmedov, T. Pilling and D. Singleton, “Subtleties in the quasi-classical calculation of Hawking radiation,” Int. J. Mod. Phys. D **17**, 2453-2458 (2008) doi:10.1142/S0218271808013947 [arXiv:0805.2653 [gr-qc]].
- [33] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” Commun. math. Phys. **43**, 199-220 (1975)
- [34] P. Davies and W. Unruh, “Perturbation Technique for Quantum Fields in Curved Space,” Phys. Rev. D **20**, 388 (1979) doi:10.1103/PhysRevD.20.388
- [35] P. Davies, S. Fulling and W. Unruh, “Energy Momentum Tensor Near an Evaporating Black Hole,” Phys. Rev. D **13**, 2720-2723 (1976) doi:10.1103/PhysRevD.13.2720
- [36] P. M. Ho and Y. Matsuo, “Static Black Holes With Back Reaction From Vacuum Energy,” Class. Quant. Grav. **35**, no.6, 065012 (2018) doi:10.1088/1361-6382/aaac8f [arXiv:1703.08662 [hep-th]].
- [37] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, “Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений,” Москва, издательство “Физико-математическая литература”, 1963