ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики
и квантовой теории поля

Связь чисел Гурвица с матричными моделями

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:
студент 627 группы
Андреев Алексей Витальевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., Слепцов А.В.

Долгопрудный
2020

Содержание

1 Введение

Иерархия Кадомцева-Петвиашвили имеет множество точных решений различной природы. В том числе, многие матричные модели: эрмитова [1], комплексная [2], Концевича [3], БГВ [1]. Кроме того, существует множество примеров комбинаторных решений иерархии КП. Один из таких примеров - числа Гурвица. Особенностью таких решений является то, что они имеют естественное разложение по родам, соответствующее геометрической интерпретации той или иной модели, которое имеет вид разложения по четным степеням формального параметра $\hbar$ [4]. С другой стороны, существует $\hbar$ деформация иерархии КП, у которой нет геометрической интерпретации, зато существует нетривиальный квазиклассический предел $\hbar \to 0$, который соответствует бездисперсионной иерархии КП [5].

В данной работе изучаются свойства комбинаторных производящих функций как решений иерархии $\hbar$-КП на примере чисел Гурвица, эрмитовой матричной модели и модели БГВ, а также обсуждается возможность восстановления полных решений, имеющих комбинаторную и геометрическую интерпретацию, из бездисперсионного предела.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 кратко приведены основные утверждения из теории классической иерархии КП. В разделе 3 определяется $\hbar$-КП и указан конкретный вид формальных решений согласно [5]. Далее, в разделе 4, определены простые числа Гурвица, обсуждается их производящая функция как τ-функция семейства решений Орлова-Щербина иерархии КП, а также геометрическая интерпретация разложения по родам. Раздел 5 посвящен подходу Такасаки-Такебе [6] к деформации τ-функций и ее связи с подходом Казаряна-Ландо к деформации семейства гипергеометрических τ-функций. В разделе 6 показано, что эрмитова матричная модель является решением $\hbar$-КП в пределе $N \to \infty$ с параметром $\hbar = \frac{1}{N}$, и обсуждается связь $\hbar$ с деформацией Такасаки-Такебе. Раздел 7 - еще один пример решения $\hbar$-КП, возникающего из матричной модели БГВ. Следующие два раздела посвящены свойствам решений $\hbar$-КП: в 8 - связи классических соотношений Плюккера с детерминантными соотношениями на коэффициенты разложения τ-функции КП по полиномам Шура; в 9 - приведен способ восстановления полного решения $\hbar$-КП из бездисперсионного предела, и обсуждается его применимость к семейству Орлова-Щербина и чисел Гурвица, в частности.

2 Иерархия КП

В данном разделе кратко представлены основные факты из теории интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили. Основным источником является книга М.Джимбо, Т.Мивы и Э.Датэ [7].

2.1 Представление Лакса и билинейное тождество

Иерархия Кадомцева-Петвиашвили - это интегрируемая иерархия дифференциальных уравнений, заданных в представлении Лакса в виде

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = [(L^j)_+, L]\,, \tag{1}$$

где $L = \partial_1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j \partial_1^{-j}$, а f_j - функции от бесконечного набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$. Соотношения на f_j, полученные из (1), содержат бесконечный набор нелинейных уравнений. Оказывается, что набор функций f можно описать с помощью одной функции, называемой τ-функцией. Кроме того, уравнения иерархии переписываются в виде билинейных уравнений Хироты в терминах τ-функции, которые, в свою очередь, можно записать в виде билинейного тождества:

$$\oint \frac{dk}{2\pi i} \exp\left(2\sum_{j=1}^{\infty} k^j (x_j - x_j')\right) \tau\left(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots\right) \times$$
$$\times\, \tau\left(x_1 + \frac{1}{k}, x_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots\right) = 0\,. \tag{2}$$

Это тождество можно переписать в другом удобном виде:

$$(z_1 - z_2)\tau^{[z_1,z_2]}\tau^{[z_3]} + (z_2 - z_3)\tau^{[z_2,z_3]}\tau^{[z_1]} + (z_3 - z_1)\tau^{[z_3,z_1]}\tau^{[z_2]} = 0\,, \tag{3}$$

где введено обозначение

$$\tau^{[z_1,\dots,z_m]}(\mathbf{t}) = \tau\left(t_1 + z^{-1}, t_2 + \frac{1}{2}z^{-2}, t_3 + \frac{1}{3}z^{-3}, \dots\right)\,. \tag{4}$$

2.2 Пространство Фока и диаграммы Майя

Определим алгебру Клиффорда $\mathcal{A}$ следующим образом. Введем образующие ψ_n, ψ_n^* где $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ со следующими антикоммутационными соотношениями

$$\{\psi_m, \psi_n\} = 0,\ \{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0,\ \{\psi_m^*, \psi_n\} = \delta_{m+n,0}\,. \tag{5}$$

Алгебра, порожденная этими образующими и соотношениями, называется алгеброй Клиффорда. Она определена корректно, и базис в ней образуют мономы вида

$$\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^*\,, \tag{6}$$

где $m_1 < \dots < m_r$ и $n_1 < \dots < n_s$.

Опишем представление Фока алгебры Клиффорда. Удобно рассматривать пространство представления Фока, как векторное пространство, порожденное диаграммами Майя. Они определяются следующим образом: рассмотрим множество черных и белых камней, выстроенных вдоль вещественной оси и занумерованных полуцелыми числами так, что при $n >> 0$ все камни черные, а при $n << 0$ все камни белые. Это и есть диаграмма Майя. Ее можно записать с помощью возростающей последовательности полуцелых чисел $\{m_1, m_2, \dots\}$, обозначающих положение черных камней. Определим теперь действие элементов ψ_n и ψ_n^* алгебры Клиффорда на базисные вектора пространства Фока $|m+1, m_2, \dots\rangle$:

$$\psi_n|m+1, m_2, \dots\rangle = \begin{cases} (-1)^{i-1}|\dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots\rangle & \text{если } m_i = -n \text{ для некоторого } i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi_n^*|m+1, m_2, \dots\rangle = \begin{cases} (-1)^{i}|\dots, m_{i-1}, n, m_{i+1}, \dots\rangle & \text{если } m_i < n < m_i + 1 \text{ для некоторого } i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{8}$$

Здесь фермионы ψ_n порождают белые камни на позиции $-n$, а ψ_n^* порождают черные камни на позициях n. Можно проверить, что действие фермионов определено корректно и продолжается на всю алгебру Клиффорда. Полученное представление называется представлением Фока.

Введем в пространстве Фока вакуумный вектор $|0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\rangle$. Все пространство Фока порождается действием алгебры Клиффорда на вакуумный вектор:

$$\mathcal{F} = \{a|0\rangle : a \in \mathcal{A}\} . \tag{9}$$

Для каждого вектора $\psi_{m_1} \dots \psi_{m_r} \psi_{n_1}^* \dots \psi_{n_s}^* |0\rangle \in \mathcal{F}$ тогда можно определить заряд, равный $r - s$.

2.3 Алгебра $gl(\infty)$ и фермионное представление

Для того, чтобы определить действие алгебры $gl(\infty)$, введем нормальное упорядочение

$$: \psi_m \psi_n^* := \begin{cases} \psi_m \psi_n^* & \text{if } m < 0 \text{ or } n > 0 \\ -\psi *_n \psi_m & \text{if } m > 0 \text{ or } n < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим операторы вида

$$X_A = \sum_{m,n} a_{mn} : \psi_{-m} \psi_n^* : , \tag{11}$$

где $A = (a_{ij})$ и выполнено условие: существует такое $N > 0$, что $a_{ij} = 0$ для всех $i, j : |i-j| > N$

Если к операторам (11) добавить константы, то получится алгебра $gl(\infty) = \{X_A\} \oplus \mathbb{C}$ с коммутационными соотношениями:

$$[X_A, X_B] = X_{[A,B]} + \omega(A, B) , \tag{12}$$

где $\omega(A, B) = \sum a_{ij} b_{ji} (\theta(i < 0) - \theta(j < 0))$ конечная сумма в силу условия на матрицу A, а θ - булева функция, равная единице, если условие выполнено, и нулю, если не выполнено.

Полученной алгебре соответствует некоторая группа Ли:

$$G = \{e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_k} : X_i \in gl(\infty)\} . \tag{13}$$

Введем еще один оператор на пространстве Фока, зависящий от бесконечного набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$:

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n H_n \,, \tag{14}$$

где

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} :\psi_{-j}\psi^*_{j+n}: \;. \tag{15}$$

Важным и нетривиальным утверждением является то, что точки орбиты вакуумного вектора при действии группы G являются τ-функциями.

Теорема. Функция

$$\tau(x; g) = \langle 0|e^{H(x)} g|0\rangle \tag{16}$$

удовлетворяет билинейному тождеству (2) и, соответственно, является τ-функцией КП для произвольного элемента $g \in G$.

2.4 Соотношения Плюккера

Предыдущую теорему можно модифицировать.

Теорема. Элемент $|u\rangle$ пространства Фока принадлежит орбите вакуумного вектора тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi^*_i|u\rangle \otimes \psi_{-i}|u\rangle = 0 \tag{17}$$

Это утверждение имеет смысл соотношений Плюккера, задающих координаты полубесконечного грассманиана $Gr(\infty/2, V)$ в пространстве $\bigwedge^{\infty/2} V$, где V - векторное пространство координат $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Определим теперь полиномы Шура, параметризуемые диаграммами Юнга. Для симметрических диаграмм можно написать производящую функцию

$$\sum_{k \geq 0} s_{(k)}(t) z^k = \exp\left(\sum_{k \geq 1} t_k z^k\right) \,, \tag{18}$$

тогда

$$s_{(\lambda)} = \det_{1 \leq i,j \leq \ell(\lambda)} s_{(\lambda_i - i + j)}(t) \,, \tag{19}$$

где $t_k = \frac{1}{k}\sum_i x_i^k$. Они образуют базис в пространстве симметрических полиномов, поэтому в дальнейшем будем рассматривть разложение τ-функции по полиномам Шура.

Между диаграммами Юнга и диаграммами Майя фиксированного заряда существует соответствие, называемое бозон-фермионным. Благодаря этому соответствию можно параметризовать коэффициенты в разложении по полиномам Шура диаграммами Майя. Тогда соотношения Плюккера (17) можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{\{m_1, \dots, \hat{m}_k, \dots\}} c_{\{m_k, n_1, \dots\}} = 0 \,, \tag{20}$$

$$\tau(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\lambda} c_\lambda s_\lambda \,. \tag{21}$$

Здесь соответствующие коэффициенты $c_\lambda \equiv c_{\{m_1,m_2,\dots\}}$ отождествлены посредством бозон-фермионного соответствия.

3 $\hbar$ - деформированная иерархия КП

В этом разделе определяется иерархия $\hbar$-КП и приводится явный вид формальных решений, полученных Натанзоном и Забродиным в статье [5].

3.1 Формальное решение для τ-функции

$\hbar$-деформированную иерархию КП можно представить несколькими эквивалентными способами. Один из них - это задать билинейные уравнения Хироты. Они имеют вид, аналогичный билиненому тождеству (3) для обычной КП:

$$(z_1 - z_2)\tau^{[z_1,z_2]}\tau^{[z_3]} + (z_2 - z_3)\tau^{[z_2,z_3]}\tau^{[z_1]} + (z_3 - z_1)\tau^{[z_3,z_1]}\tau^{[z_2]} = 0 , \tag{22}$$

но с деформированным сдвигом

$$\tau^{[z_1,\dots,z_m]}(\mathbf{t}) = \tau\left(t_1 + \hbar z^{-1}, t_2 + \frac{\hbar}{2}z^{-2}, t_3 + \frac{\hbar}{3}z^{-3}, \dots\right) . \tag{23}$$

Это, в частности, означает, что $\hbar$-КП переходит в обычную иерархию КП при значении параметра $\hbar = 1$. Кроме того заметим, что из решения классического КП можно получить решение $\hbar$-КП (и обратно), перескалировав времена на $\hbar$.

Определим $\hbar$-деформированные производные

$$\partial_k^{\hbar} = \frac{k}{\hbar}s_{(k)}(\hbar\tilde{\partial}),\ \tilde{\partial} \equiv \{\partial_1, \frac{\partial_2}{2}, \frac{\partial_3}{3}, \dots\} . \tag{24}$$

Первые из них имеют вид: $\partial_1^{\hbar} = \partial_1$, $\partial_2^{\hbar} = \partial_2 + \hbar\partial_1^2$, $\partial_3^{\hbar} = \partial_3 + \frac{3}{2}\hbar\partial_1\partial_2 + \frac{1}{2}\hbar^2\partial_1^3$.

В своей статье Натанзон и Забродин нашли все формальные решения этой иерархии, которые являются рядами по переменным $\hbar$ и $\mathbf{t}$:

Теорема. Пусть $\tau(x, \mathbf{t}) = f(x)\hat{\tau}(x + t_1, t_2, \dots)$ является τ-функцией $\hbar$-КП иерархии. Тогда коэффициенты в разложении

$$\tau(x, \mathbf{t}) = \sum_{\mu} c_\lambda(x)s_\lambda(\mathbf{t}/\hbar) \tag{25}$$

связаны соотношением

$$c_\lambda(x) = (c_0(x))^{1-l(\lambda)} \underset{1\le i,j\le l(\lambda)}{det} \left[\sum_{k=0}^{j-1}(-\hbar)^k C_{j-1}^k \partial_x^k c_{\lambda_i - i + j - k}(x)\right] \tag{26}$$

Обратно, пусть $c_k(x)$ произвольные бесконечно дифференцируемые функции и $c_\lambda(x)$ удовлетворяют (26). Тогда (25) является формальным решением $\hbar$-КП с Коши-подобными данными

$$\tau(x, 0) = c_0(x),\ \partial_k^{\hbar}\tau(x, t)\big|_{t=0} = \frac{k}{\hbar}c_k(x) . \tag{27}$$

3.2 $\hbar$-КП для F-функции

Для многих физических приложений необходимо работать с логарифмом τ-функции

$$F(x; t) = \hbar \log(\tau(x, t)) . \tag{28}$$

Для F можно ввести аналог Коши-подобных данных:

$$f_k(x) = \partial_k^\hbar F(x,t)\big|_{t=0} \,. \tag{29}$$

Используя определение F-функции можно получить связь между коэффициентами $c_{(k)}(x)$ в разложении τ-функции по полиномам Шура и Коши-подобными данными $f_k(x)$ в следующем виде:

$$\tau(x,0) = c_0(x) = e^{F(x,0)/\hbar^2} \,, \tag{30}$$

$$\frac{c_k(x)}{c_0(x)} = s_{(k)}(\{\frac{1}{l\hbar} f_l(x)\}) \,. \tag{31}$$

Это, в частности, означает, что произвольные Коши-подобные данные однозначно определяют τ-функцию и, следовательно, F-функцию.

В работе Натанзона и Забродина получена конструкция полного решения, выраженного через f.

Теорема. Для любого $\hbar$ и произвольного набора гладких функций

$$f = \{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots\} \tag{32}$$

существует единственное решение $F(x,t)$ иерархии $\hbar$-КП такое, что f являются Коши-подобными данными этого решения. Оно имеет вид:

$$F(x,\mathbf{t}) = f_0(x) + \sum_{|\lambda|\geq 1} \frac{f_\lambda^\hbar(x)}{\sigma(\lambda)} t_\lambda^\hbar \,, \tag{33}$$

где $f_{(k)}^\hbar(x) = f_k(x)$ и

$$f_\lambda^\hbar(x) = \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{s_1+l_1+\dots+s_m+l_m=|\lambda| \\ 1\leq s_i; 1\leq l_i\leq \ell(\lambda)-1}} P_\lambda^\hbar \begin{pmatrix} s_1 \dots s_m \\ l_1 \dots l_m \end{pmatrix} \partial^{l_1} f_{s_1}(x) \dots \partial^{l_m} f_{s_m}(x) \tag{34}$$

для всех $\ell(\lambda) > 1$.

Здесь введены обозначения $\sigma(\lambda) = \prod_{k\geq 1} m_k!$, где m_k - число строк в диаграмме λ длины k. $P_\lambda^\hbar \begin{pmatrix} s_1 \dots s_m \\ l_1 \dots l_m \end{pmatrix}$ - универсальные комбинаторные коэффициенты, не зависящие от данных f (определены в [5]).

4 Числа Гурвица

Примером решения $\hbar$-КП является производящая функция чисел Гурвица. В данном разделе определяются числа Гурвица и семейство τ-функций Орлова-Щербина, приводится геометрическая интерперетация разложения по родам. Подробное обсуждение комбинаторных решений интегрируемых иерархий можно найти в статье Казаряна и Ландо [4]

4.1 Семейство τ-функций Орлова-Щербина

Определение. Числом Гурвица $h^{\circ}_{m;\mu}$ называется количество разветвленных накрытий проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ таких, что фиксировано ровно m простых точек ветвления и одна вырожденная (на бесконечности) с цикловой структурой $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{l(\mu)})$, по модулю группы автоморфизмов накрытия.

Эти числа имеют и комбинаторное описание, которое следует из предыдущего определения.

$$h^{\circ}_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|} |\{(\eta_1, \dots, \eta_m), \eta_i \in C_2(S_{|\mu|}) : \eta_m \circ \dots \circ \eta_1 \in C_\mu\}| \,, \tag{35}$$

где $S_{|\mu|}$ - группа перестановок, $C_2(S_{|\mu|})$ - множество транстпозиций группы $S_{|\mu|}$ и $C_\mu(S_{|\mu|})$ - множество перестановок циклового типа μ в $S_{|\mu|}$. В этом определении транспозиции соответствуют простым точкам ветвления, их композиция - вырожденной точке циклового типа μ. Соберем числа Гурвица в производящую функцию

$$H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^{\circ}_{m;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!} \,. \tag{36}$$

Можно аналогично ввести связные числа Гурвица $h_{m;\mu}$ и их производящую функцию $H(u; p_1, p_2, \dots)$. Полученные производящие функции связаны соотношением

$$H^{\circ} = e^{H} \,. \tag{37}$$

Нетривиальным является утверждение о том, что эти производящие функции являются решениями иерархии КП.

Теорема [8][9] Производящая функция $H^{\circ}(u; p_1, p_2, \dots)$ для простых чисел Гурвица является однопараметрическим семейством τ-функций иерархии КП, а ее логарифм $H(u; p_1, p_2, \dots)$ является однопараметрическим семейством решений этой иерархии. Кроме того, производящая функция для чисел Гурвица принадлежит обширному семейству Орлова-Щербина решений иерархии КП.

Для того, чтобы описать это семейство в бозонном представлении, определим содержание диаграммы Юнга.

Определение. Содержанием клетки ω, находящейся на пересечении i-ой строки и j-го столбца, называется велиина $c(\omega) = j - i$. Содержанием $c(\mu)$ диаграммы μ называется неупорядоченный набор содержаний ее клеток.

Содержания диаграмм Юнга возникают как собственные значения W_0 оператора при действии на полиномы Шура [10]:

$$W_0 = \sum_{i,j \geq 1} ij t_i t_j \partial_{i+j} + (i+j) t_{i+j} \partial_i \partial_j \,, \tag{38}$$

$$W_0 s_\lambda(t) = 2(\sum_{\omega \in \lambda} c(\omega)) s_\lambda(t) \,. \tag{39}$$

Теорема(Орлов, Щербин [11]) Производящая функция

$$\sum_\mu y_\mu \frac{dim_\mu}{|\mu|!} s_\mu(p_1, p_2, \dots) \equiv \sum_\mu y_\mu s_\mu(1,0,0,\dots) s_\mu(p_1,p_2,\dots)\ , \tag{40}$$

где dim_μ размерность неприводимого представления группы $S_{|\mu|}$, соответствующего μ, является семейством τ-функций иерархии КП. Здесь введена параметризация:

$$y_\mu = \prod_{\omega\in\mu} y_{c(\omega)}\ . \tag{41}$$

Теорема [12] Для того, чтобы получить τ-функцию H° для простых чисел Гурвица, нужно положить $y_c = e^{uc}$

Используя представление (40), можно переписать производящую функцию для чисел Гурвица с помощью деформированного W_0 оператора

$$W_0^\hbar = \sum_{i,j\geq 1} \frac{ijt_it_j}{\hbar}\partial_{i+j} + \hbar(i+j)t_{i+j}\partial_i\partial_j \tag{42}$$

в виде

$$\exp(H(u,t)) = \exp\left(\frac{\hbar u}{2} W_0^\hbar\right) \exp\left(\frac{t_1}{\hbar^2}\right)\ . \tag{43}$$

4.2 Разложение по родам

У производящей функции связных чисел Гурвица H существует естественное разложение по родам накрывающих кривых. Это разложение можно получить введением дополнительного формального параметра $\hbar$. Для этого сделаем замену переменных $p_i \mapsto \hbar^{-i-1}p_i$. Это приводит к тому, что в слагаемом $h_{m;\mu}p_1p_2\dots\frac{u^m}{m!}$ возникнет множитель $\hbar^{-|\mu|-\ell l(\mu)}$. Замена $u \mapsto \hbar u$ дает множитель $\hbar^m$. Теперь, воспользовавшись формулой Римана-Гурвица:

$$2g-2 = m - |\mu| - \ell(\mu)\ , \tag{44}$$

которая связывает род накрывающей поверхности g, число простых точек ветвления m и цикловую структуру ветвления μ в последней точке, получим, что в производящей функции при $h_{m;\mu}$ возникает $\hbar^{2g-2}$. Для того, чтобы теперь получить разложение $H = \sum\limits_{g\geq 0}\hbar^{2g}H_g$, домножим всю производящую функцию на $\hbar^2$. Тогда производящая функция для связных чисел Гурвица приобретает вид:

$$H^\hbar = \hbar^2 \log\left(\sum_\mu e^{u\hbar c(\mu)}\frac{dim_\mu}{|\mu|!} s_\mu\left(\frac{p_1}{\hbar^2}, \frac{p_2}{\hbar^3}, \frac{p_3}{\hbar^4}, \dots\right)\right) =$$

$$= H_0(u;p_1,p_2,\dots) + \hbar^2 H_1(u;p_1,p_2,\dots) + \hbar^4 H_2(u;p_1,p_2,\dots) + \dots \tag{45}$$

Стоит отметить, что H_0 является решением бездисперсионной иерархии КП, как и $\hbar \to 0$ предел формальных решений $\hbar$-КП.

$H^\hbar(u;p_1,p_2,\dots)$ является решением $\hbar$-КП, т.к. получено из классического решения (с параметром $u\hbar$) перескалированием времен. Это означает совпадение формальной деформации КП и естетвенной деформации чисел Гурвица, имеющей геометрическую интерпретацию.

Можно ввести аналогичную $\hbar$-деформацию для τ-функций семейства Орлова-Щербина, предложенную Казаряном и Ландо [4]. Пусть задан произвольный степенной ряд

$$\varphi(c) = d_0 + d_1 c + d_2 c^2 + d_3 c^3 + \dots \tag{46}$$

Введем $\hbar$-деформацию τ-функции

$$\tau = \sum_{\mu} \frac{dim_\mu}{|\mu|!} s_\mu(p_1, p_2, \dots) \tag{47}$$

следующим образом:

$$\tau^\hbar = \sum_{\mu} \left(\prod_{\omega \in \mu} \varphi(\hbar c(\omega)) \frac{dim_\mu}{|\mu|!} s_\mu \left(\frac{p_1}{\hbar^2}, \frac{p_2}{\hbar^3}, \dots \right) \right) . \tag{48}$$

Теорема [13] Для любого степенного ряда $\varphi(c)$ разложение по степеням параметра $\hbar$ функции

$$\Phi^\hbar = \hbar^2 \log(\tau^\hbar) \tag{49}$$

содержит только четные неотрицательные степени. Это разложение тоже имеет геометрическую инерпертацию. Здесь разветвленные накрытия сферы учитываются в производящей функции с некоторым весом.

5 Деформация Такасаки-Такебе

5.1 Гипергеометрические τ-функции

В работе [14] был найден широкий класс гипргеометрических τ-функций в фермионном и бозонном представлении

$$\tau(t;\beta) = \langle 0|e^{H(t)}e^{-A(\beta)}|0\rangle = \sum_{\lambda} r_\lambda(\beta) s_\lambda(t) \,, \tag{50}$$

где $H(t)$ - это оператор (14), матрица A имеет вид:

$$A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty},\ A_k = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)\varphi(n-1)\ldots\varphi(n-k+1) : \psi_n \psi^*_{n-k} : \tag{51}$$

и r_λ - функция от содержания диаграммы:

$$r_\lambda = \prod_{\omega\in\lambda} r(c(\omega)) \,. \tag{52}$$

Можно переписать эти операторы в другом виде:

$$H_k = \frac{1}{2\pi i}\oint : z^k \psi(z)\psi^*(z) : dz \,, \tag{53}$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi i}\oint : \left[\left(\frac{1}{z}r(D)\right)^k \psi(z)\right] : , \tag{54}$$

где все фермионные операторы собраны в ряды

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_n z^{-n-\frac{1}{2}},\ \psi^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi^*_n z^{-n-\frac{1}{2}} \tag{55}$$

и $D = z\frac{d}{dz}$, поэтому $r(D)z^n = r(n)z^n$.

5.2 $\hbar$-деформация

Такасаки и Такебе предложили ввести деформацию, которая будет совпадать с деформацией Казаряна и Ландо при $\beta = (1,0,0,\ldots)$, вида

$$\tau^\hbar(t) = \langle 0|e^{H(t/\hbar)} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\mathcal{O}^\hbar_X\right)|0\rangle \,, \tag{56}$$

$$\mathcal{O}^\hbar_X = \frac{1}{2\pi i}\oint : \left[\hat{X}\left(z, \hbar\frac{d}{dz}\right)\psi(z)\right]\psi^*(z) : dz \,. \tag{57}$$

для произвольного оператора $\hat{X}$, зависящего от z и $\frac{d}{dz}$.
Выбрав $\hat{X}(z,\hbar\frac{d}{dz}) = \frac{1}{z}r(\hbar D)$, получим в фермионном представлении

$$A^\hbar_k = \frac{1}{2\pi i}\oint : \left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{z}r(\hbar D)\right)^k \psi(z)\right] : , \tag{58}$$

что в случае с $\beta = (1,0,0,...)$ полностью совпадет с деформацией Казаряна-Ландо

$$r(c(w)) \to \frac{r(\hbar c(w))}{\hbar} \Leftrightarrow r_\lambda \to r_\lambda^\hbar = \frac{\prod_{w\in\lambda} r(\hbar c(w))}{\hbar^{|\lambda|}}\,, \tag{59}$$

$$t_k \to \frac{t_k}{\hbar}\,. \tag{60}$$

Однако, для других параметров β деформация не сводится к замене (59), что можно увидеть на примере эрмитовой матричной модели.

6 Эрмитова матричная модель

6.1 Случай $\hbar = 1$

Матричные модели часто являются решениями интегрируемых иерархий. Простейший пример - эрмитова матричная модель, статсумма которой определяется следующим образом [1]:

$$Z_N(t) = \frac{\int \mathcal{D}X \exp\left(-\frac{1}{2}Tr(X^2) + \sum_{k=1}^{\infty} t_k Tr(X^k)\right)}{\int \mathcal{D}X \exp -\frac{1}{2}Tr(X^2)} = \left\langle \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k x_k\right)\right\rangle \tag{61}$$

и рассматривается как интеграл от формального разложения в ряд по переменным t_k с мерой $\mathcal{D}X = \prod_{i=1}^{N} dX_{ii} \prod_{i<j} Re(dX_{ij}) Im(dX_{ij})$ на множестве эрмитовых матриц. Здесь введено обозначение $x_k = \frac{1}{k}Tr(X^k)$.

В силу тождества Коши-Литтлвуда [15]

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(t) s_\lambda(t') = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k t'_k\right) \tag{62}$$

эта модель имеет разложение по полиномам Шура

$$\sum_{\lambda} \langle s_\lambda(\{x_k\})\rangle s_\lambda(t)\,. \tag{63}$$

Миронов и Морозов в своей статье [16] показали, что $Z_N(t)$ является τ-функцией иерархии КП, и нашли ее явный вид в бозонном представлении:

$$Z_N(t) = \sum_{\lambda} \frac{s_\lambda(\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\})}{s_\lambda(1,0,0,\dots)} s_\lambda\left(\frac{N}{1}, \frac{N}{2}, \frac{N}{3}, \dots\right) s_\lambda(t)\,. \tag{64}$$

Воспользуемся соотношением

$$\frac{s_\lambda\left(\frac{N}{1}, \frac{N}{2}, \frac{N}{3}, \dots\right)}{s_\lambda(1,0,0,\dots)} = \frac{D_\lambda(N)}{d_\lambda} = \prod_{\omega\in\lambda}(N + c(\omega))\,, \tag{65}$$

где $D_\lambda(N)$ - размерность неприводимого представления $GL(N)$, соответствующего λ, d_λ - размерность неприводимого представления $S_{|\lambda|}$, соответствующего λ. Это позволяет показать, что $Z_N(t)$ является гипергеометрической τ-функцией с функцией от содержания, имеющей вид $r(c) = N + c$, и параметрами $\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\}$. Это означает, что к ней нельзя применить $\hbar$-деформацию в форме Казаряна-Ландо, однако можно применить деформацию Такасаки-Такебе.

6.2 Разложение по родам

Для эрмитовой матричной модели существует естественное разложение по родам поверхностей, получающихся при склеивании ленточных графов в диаграммной технике по ребрам этого графа. Для того, чтобы получить это разложение, необходимо рессмотреть разложение по степеням $\hbar = \frac{1}{N}$ в пределе $N \to \infty$ интеграла

$$\frac{\int \mathcal{D}X \exp\left(-\frac{N}{2}Tr(X^2) + N\sum_{k=1}^{\infty} t_k Tr(X^k)\right)}{\int \mathcal{D}X \exp -\frac{N}{2}Tr(X^2)}\,. \tag{66}$$

Рассмотрим этот предел в терминах бозонного представления. Для этого сделаем замену $t_k \to t'_k = Nt_k$, тогда разложение по полиномам Шура согласно тождеству Коши-Литтлвуда имеет вид:

$$\sum_{\lambda} \langle s_\lambda(\{x_k\})\rangle_N s_\lambda(t') \,, \tag{67}$$

где усреднение $\langle \dots \rangle_N$ происходмт с мерой $\mathcal{D}X \exp(\frac{N}{2}Tr(X^2))$. Т.к. мера Гаусова, то справедливо правило Вика, поэтому среднее $\langle s_\lambda \rangle_N$ раскладывается в сумму произведений из $\frac{|\lambda|}{2}$ попарных средних в случае четных $|\lambda|$ и равно нулю для нечетных. Теперь для каждого попарного среднего $\langle X_{ij}X_{kl}\rangle_N = \frac{1}{N}\langle X_{ij}X_{kl}\rangle$, поэтому

$$\langle s_\lambda(\{x_k\})\rangle_N = \frac{1}{N^{|\lambda|/2}}\langle s_\lambda(\{x_k\})\rangle = \frac{1}{N^{|\lambda|/2}} s_\lambda(\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\}) \prod_{\omega\in\lambda}(N + c(\omega)) \,. \tag{68}$$

Поэтому изначальный интеграл, как функция от N, в бозоном представлении имеет вид:

$$\sum_{\{\lambda||\lambda|=even\}} \frac{1}{N^{|\lambda|/2}}\langle s_\lambda(\{x_k\})\rangle = \frac{1}{N^{|\lambda|/2}} s_\lambda(\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\}) \prod_{\omega\in\lambda}(N + c(\omega)) s_\lambda(Nt) \,. \tag{69}$$

Следовательно, в пределе $N \to \infty$ для $\hbar = \frac{1}{N}$ получим рпзложение

$$\sum_{\{\lambda||\lambda|=even\}} s_\lambda(\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\}) \frac{\prod_{\omega\in\lambda}(1 + \hbar c(\omega))}{\hbar^{|\lambda|/2}} s_\lambda\left(\frac{t}{\hbar}\right) =$$

$$\sum_{\{\lambda||\lambda|=even\}} s_\lambda(\{\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\}) r^\hbar(c(\lambda)) s_\lambda\left(\frac{t}{\hbar}\right) \,. \tag{70}$$

Зная, что при $\hbar = 1$ коэффициенты в разложении по полиномам Шура удовлетворяли соотношениям Плюккера, мы получаем, что и коэффициенты в разложении (70) удовлетворяют соотношениям Плюккера, т.к. отличаются только на множитель $\hbar^{|\lambda|/2}$, который дает одинаковый вклад во все слагаемые соотношения Плюккера. Поэтому интеграл (66) является решением $\hbar$-КП с тем же параметром $\hbar$, что и в разложении по родам, т.к. получен из классической τ-функции перескалированием времен.

Этот случай не описывается деформацией Орлова-Щербина, однако является примером деформации Такасаки-Такебе. Здесь оператор $A(\beta)$ деформируется следующим образом:

$$A^\hbar(\beta) = \frac{1}{2}A_2^\hbar = \frac{1}{2\pi i}\oint : \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\hbar} z} r(\hbar D)\right)^2 \psi(z)\right] : \,. \tag{71}$$

7 Модель Брезина-Гросса-Виттена

В этом разделе мы приведем пример еще одной матричной модели, являющейся решением КП. Особенностью этой модели является существование двух фаз с различными разложениями по родам, причем каждая из них является решением $\hbar$-КП. Статсумма модели Березина-Гросса-Виттена определяется следующим образом [17]

$$Z_{BGWM}(J,J^+) = \frac{1}{V_N}\int_{N\times N}\mathcal{D}U\exp(Tr(J^+U+JU^+))\,, \tag{72}$$

где интегрирование ведется по унитарным матрицам $N\times N$ с мерой Хаара $\mathcal{D}U$ и $V_N=\int_{N\times N}\mathcal{D}U$ - объем унитарной группы.

Т. к. мера Хаара инвариантна, $Z_{BGWM}(J,J^+)$ зависит только от N параметров - собственных значений матрицы JJ^+. В зависимости от выбора переменных t_k, по которым рассматривается разложение статсуммы, в данной модели существует 2 "фазы":

$$t_k = \frac{1}{k}Tr(JJ^+)^k \text{ - фаза характеров} \tag{73}$$

$$t_k = -\frac{1}{2k-1}Tr(JJ^+)^{-k+\frac{1}{2}} \text{ - фаза Концевича} \tag{74}$$

Будем обозначать статсумму, как ряд по t_k, в фазе характеров - Z^+_{BGWM}, в фазе Концевича - Z^-_{BGWM}

Фаза характеров является решением КП и имеет простое разложение по полиномам Шура [18]:

$$Z^+_{BGWM}(J,J^+) = \sum_\lambda \frac{d_\lambda^2}{D_\lambda}\chi_\lambda(JJ^+) = \sum_\lambda \frac{d_\lambda^2}{D_\lambda}s_\lambda(\{t_k=Tr(JJ^+)^k/k\}) \tag{75}$$

Здесь $\chi_\lambda(M)$ характер элемента M в представлении, соответствующем диаграмме λ. $d_\lambda = s_\lambda(1,0,0,\dots)$ - размерность неприводимого представления группы перестановок $S_{|\lambda|}$, соответствующего диаграмме λ. $D_\lambda=\chi_\lambda(\mathbb{1})=s_\lambda(1,\frac{1}{2},\dots)$ - размернось неприводимого представления $GL(N)$, соответствующего диаграмме λ. Отношение D_λ/d_λ переписывается через содержание диаграммы λ:

$$\frac{D_\lambda}{d_\lambda} = \prod_{\omega\in\lambda}(N+c(\omega)) \tag{76}$$

Поэтому модель БГВ в фазе характеров является гипергеометрической τ-функцией с параметрами $\beta=(1,0,0,\dots)$:

$$Z^+_{BGWM} = \sum_\lambda\left(\prod_{\omega\in\lambda}\frac{1}{N+c(\omega)}\right)s_\lambda(1,0,0,\dots)s_\lambda(t) \tag{77}$$

Можно применить деформацию Казаряна-Ландо в этой фазе

$$Z^+_{\hbar BGWM} = \sum_\lambda\frac{1}{\hbar^{|\lambda|}}\left(\prod_{\omega\in\lambda}\frac{1}{N+\hbar c(\omega)}\right)s_\lambda(1,0,0,\dots)s_\lambda(t/\hbar)\,, \tag{78}$$

и рассмотреть разложение по родам логарифма статсуммы

$$F^+_{\hbar BGWM} = \hbar^2\log(Z^+_{\hbar BGWM}) = \left(\frac{t_1}{N}+\frac{t_1^2}{2N^4}-\frac{t_2}{N^3}+\dots\right)+$$

$$+\hbar^2\left(\frac{t_1^2}{2N^6}-\frac{t_2}{N^5}+\dots\right)+\hbar^4\left(\frac{t_1^2}{2N^8}-\frac{t_2}{N^7}+\dots\right)+\dots \tag{79}$$

В фазе Концевича можно получить разложение по родам, совпадающее с топологической рекурсией для этой модели, введением $1/\hbar$ в показатель экспоненты под интегралом [19]:

$$Z^{-}_{\hbar BGWM}=\frac{1}{V_N}\int_{N\times N}\mathcal{D}U\exp\left(\frac{1}{\hbar}Tr(J^+U+JU^+)\right) \tag{80}$$

Эта статсумма получается из (72) перескалированием $J\to J/\hbar$, что означает перескалирование времен (74) на $\hbar^{2k-1}$: $t_k\to t_k\hbar^{2k-1}$. Поэтому, если изначальная статсумма Z^{-}_{BGWM} имеет разложение по полиномам Шура в виде

$$Z^{-}_{BGWM}=\sum_{\lambda}c_\lambda s_\lambda(t)\,, \tag{81}$$

то (80) раскладывается как

$$Z^{-}_{\hbar BGWM}=\sum_{\lambda}c_\lambda\hbar^{2|\lambda|}s_\lambda(t/\hbar)\,. \tag{82}$$

Здесь коэффициенты $c^{\hbar}_{\lambda}=\hbar^{2|\lambda|}c_\lambda$ удовлетворяют соотношениям Плюккера, т.к. множитель $\hbar^{2|\lambda|}$ дает одинаковый вклад во все слагаемые каждого соотношения Плюккера. Поэтому $Z^{-}_{\hbar BGWM}$ является решением $\hbar$-КП.

Разложение по родам в этой фазе отличается от фазы характеров:

$$F^{-}_{\hbar BGWM}=\hbar^2\log(Z^{-}_{\hbar BGWM})=0-\hbar^2\frac{1}{2}\log(1-\frac{t_1}{2})+\dots \tag{83}$$

Т.е. бездисперсионный предел этого решения совпадает с бездисперсионным пределом тривиальной τ-функции ($\tau\equiv 1$), поэтому два различных решения $\hbar$-КП могут иметь одинаковый бездисперсионный предел.

8 Соотношения Плюккера и $\hbar$-КП

В этом разделе мы покажем, что детерминантные соотношениямя (26) в действительности являются линейными комбинациями соотношений Плюккера на коэффициенты в разложении по полиномам Шура.

Рассмотрим произвольную функцию

$$g^{\hbar}(t_1, t_2, \dots) = \sum_{\lambda} c_\lambda s_\lambda(\frac{t}{\hbar}) \,, \tag{84}$$

являющуюся формальным рядом Лорана по $\hbar$ и формальным рядом Тейлора по переменным t.

Будем изучать сдвиг на x по t_1. Для этого снова разложим сдвинутую функцию по полиномам Шура

$$g^{\hbar}(t_1 + x, t_2, t_3, \dots) = \sum_{\mu} B_\mu(x) s_\mu(\frac{t}{\hbar}) \,. \tag{85}$$

Чтобы это сделать, найдем разложение сдвинутого полинома Шура. Это можно сделать, воспользовавшись ортонормированным скалярным произведением, заданным на пространстве полиномов Шура с помощью тождества Коши-Литтлвуда:

$$\left[\sum_{\lambda}(y) s_\lambda\left(\left\{\tilde{\partial}_k\right\}\right)\right] s_\mu(t)\Big|_{t=0} = \exp(\sum_{k\geq 1} y_k \partial_k) s_\mu(t)\Big|_{t=0} = s_\mu(t+y)\Big|_{t=0} = s_\mu(y) \Rightarrow \tag{86}$$

$$(s_\lambda, s_\mu) = s_\lambda(\{\tilde{\partial}_k\}) s_\mu(t)\Big|_{t=0} = \delta_{\lambda\mu} \,. \tag{87}$$

Найдем проекцию $s_\lambda(t_1 + x, t_2, \dots)$ на $s_\mu(t)$:

$$s_\mu(\{\tilde{\partial}_k\}) e^{x\partial_1} s_\lambda(t)\Big|_{t=0} = C(\mu, \lambda) \frac{x^{|\lambda|-|\mu|}}{(|\lambda| - |\mu|)!} \,, \tag{88}$$

где коэффициент

$$C(\mu, \lambda) = s_\lambda(\{\frac{\partial_k}{k}\})(s_{(1)}(t))^{|\lambda|-|\mu|} s_\mu(t)\Big|_{t=0} \tag{89}$$

равен количеству способов получить диаграмму λ из диаграммы μ последовательным добавлением по одной клетке так, чтобы на каждом шаге получалась диаграмма Юнга. Поэтому очевидно свойство

$$C(\mu, \lambda) = \sum_{\{\nu | |\nu| = k\}} C(\mu, \nu) C(\nu, \lambda), \; \forall k: \; |\mu| \leq k \leq |\lambda| \,. \tag{90}$$

Зная разложение сдвинутого полинома Шура, получим общий вид коэффициентов $B_\mu(x)$:

$$B_\mu(x) = \sum_{\{\lambda | \mu \subset \lambda\}} c_\lambda C(\lambda, \mu) \frac{(x/\hbar)^{|\lambda|-|\mu|}}{(|\lambda| - |\mu|)!} \,. \tag{91}$$

Используя теперь свойство (90) для $k = |\mu|+1$, можно получить правило дифференцирования коэффициентов B_μ:

$$\hbar \partial B_\mu(x) = \sum_{\lambda = \mu + (1)} B(\lambda)(x) \,, \tag{92}$$

где сумма берется по всем диаграммам Юнга λ, полученным добавлением одной клетки к μ.

Удобно также параметризовать коэффициенты $B_\mu(x)$ с помощью диаграмм Майя, тогда возникает свобода выбора заряда этой диаграммы, от которого не зависит соответствующая диаграмма Юнга. В терминах диаграмм Майя предыдущее свойство перепишется в виде

$$\hbar\partial B_{m_1,m_2,\dots}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{m_1,\dots,m_k-1,\dots}(x)\,. \tag{93}$$

Здесь мы считаем, что коэффициент равен нулю, если получилась не диаграмма Майя, поэтому любая сумма окажется конечной.

Покажем, что детерминантная формула (26) следует из соотношенияй Плюккера на коэффициенты B, которые в свою очередь эквивалентны соотношениям Плюккера на коэффициенты c. Второе следует из того, что сдвинутая по t_1 τ-функция тоже является τ-функцией.

Разложим детерминант

$$det_\lambda \equiv (B_0)^{-\ell(\lambda)} \det_{1\le i,j\le\ell(\lambda)} \left[\sum_{k=0}^{j-1}(-\hbar)^k C_{j-1}^k \partial_x^k B_{\lambda_i-i+j-k}(c)\right] \tag{94}$$

по последнему столбцу и запишем в терминах диаграмм Майя:

$$\begin{aligned} det_\lambda = (-1)^{\ell(\lambda)} \sum_{n=1}^{l(\lambda)} (-1)^n B_{\{m_1,\dots,\hat{m}_n,\dots,m_{\ell(\lambda)},\ell(\lambda)-\frac{1}{2},\dots\}} \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{\ell(\lambda)-1}(-1)^k C_{j-1}^k (\hbar\partial)^k B_{\{m_n+1-\ell(\lambda)+k,\frac{3}{2},\dots\}}\right)\,. \end{aligned} \tag{95}$$

Здесь мы воспользовались тем, что вычеркивая n-ую строку и последний столбец, мы получаем аналогичный детерминант для диаграммы λ без n-ой строки, что соответствует вычеркиванию из диаграммы Майя n-ого элемента m_n.

Разность $B_\lambda B_0 - det_\lambda$ можно записать в виде одной суммы:

$$\begin{aligned} B_\lambda B_0 - det_\lambda = (-1)^{\ell(\lambda)+1} \sum_{n=1}^{\ell(\lambda)+1} (-1)^n B_{\{m_1,\dots,\hat{m}_n,\dots,m_{\ell(\lambda)},\ell(\lambda)-\frac{1}{2},\dots\}} \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{l(\lambda)-1}(-1)^k C_{j-1}^k (\hbar\partial_x)^k B_{\{m_n+1-\ell(\lambda)+k,\frac{3}{2},\dots\}}\right)\,. \end{aligned} \tag{96}$$

Тогда равенство нулю этого выражения эквивалентно выполнению детерминантного соотношения (26).

Для того, чтобы переписать эту сумму в форме уравнений Плюккера, введем операторы:

$$i_{m_k} B_{\{n_1,n_2,\dots\}} = B_{\{m_k,n_1,n_2,\dots\}}\,, \tag{97}$$

$$P_{\{m_1,m_2,\dots\}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k B_{m_1,\dots,\hat{m}_k,\dots} i_{m_k}\,. \tag{98}$$

Очевидно тогда, что выполнение уравнений Плюккера (20) эквивалентно действию нулем операторов $P_{\{m_1,m_2,\dots\}}$ на все коэффициенты B с зарядом -1. Отметим, что для фиксированного коэффициента B сумма в определении операторов P конечна.

Коммутатор оператора подстановки i_{m_k} и взятия производной равен:

$$[i_{m_k}, \hbar\partial_x] = -i_{m_k-1} \,. \tag{99}$$

Следовательно,

$$i_{m_k}(\hbar\partial_x)^l = \sum_{p=0}^{l-1}(-1)^p C_{l-1}^p (\hbar\partial)^{l-1-p} i_{m_k-p} \tag{100}$$

и

$$P(\hbar\partial_x)^{l-1} = (-1)^{l-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_{\{m_1,\ldots,\hat{m}_n,\ldots\}}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k C_{l-1}^k (\hbar\partial_x)^k i_{m_n-l+1+k}\right) \,. \tag{101}$$

Подействовав полученным оператором на диаграмму $B_{\{\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots\}}$, получим выражение (96), поэтому действие нулем операторов P эквивалентно детерминантному соотношению (26). Это означает, что (26) является линейной комбинацией соотношений Плюккера.

9 Бездисперсионный предел и восстановление решений

Как уже было указано, у решений $\hbar$-КП существует предел $\hbar \to 0$, который является решением бездисперсионной иерархии КП. Возникает вопрос об обратной процедуре: возможно ли по произвольному бездисперсионному пределу восстановить полное решение? Т.к. несколько различных решений могут иметь один и тот же бездисперсионный предел, то можно потребовать, чтобы восстановленное решение принадлежало семейству Орлова-Щербина (возможно с параметрами $\beta = (1, 0, 0, \dots)$). Т.к. полное решение определяется Коши-подобными данными (29), то необходимо научиться восстанавливать набор функций $f_k(x)$ зная их нулевой порядок $f_k^{(0)}(x)$ в разложении по степеням $\hbar$.

Воспользовавшись связью коэффициентов в бозонном представлении τ-функции с Коши-подобными даными, можно переформулировать задачу в терминах c_λ. Для этого заметим, что частное коэффициентов $c_{(k)}$ и c_0 не содержит степеней $\hbar$ меньших, чем $-k$. Действительно, т.к. Коши-подобные данные $f_k(x)$ должны содержать только неотрицательные степени $\hbar$, то $\frac{c_{(k)}(x)}{c_0} = s_{(k)}(\{\frac{1}{l\hbar} f_l\})$ не содержит степеней $\hbar$ меньше $-k$ как полином степени k.

Можно теперь обратить соотношения (30) и (31), воспользовавшись производящей функцией для симметрических полиномов Шура:

$$\sum_{k\geq 0} z^k \frac{c_{(k)}(x)}{c_0(x)} = \exp\left(\sum_{k\geq 1} z^k \frac{1}{\hbar k} f_k(x)\right) . \tag{102}$$

Взяв логарифм и разложив левую часть в ряд, получим:

$$f_k = \hbar k \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_{(p_i)}}{c_0}\right) . \tag{103}$$

Покажем, как можно восстановить некоторое решение $\hbar$-КП из бездисперсионного предела. Как было показано в разделе 8, выполнение детерминантных соотношений является следствием двух свойств: выполнение соотношений Плюккера для коэффициентов c_λ и особый вид производной (93) от коэффициентов c_λ. Если нам необходимо получить хотя бы какое-то решение $\hbar$-КП, то можно воспользоваться свободой выбора недостающих данных и задать $c_{(k,1)} = 0$.

Найдем производную функции f_k:

$$\hbar\partial f_k = \hbar k \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{p_1}\dots c_{p_{j-1}}(c_{p_j+1} + c_{(p_j,1)})c_{p_{j+1}}\dots c_{p_n}}{c_0^n} - n\frac{c_{p_1}\dots c_{p_n}c_1}{c_0^n}\Big) =$$

$$= \hbar k \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{p_1}\dots c_{p_{j-1}}c_{p_j+1}c_{p_{j+1}}\dots p_{k_n}}{c_0^n} - \hbar k \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \frac{c_{p_1}\dots c_{p_n}c_1}{c_0^n} =$$

(Сделаем замену переменных во вотром слагаемом $n' = n + 1$)

$$= \hbar k \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{p_1}\dots c_{p_{j-1}}c_{p_j+1}c_{p_{j+1}}\dots p_{k_n}}{c_0^n} +$$

$$+ \hbar k \sum_{n'=2}^{k+1} (-1)^{n'+1} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_{n'-1}>0 \\ p_1+\dots+p_{n'-1}=k}} \frac{c_{p_1}\dots c_{p_{n'-1}}c_1}{c_0^{n'}} =$$

(Перегруппируем слагаемые по количеству сомножителей c в числителе $(n' \to n)$)

$$= \hbar k \frac{c_{k+1}}{c_0} + \hbar k \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_{j-1}} c_{p_j+1} c_{p_{j+1}} \cdots c_{p_n}}{c_0^n} \right) + \right.$$

$$\left. + n \sum_{\substack{p_1,\dots,p_{n-1}>0 \\ p_1+\dots+p_{n-1}=k}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_{n-1}} c_1}{c_0^n} \right) \right] + \hbar k \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k>0 \\ p_1+\dots+p_k=k}} (-1)^{k+2} \frac{c_{p_1} \cdots c_{p_k} c_1}{c_0^{k+1}} =$$

(Первое слагаемое в квадратных скобках можно переписать, сделав замену $p_j + 1 \to p_j$. Второе можно рассматривать как сумму по j от 1 до n, где $p_j = 1$)

$$= \hbar k \frac{c_{k+1}}{c_0} + \hbar k \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0;\, p_j>1 \\ p_1+\dots+p_n=k+1}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_{j-1}} c_{p_j} c_{p_{j+1}} \cdots c_{p_n}}{c_0^n} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0;\, p_j=1 \\ p_1+\dots+p_n=k+1}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_n}}{c_0^n} \right) \right] + \hbar k \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k>0 \\ p_1+\dots+p_k=k}} (-1)^{k+2} \frac{c_{p_1} \cdots c_{p_k} c_1}{c_0^{k+1}} =$$

(Теперь объединим слагаемые в квадратных скобках в одну сумму)

$$= \hbar k \frac{c_{k+1}}{c_0} + \hbar k \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k+1}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_n}}{c_0^n} \right) \right] +$$

$$+ \hbar k \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k>0 \\ p_1+\dots+p_k=k}} (-1)^{k+2} \frac{c_{p_1} \cdots c_{p_k} c_1}{c_0^{k+1}} =$$

(Сумма по j даст множитель n)

$$= \hbar k \frac{c_{k+1}}{c_0} + \hbar k \sum_{n=2}^{k} (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k+1}} \left(\frac{c_{p_1} \cdots c_{p_n}}{c_0^n} \right) +$$

$$+ \hbar k \sum_{\substack{p_1,\dots,p_k>0 \\ p_1+\dots+p_k=k}} (-1)^{k+2} \frac{c_{p_1} \cdots c_{p_k} c_1}{c_0^{k+1}} =$$

(Здесь, в последней сумме, на самом деле присутствует только одно слагаемое, соответствующее $p_1 = \dots = p_k = 1$. Поэтому его можно воспринимать как сумму по $p_1, \dots, p_{k+1} > 0$ таких, что $p_1 + \dots + p_{k+1} = k+1$ от $\frac{c_{p_1} \dots c_{p_{k+1}}}{c_0^{k+1}}$. Следовательно, все слагаемые можно собрать в одну сумму)

$$= \hbar k \sum_{n=1}^{k+1} (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n>0 \\ p_1+\dots+p_n=k+1}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_{p_i}}{c_0} \right)$$

Аналогично, можно найти старшие производные:

$$(\hbar \partial)^p f_k = \hbar k \sum_{n=1}^{k+p} (-1)^{n+1} n^{p-1} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n>0 \\ k_1+\dots+k_n=k+p}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_{(k_i)}}{c_0} \right) . \tag{104}$$

Отсюда видно, что коэффициент f_k можно выразить как линейную комбинацию производных от младших коэффициентов f_n при $n<k$ и f_1^k:

$$f_k = \frac{ky}{\hbar^{k-1}} f_1^k + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k}{k-n} x_n (\hbar\partial)^n f_{k-n}\,, \tag{105}$$

разрешив систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-2} \\ 0 & 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & k & k^2 & \dots & k^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \dots \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}\,. \tag{106}$$

Если переписать (105), разложив по степеням $\hbar$, то получим соотношения:

$$f_k^{(m)} = ky(f_1^k)^{(m+k-1)} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k}{k-n} x_n (\partial)^n f_{k-n}^{(m-n)}\,, \tag{107}$$

которые позволяют восстанавливать старшие степени f по $\hbar$, если зафиксировать произвольным образом старшие степени по $\hbar$ для $f_1 = \partial(f_0)$ (например положить их равными нулю).

Таким образом, всегда возможно восстановить некоторое нетривиальное решение, однако оно не обязательно будет принадлежать семейству гипергеометрических τ-функций. В частности, полученные соотношения (105) не выполняются для производящей функции чисел Гурвица. Для того, чтобы получить в качестве восстановленного решения τ-функцию Орлова-Щербина, необходимо учесть нетривиальные соотношения на коэффициенты c_λ, зависящие в этом случае от функций от содержания диаграмм. Например, для чисел Гурвица (по крайней мере в младших порядках) выполняется соотношение

$$f_2^{(2)} = \frac{4}{ux} f_1^{(2)}\,, \tag{108}$$

которое никак не следует из соотношений Плюккера и свойства взятия производных.

10 Заключение

В заключении укажем основные результаты работы.

- Показано, что, с одной стороны, деформация Казаряна-Ландо является частным случаем деформации Такасаки-Такебе гипергеометрических τ-функций с параметрами $\beta = (1, 0, 0, \dots)$. С другой стороны, деформация Казаряна-Ландо совпадает с формальной деформацией КП.

- Показано, что предел бесконечных матриц в эрмитовой матричной модели является решением $\hbar$-КП, причем формальный параметр $\hbar = \frac{1}{N}$, отвечающий за разложение по родам, совпадает с параметром деформации иерархии КП. Кроме того, эта деформация совпадает с подходом Такасаки-Такебе к деформации τ-функций.

- Показано, что обе фазы матричной модели БГВ являются τ-функциями $\hbar$-КП с параметром $\hbar$, совпадающим с таким же параметром в топологической рекурсии. Кроме того, фаза характеров принедлежит семейству гипергеометрических τ-функций с $\beta = (1, 0, 0, \dots)$, а потому имеет геометрический смысл в терминах чисел Гурвица с весами.

- Приведено явное соответствие между соотношениями Плюккера классической иерархии КП и детерминантных соотношений в $\hbar$-КП.

- Приведен способ восстановления нетривиального решения $\hbar$-КП из бездисперсионного предела, которое, однако, не всегда является решением семейства Орлова-Щербина и, в частности, не позволяет восстанавливать производящую функцию чисел Гурвица.

Существует также несколько вопросов, с которыми могут быть связаны дальнейшие исследования.

- Можно ли получить универсальный комбинаторный способ восстановления решений Орлова-Щербина из бездисперсионного предела? В том числе, любое ли решение бездисперсионного КП является пределом некоторой τ-функции Орлова-Щербина, и может ли существовать две такие τ-функции с одним и тем же пределом? Как уже было сказано в разделе 8, для исследования этих вопросов нужно искать нетривиальные соотношения на коэффициенты c_λ, как следствие их конкретного вида в семействе Орлова-Щербина.

- Если такой способ восстановления существует, то как он связан с топологической рекурсией для семейства Орлова-Щербина? В частности, для чисел Гурвица уже известна спектральная кривая и доказана топологическая рекурсия [20], поэтому интересно связать ее с другим подходом к восстановлению старших степеней по $\hbar$.

- Являются ли другие матричные модели, такие как модель Концевича или BGW, τ-функциями семейства Орлова-Щербина? И как их разложение по родам связано с разложением по $\hbar$ как τ-функций $\hbar$-КП.

- Другим вопросом, связанным с числами Гурвица, является вопрос об интерпретации детерминантных соотношений (26) в терминах матричной модели. Они, например, могут оказатся тождествами Уорда в некотором специальном виде.

Список литературы

[1] A Yu Morozov. Integrability and matrix models. *Physics-Uspekhi*, 37(1):1–55, jan 1994.

[2] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, and A. Zabrodin. Matrix models among integrable theories: Forced hierarchies and operator formalism. *Nuclear Physics B*, 366(3):569 – 601, 1991.

[3] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix airy function. *Commun.Math. Phys.*, 147:1–23, 1992.

[4] Казарян М. Э. и Ландо С. К. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий. *Успехи математических наук*, 70(3 (423):77–106, 2015.

[5] S M Natanzon and A V Zabrodin. Formal solutions to the kp hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(14):145206, Feb 2016.

[6] Kanehisa Takasaki and Takashi Takebe. hbar-expansion of kp hierarchy: Recursive construction of solutions, 2009.

[7] Tetsuji Miwa, Masaki Jinbo, Michio Jimbo, and E Date. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, volume 135. Cambridge University Press, 2000.

[8] Andrei Okounkov. Toda equations for hurwitz numbers. *arXiv preprint math/0004128*, 2000.

[9] Maxim Kazarian and Sergei Lando. An algebro-geometric proof of witten's conjecture. *Journal of the American Mathematical Society*, 20(4):1079–1089, 2007.

[10] IP Goulden, DM Jackson, and A Vainshtein. The number of ramified coverings of the sphere by the torus and surfaces of higher genera. *Annals of Combinatorics*, 4(1):27–46, 2000.

[11] A Yu Orlov and DM Scherbin. Multivariate hypergeometric functions as τ-functions of toda lattice and kadomtsev–petviashvili equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 152:51–65, 2001.

[12] Alexander Alexandrov. From hurwitz numbers to kontsevich–witten tau-function: a connection by virasoro operators. *Letters in Mathematical Physics*, 104(1):75–87, 2014.

[13] J Harnad. Weighted hurwitz numbers and hypergeometric τ-functions: an overview. In *Proc. Symp. Pure Math*, volume 93, pages 289–333, 2016.

[14] S Kharchev, A Marshakov, A Mironov, and A Morozov. Generalized kazakov-migdal-kontsevich model: group theory aspects. *International Journal of Modern Physics A*, 10(14):2015–2051, 1995.

[15] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[16] A. Mironov and A. Morozov. On the complete perturbative solution of one-matrix models. *Physics Letters B*, 771:503–507, Aug 2017.

[17] A Mironov, A Morozov, and Gordon W Semenoff. Unitary matrix integrals in the framework of the generalized kontsevich model. *International Journal of Modern Physics A*, 11(28):5031–5080, 1996.

[18] A Yu Morozov. Unitary integrals and related matrix models. *Theoretical and Mathematical Physics*, 162(1):1–33, 2010.

[19] Alexander Alexandrov. Cut-and-join description of generalized brezin-gross-witten model. *arXiv preprint arXiv:1608.01627*, 2016.

[20] Alexander Alexandrov, Guillaume Chapuy, Bertrand Eynard, and John Harnad. Weighted hurwitz numbers and topological recursion: an overview. *Journal of Mathematical Physics*, 59(8):081102, 2018.