Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Проблемы теоретической физики

# Взаимосвязь между уравнением Ландау-Лифшица и полевой системой Калоджеро-Мозера

(магистерская диссертация)

**Студент:**
Аталиков Кантемир Русланович

**Научный руководитель:**
Зотов Андрей Владимирович,
д-р физ.-мат. наук, проф.

Москва 2020

**Аннотация**

Взаимосвязь между волчком Эйлера-Арнольда и системой Калоджеро-Мозера (система частиц, которые взаимодействуют попарно) является уже известным примером соответствия двух интегрируемых систем в классической механике. Суть этой связи заключается в том, что угловые моменты волчка Эйлера $S$ выражаются через переменные Калоджеро-Мозера $p$, $q$ и константу связи $\nu$. При этом эквивалентность гамильтонианов для обоих систем сохраняется.

Данная работа посвящена обобщению соответсвия между волчком Эйлера-Арнольда и системой Калоджеро-Мозера до соответвия между системой Калоджеро-Мозера (полевой случай) и уравнением Ландау-Лифшица для рационального, тригонометрического и эллиптического случаев. Другими словами, в данной работе рассматривается интегрируемая система (1+1)-теория поля. Отсюда следует, что при переходе от классической механики к теории поля, переменные $S$, $p$ и $q$ из классической механики заменяются на поля $S(x)$, $p(x)$, $q(x)$, а константа связи становится динамической $\nu(x)$.

В данной работе рассматривается калибровочная эквивалентность между полевым обобщением Калоджеро-Мозера и уравнением Ландау-Лифшица (ЛЛ). А именно, рассматривается вычисление явных замен переменных (компоненты вектора намагниченности ЛЛ). Затем была проверена эквивалентность гамильтонианов и переход из канонической скобки Пуассона в алгебру петель.

# Содержание

# 1. Введение

Интегрируемые системы, в частности классической механике, представляют собой особый случай систем дифференциальных уравнений с нужным числом независимых интегралов движения. Одним из таких уравнений является уравнение Лакса

$$\partial_t L = [L, M] \tag{1.1}$$

где $L$ и $M$ - пара Лакса. Матрица Лакса $L(t)$ в процессе эволюции подвергается преобразованию подобия

$$L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \quad M = -\partial_t g g^{-1} \tag{1.2}$$

т.е. собственные значения $L(t)$ не зависит от времени и являются интегралами движения.

Также уравнение (1.1) можно представить со спектральным параметром $z$ в виде

$$\partial_t L(z) = [L(z), M(z)] \tag{1.3}$$

Такой вид уравнения впервые появился в работе И. Кричевера и С. Новикова [1]. Из такого представление следует, что инварианты $Tr(L(z)^k)$ являются интегралами движения и производящими функциями законов сохранения.

Уравнение Лакса со спектральным параметром играет существенно важную роль для исследование интегрируемых (в данной работе это относится в первую очередь к классической механике). Существует преобразование, которая переводит одну систему в другую. На языке матриц Лакса это выглядит как калибровочное преобразование вида $L_1(z) = g(z)L_2(z)g^{-1}(z)$, которая применяется в каждом разделе данной работы.

Как уже было сказано, уравнение Лакса приобретает особое преимущество в классической механике, но существует уравнение, которое описывает (1+1)-интегрируемые теория поля

$$\partial_t L - k\partial_x M = [L, M] \tag{1.4}$$

Это уравнение нулевой кривизны называется уравнение Захарова-Шабата - уравнение в частных производных, законы сохранение которого получаются методом обратной задачи рассения, разработанный Л. Фаддеевым, В. Захаровым и А. Шабатом [2]. В случаи уравнения (1.4), импульсы и кординаты частиц заменяются на поля

$$\{p, q\} = 1 \longrightarrow \{p(x), q(y)\} = \delta(x - y)$$

Переменную $x$ можно представить как координату на вещественной прямой или окружности. Считается, что все поля - это периодические функции на окружности, а гамильтонин задается интегралом $H = \oint h(x)$ ([12], [13], [15]). Здесь $Tr(L^k)$ уже не являются сохраняющимися величинами, а вычисление плотности $h(x)$ является нетривиальной задачей. Система преобразований при полевом случаи имеет следующий вид $L_1 = gL_2g^{-1} - kg\partial_x g^{-1}$.

Сверху мы ознакомились с интегрируемыми системами, которые имеют представления Лакса или Захарова-Шабата. В этих случаях калибровочные преобразования сопутствующих линейных уравнений приводят по существу к одним и тем же системам, хотя их уравнения движения существенно различаются. Например, то же самое уравнение Захарова-Шабата калибровочно эквивалентна модели магнетика Ландау-Лифшица [10]. Уравнение Ландау-Лифшица [6] - это уравнение, которое описывает поведение вектора намагниченности в ферромагнетике (Ферромагнетики - это вещества, обладающие самопроизвольной намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий). В работе [17] была доказана эквивалентность магнетика Гейзенберга (магнетик Ландау-Лифшица) нелинейному уравнению Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad -\infty < x, \quad t < \infty \tag{$*$}$$

Таким образом, интегрируемая система (как и в классической механике, так и в теории поля) должна классифицироваться до калибровочной эквивалентности, хотя это не единственный принцип эквивалентности в их возможных классификациях. Важной и тонкой точкой этого подхода является точное определение допустимых калибровочных преобразований. Одним из таких примеров в классической механике (работа [15] и [16]) является взаимосвязь Калоджеро-Мозера [3] и эллиптического Волчка Эйлера-Арнольда $SL(2,\mathbb{C})$, пара Лакса которого была предложена в работе [4]. При такой взаимосвязи были получены замены переменных $S$, которые выражаются через переменные $p$, $q$ и констану связи $\nu$. В данной работе были получены примерно такие же замены в случаи (1+1)-теории поля.

Опишем подробнее содержание дипломной работы.

**В главе 2** выполнены ряд следующих рациональных задач. Во первых демонстрируется уже решенные задачи для классической механики, а именно при помощи производящей функции получены следующие гамильтонианы

$$H^{tor} = \frac{1}{2}Tr(SJ(S)) \tag{1.5}$$

$$H^{\mathrm{KM}} = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8q^2} \tag{1.6}$$

которые характеризуются следующими уравнениями движения

$$\dot{S} = \{H, S\} = [J(S), S], \tag{1.7}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\nu^2}{4q^3}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{1.8}$$

где $S$ - замены переменных, выраженные через $p$, $q$ и $\nu$ при помощи калибровочного преобразования $L^{\mathrm{top}}(z) = g(z)L^{\mathrm{CM}}(z)g^{-1}(z)$ (статья [11]). Следовательно инвариант $\frac{1}{2}Tr(L(z)^2)$ переводит одну систему в другую и гамильтонианы обоих систем совпадают (с учётом полученных замен переменных $S$).

Дальше демонстрируется обобщение классической механике до (1+1)-теория поля. А именно указан простой способ полученние гамильтонианов для поле, которые описывают следующие уравнение движение

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha\,[S, S_{xx}] \tag{1.9}$$

$$\dot{q} = p\left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2}\right), \quad c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2} \tag{1.10}$$

$$\dot{p} = -\frac{k^2}{c^2}\partial_x\left(p^2 q_x\right) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^3} + \frac{3k^2}{4}\partial_x\left(\frac{q_x}{q^2}\right) + \frac{k^4}{4}\partial_x\left(\frac{q_{xxx}\nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3}\right) \tag{1.11}$$

где (1.9) - уравнение Ландау-Лифшица [6], которое, как уже известно, описывает поведение вектора намагниченности в ферромагнетике. А также, это непрерывный предел классической интегрируемой спиновой цепочки, составленной из угловых моментов в волчке Эйлера. Сама процедура $L^{\mathrm{LL}} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} - kg\partial_x g^{-1}$ устанавливает калибровочную эквиваленьность уравнений (1.9), (1.10) и (1.11). Такой результат можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{2 - х-частичная система КМ}} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\text{SL(2) - рациональный волчок ЭА}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{2 - х-частичная теория поля КМ}} \arrow[r] & \boxed{\text{уравнение Ландау-Лифшица}}
\end{tikzcd}$$

Следует иметь ввиду, что выше описанные действия - это демонстрация уже давно известных задачи [13, 16]. Однако, каждая из этих задач играет существенно важную роль для проверки калибровочной эвивалентности между ЛЛ и 1+1 полевой системой КМ.

В итоге при наличии матриц Лакс (для ЛЛ и полевого КМ) и калибровочного преобразование $L^{\text{LL}} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} - kg\partial_x g^{-1}$, получаются замены переменных $S(x)$, которые выражаются через $p(x)$, $q(x)$, $\nu(x)$. При этом матрицу перехода $g$ должна быть такой, чтобы она зануляла собственный вектор вычета матрицы Лакса Калоджеро в ядре ($z = 0$). Затем было установлено, что полученные замены переменных переводят канонические скобки Пуассона на алгебру петель. И наконец проверено совпадение гамильтонианов моделей ЛЛ и КМ.

**В главе 3** рассматривались такие же задачи для классической механике [12] и поля, как и в предыдущей главе, но для тригонометрического случая. Другими словами мы обобщили все задачи из предыдушего раздела до тригонометрического случая, включая вычисления явных замен переменных $S(x)$, которые переводят те же скобки Пуассона в алгебру петель и сохраняют эквивалентность гамильтонианов.

**В главе 4**, как и в предыдущем разделе (тригонометрический случай), рассматривалось обобщение всех предыдущих задач до эллиптического случая. Главная особенность этого раздела - это тождества из приложения, которые используются в данном разделе.

**В заключении** подводятся результаты и перечисляются дальнейшие планы данной работы.

**В приложении** представлены основные формулы, которые применялись к 4 главе.

**В списке литературы** представлены статьи, которые были использованы для данной работы;

# 2. Рациональный случай

## 2.1. Выписать полное исходное описание системы Волчка Эйлера в рациональном случае

**Утверждение:**

При наличии матрицы Лакса вида

$$L = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(S_{11}-S_{22}) - z^2 S_{12} & S_{12} \\ S_{21} - z^2\left(S_{11}-S_{22}\right) - z^4 S_{12} & \frac{1}{2}(S_{22}-S_{11}) + z^2 S_{12} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

и скобки Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}, S_{kl}\} = S_{il}\delta_{kj} - S_{kj}\delta_{il}, \tag{2.1.2}$$

получить гамильтонианы и уравнение движения

$$\dot{S} = \{H, S\} = [J(S), S], \tag{2.1.3}$$

матрицу $J(S)$, пару Лакса и уравнение движения, построенных из уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), M(z)] \tag{2.1.4}$$

**Доказательство:**

Если подставить матрицу (2.1.1) в определение производящей функции гамильтониана

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = \frac{S_{11}^2 + S_{22}^2 - 2S_{11}\left(4S_{12}z^2 + S_{22}\right) + 4S_{12}\left(2S_{22}z^2 + S_{21}\right)}{4z^2} \tag{2.1.5.1}$$

или

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = -2S_{12}\left(S_{11}-S_{22}\right) + \frac{S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}S_{21}}{4z^2} = 2H_0 + \frac{H_2}{z^2} \tag{2.1.5.2}$$

отсюда выводятся гамильтонианы, которые являются коэффициентами при степенях $z$

$$\begin{aligned} H_0 =& -S_{12}\left(S_{11}-S_{22}\right) \\ H_2 =& \frac{1}{4}(S_{11}^2 - 2S_{11}S_{22} + S_{22}^2 + 4S_{12}S_{21}) \end{aligned} \tag{2.1.5.3}$$

Затем, используя соотношения (2.1.3) и (2.1.2) выводится следующее уравнение движение (при степени $z^0$)

$$\begin{cases} \dot{S}_{11} =& -\dot{S}_{22} = S_{12}\left(S_{11}-S_{22}\right) \\ \dot{S}_{21} =& 2S_{12}S_{21} - \left(S_{11}-S_{22}\right)^2 \\ \dot{S}_{12} =& -2S_{12}^2 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

А при степени $z^{-2}$ каждое уравнение системы равна нулю. В итоге, приравнивая уравнение (2.1.6) и (2.1.3), выводится следующая матрица

$$J(S) = -\begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ S_{11}-S_{22} & -S_{12} \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

Теперь, используя соотношения (2.1.1) и (2.1.4) выводится следующая матрица $M$

$$M(z) = \begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ S_{11} - S_{22} + 2z^2 S_{12} & -S_{12} \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

Если поставить матрицы (2.1.1) и (2.1.8) в уравнение Лакса (2.1.4), то это уравнение Лакса будет эквивалентно сисеме уравнений (2.1.6). С учётом орпеделения (2.1.5.3) и (2.1.7) гамильтониан можно представить в следующем виде

$$H_0 = \frac{1}{2} Tr(SJ(S)) \tag{2.1.9}$$

Подробное описание волчка Эйлера-Арнольда (уравнение движение, пары Лакса и т. д.) можно найте в работе [10].

## 2.2. Выписать полное исходное описание системы Калоджеро-Мозера в рациональном случае

**Утверждение:**

Используя матрицу Лакса вида

$$L = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2q} - \frac{\nu}{2z} \\ -\frac{\nu}{2z} - \frac{\nu}{2q} & -p \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

и скобки Пуассона

$$\{p, q\} = 1, \quad \{q, q\} = 0, \quad \{p, p\} = 0 \tag{2.2.2}$$

получить гамильтонианы и уравнение движения из уравнение Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), M(z)] \tag{2.2.3}$$

**Доказательство:**

Используя соотношения (2.2.1), производящая функцию гамильтониана будет иметь следующий вид

$$\frac{1}{2} Tr(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4q^2} + \frac{\nu^2}{4z^2} = 2H_0 + \frac{H_2}{z^2} \tag{2.2.4.1}$$

из предыдущего пункта известно, что коэффициент при каждой степени спектрального параметра - это отдельный гамильтониан, поэтому гамильтониан степени $z^0$ имеет вид

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8q^2} \tag{2.2.4.2}$$

а при $z^{-2}$ выводится следующий гамильтониан $H_2 = \frac{\nu^2}{4}$. Этот Гамильтонман в выражении (2.2.3) даёт нам уравнение движения равная нулю. Теперь подставляя полученный Гамильтониан (2.2.4.2) в (2.2.3) мы получаем уравнения движения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\nu^2}{4q^3}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{2.2.5}$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \left( \begin{array}{cc} -\frac{1}{4q^2} & -\frac{\nu}{4q^2} \\ -\frac{\nu}{4q^2} & -\frac{1}{4q^2} \end{array} \right) \tag{2.2.6}$$

Если поставить матрицы (2.2.1) и (2.2.6) в уравнение Лакса (2.2.3), то это уравнение Лакса будет эквивалентна уравнению (2.2.5).

## 2.3. Взаимосвязь м/д системами Волчка Эйлера и Калоджера-Мозера

**Утверждение:**

Известно, что уравнение Лакса обладает естественной калибровочной инвариантностью, т. е. это уравнение инвариантно относительно преобразований

$$L \to gLg^{-1}, \quad M \to gMg^{-1} - \partial_t g g^{-1} \tag{2.3.1}$$

Это свойство матрицы Лакса (2.3.1) представимо в виде калибровочного преобразования вида

$$L^{\text{top}}(z) = g(z)L^{\text{CM}}(z)g^{-1}(z) \tag{2.3.2}$$

теперь используя (2.3.2), (2.2.1) и (2.1.1) получить следующие динамические замены $S_{11}$, $S_{12}$, $S_{21}$ и $S_{22}$.

**Доказательство:**

В работе [11] были получены замены переменных $S$ для $Sl(n)$, а в данной работе рассматривается случай $Sl(2)$. Пусть матрица калибровочного преобразования имеет следующей вид

$$g = \Xi(z,q)D^{-1}(q) \tag{2.3.3}$$

где

$$\Xi(z,q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (z+q)^2 & (z-q)^2 \end{pmatrix} \tag{2.3.4.1}$$

и

$$D = 2q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3.4.2}$$

Или в матричном виде матрица перехода (2.3.3) будет иметь следующий вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2q} & -\frac{1}{2q} \\ \frac{(q+z)^2}{2q} & -\frac{(z-q)^2}{2q} \end{pmatrix} \qquad (2.3.5.1)$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(z-q)^2}{2z} & \frac{1}{2z} \\ -\frac{(q+z)^2}{2z} & \frac{1}{2z} \end{pmatrix} \qquad (2.3.5.2)$$

Теперь с учетом (2.3.5) и (2.2.1) в (2.3.2) матрица Лакса (2.1.1) преобретает следующий вид

$$L^{top} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.3.6)$$

где элементы матрицы (2.3.6) имеют вид

$$L_{11} = -\frac{pq}{2z} - \frac{pz}{2q} - \frac{\nu z}{4q^2} + \frac{\nu}{4z} \qquad (2.3.6.1)$$

$$L_{12} = \frac{p}{2qz} + \frac{\nu}{4q^2 z} \qquad (2.3.6.2)$$

$$L_{21} = -\frac{pq^3}{2z} - \frac{pz^3}{2q} + pqz - \frac{\nu z^3}{4q^2} + \frac{3\nu q^2}{4z} - \frac{\nu z}{2} \qquad (2.3.6.3)$$

$$L_{22} = \frac{pq}{2z} + \frac{pz}{2q} + \frac{\nu z}{4q^2} - \frac{\nu}{4z} \qquad (2.3.6.4)$$

Отсюда, приравнивая матрицу (2.3.6) к (2.1.1), следует следующие замены

$$S_{11}(p,q,\nu) = -\frac{pq}{2} + \frac{\nu}{4} \qquad (2.3.7.1)$$

$$S_{12}(p,q,\nu) = \frac{p}{2q} + \frac{\nu}{4q^2} \qquad (2.3.7.2)$$

$$S_{21}(p,q,\nu) = -\frac{q}{2}\left(pq^2 - \frac{3\nu q}{2}\right) \qquad (2.3.7.3)$$

$$S_{22}(p,q,\nu) = \frac{pq}{2} - \frac{\nu}{4} \qquad (2.3.7.4)$$

с соответствующими скобками пуассона (с учётом $\{p, q\} = 1$)

$$\{S_{11}, S_{12}\} = S_{12} \qquad (2.3.8.1)$$

$$\{S_{11}, S_{21}\} = -S_{21} \qquad (2.3.8.2)$$

$$\{S_{12}, S_{21}\} = 2S_{11} \qquad (2.3.8.3)$$

Если подставить полученные замены в гамильтониан (2.1.4.3)

$$H = -S_{12}\left(S_{11} - S_{22}\right) = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8q^2} \tag{2.3.9}$$

то в итоге гамтльтонианы обоих систем (КМ и волчка ЭА) совпадают.

## 2.4. Гамильтонианы в $SL(2)$ (1+1-теория поля).

Также в данной работе представлен простейший способ получения плотностей сохраняющихся величин в случае $SL(2)$ ([13], [16]). А для этого воспользуемся калибровочным преобразованием

$$f^{-1}Lf - kf^{-1}\partial_x f = L' \tag{2.4.1}$$

где $f$ определяется следующим образом

$$f = \begin{pmatrix} \sqrt{L_{12}} & 0 \\ -\frac{L_{11}}{\sqrt{L_{12}}} + k\frac{\partial_p \sqrt{L_{12}}}{L_{12}} & \frac{1}{\sqrt{L_{12}}} \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

В итоге этого преобразование $L$-оператор перейдёт в следующий вид

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

с выражением $T$

$$T = L_{21}L_{12} + L_{11}^2 - k\frac{L_{11}\partial_x L_{12}}{L_{12}} + k\partial_x L_{11} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial_x^2 L_{12}}{L_{12}} + \frac{3}{4}k^2\frac{\left(\partial_x L_{12}\right)^2}{L_{12}^2} \tag{2.4.4}$$

которое приводит к уравнению Шредингера

$$\left(-k^2\partial_x^2 + T\right)\psi = 0 \tag{2.4.5}$$

где волновая функция имеет следующий вид $\psi = \exp\{-\frac{1}{k}\oint dy\chi(y)\}$, отсюда получается уравнение Риккати

$$-k\partial_x\chi + \chi^2 - T = 0 \tag{2.4.6}$$

Решение получаются с помощью локальных разложений [6]

$$\chi = \sum_{l=-1}^{\infty} z^l \chi_l \tag{2.4.7}$$

Также это разложение обеспечивает плотности закона сохранения

$$H_l \sim \oint dx\chi_{l-1} \tag{2.4.8}$$

Значение $\chi_l$ можно найти из уравнения Риккати при условии, что $T$ имеет вид локального выражения

$$T(z) = \sum_{l=-2}^{\infty} z^l T_l \tag{2.4.9}$$

в окрестности нуля. Для $l = -2, -1{,}0$ выводятся следующие выражения из уравнения Риккати

$$\begin{cases} \chi_{-1} = \sqrt{T_{-2}} \\ \chi_0 = \frac{1}{2\chi_{-1}} \left(T_{-1} + k\partial_x \chi_{-1}\right) \\ \chi_1 = \frac{1}{2\chi_{-1}} \left(T_0 - \frac{T_{-1}^2}{4T_{-2}}\right) \end{cases} \tag{2.4.10}$$

## 2.5. Гамильтонианы для полевого Калоджера-Мозера.

С использованием конструкции, описанной в предыдущем пункте для матрицы Лакса

$$\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} p - k\frac{q_x}{2z} & -\nu\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2q}\right) \\ -\nu\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2q}\right) & -p + k\frac{q_x}{2z} \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

и выражения для $T$ выводятся следующие коэффициенты ([13], [16])

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2 q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2 \nu_x}{\nu} q_x - k^2 q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{2k^2 q_x^2 - \nu^2}{4q^2} - \frac{kp\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4}\left(\frac{\nu_x}{\nu}\right)^2 \end{cases} \tag{2.5.2}$$

Здесь важное значение имеет не тривиальный Гамильтониан квадратичный в поле моментов $p$. Это двумерное обобщение квадратичного Гамильтониана Калоджера-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx \sqrt{h}\chi_1 = \frac{1}{2}\oint dx \left(T_0 - \frac{1}{h'}T_{-1}^2\right) \tag{2.5.3}$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'}\left(T_{-1}^{CM}\right)^2 = p^2\left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2}\right) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^2} - \frac{k^4 q_{\mathrm{xx}}^2}{4\nu^2} \tag{2.5.4}$$

Уравнение движения, производимые $H_0^{CM}$ имеют вид:

$$\dot{q} = p\left(1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2}\right) \tag{2.5.5.1}$$

$$\dot{p} = -\frac{k^2}{c^2}\partial_x\left(p^2 q_x\right) + \frac{3k^2 q_x^2 - c^2}{4q^3} + \frac{3k^2}{4}\partial_x\left(\frac{q_x}{q^2}\right) + \frac{k^4}{4}\partial_x\left(\frac{q_{xxx}\nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3}\right) \tag{2.5.5.2}$$

с соответсвующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \tag{2.5.6}$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2$) уравнения движения (2.5.5.1) и Гамильтониан перейдут в выражения (2.2.5) и (2.2.4.2).

## 2.6. Гамильтониан для системы Ландау-Лифшиц.

Дальше, используется вновь конструкция описанная в пункте 2.4 и локальное разложение матрицы Лакса ([13], [14], [16])

$$L = \sum_{l=-1}^{\infty} z^l L_l \qquad (2.6.1)$$

отсюда выводятся следующие выражение для $T$

$$T_{-2} = L_{12}^{-1} L_{21}^{-1} + L_{11}^{-1} L_{11}^{-1} \qquad (2.6.2.1)$$

$$T_{-1} = L_{12}^{-1} L_{21}^{0} + L_{12}^{0} L_{21}^{-1} + 2L_{11}^{0} L_{11}^{-1} - k\frac{L_{11}^{-1}\partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} + k\partial_x L_{11}^{-1} \qquad (2.6.2.2)$$

$$T_0 = L_{12}^{1} L_{21}^{-1} + L_{12}^{-1} L_{21}^{1} + 2L_{11}^{1} L_{11}^{-1} + L_{12}^{0} L_{21}^{0} + L_{11}^{0} L_{11}^{0} -$$

$$-\frac{k}{L_{12}^{-1}}\left(L_{11}^{0}\partial_x L_{12}^{-1} + L_{11}^{-1}\partial_x L_{12}^{0} - \frac{L_{12}^{0} L_{11}^{-1}\partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}}\right) + k\partial_x L_{11}^{0} -$$

$$-\frac{k^2}{2}\frac{\partial_x^2 L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}} + \frac{3k^2}{4}\left(\frac{\partial_x L_{12}^{-1}}{L_{12}^{-1}}\right) \qquad (2.6.2.3)$$

При подстановке следующих элементов матриц Лакса

$$L = \begin{pmatrix} \frac{S_{11}(x)}{z} - zS_{12}(x) & \frac{S_{12}(x)}{z} \\ -S_{12}(x)z^3 - 2S_{11}(x)z + \frac{S_{21}(x)}{z} & -\frac{S_{11}(x)}{z} + zS_{12}(x) \end{pmatrix} \qquad (2.6.3)$$

выводятся следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{11}(x)^2 + S_{12}(x)S_{21}(x) \qquad (2.6.4.1)$$

$$T_{-1} = k(S_{11}(x))_x - \frac{kS_{11}(x)(S_{12}(x))_x}{S_{12}(x)} \qquad (2.6.4.2)$$

$$T_0 = -4S_{11}(x)S_{12}(x) + \frac{3k^2(S_{12}(x))_x^2}{4(S_{12}(x))^2} - \frac{k^2(S_{12}(x))_{xx}}{2S_{12}(x)} \qquad (2.6.4.3)$$

где индекс $x$ и $xx$ - это производные по $x$. Теперь с учётом следующего определения

$$h_l(x) = \lambda\chi_{l-1}, \quad \lambda^2 = T_{-2} \qquad (2.6.5)$$

где $\lambda$ - собственное значение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & -S_{11}(x) \end{pmatrix} \tag{2.6.6}$$

выводятся следующее выражение

$$h_2 = \lambda\chi_1 = \frac{1}{2}\left(T_0 - \frac{1}{4\lambda^2}T_{-1}^2\right) \tag{2.6.7}$$

Наконец подсстановка (2.6.7) и (2.6.4) в Гамильтониан

$$H_l = \oint \mathrm{d}x h_l(x) \tag{2.6.8}$$

даёт следующий Гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{\mathrm{LL}} = \frac{1}{2}\oint\{-4S_{11}(x)S_{12}(x) - \alpha\left(2(S_{11}(x))_x^2 + 2(S_{12}(x))_x(S_{21}(x))_x\right)\}\mathrm{dx} \tag{2.6.9.1}$$

$$H^{\mathrm{LL}} = \frac{1}{2}\oint\{tr\left(SJ\left(S\right)\right) - \alpha tr\left(S_x^2\right)\}\mathrm{dx} \tag{2.6.9.2}$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. Если подставить этот Гамильтониан в (2.1.3) с учетом скобки Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = \left(S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}\right)\delta(x-y) \tag{2.6.10}$$

то в итоге получается уравнение движения для ферромагнетика

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha\,[S, S_{xx}] \tag{2.6.11}$$

А при подстановке переменных (2.8.18) (которые будут рассмотрены в конце раздела) в (2.6.9) получается

$$H = \frac{1}{2}\oint dx\left(p^2\left(1 - \frac{k^2q_x^2}{c^2}\right) + \frac{3k^2q_x^2 - c^2}{4q^2} - \frac{k^4q_{\mathrm{xx}}^2}{4\nu^2}\right) \tag{2.6.12}$$

## 2.7. Уравнение Ландау-Лифшица.

В данном пункте была проверена эквивалентность уравнение Захарова-Шабата и Ландау-Лифшица [10]. По ходу решения задачи, представим уравнение Захарова-Шабата в следующем виде

$$\partial_t U(z) + k\partial_x V(z) = [U(z), V(z)] \tag{2.7.1}$$

где $x$ - координата на окружности. Переменные $S(x)$ (как известно) - это теперь периодические поля с скобками Пуассона

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = \left(S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}\right)\delta(x-y) \tag{2.7.2}$$

На основе тех же последних данных из пункта 2.6, матрица Лакса (2.6.3) примет вид одной из U-V пар

$$U^{\mathrm{LL}}=L(z,S(x))=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} S_{11}-z^2S_{12} & S_{12} \\ S_{21}-2z^2S_{11}-z^4S_{12} & -S_{11}+z^2S_{12}\end{pmatrix} \tag{2.7.3}$$

и

$$V^{\mathrm{LL}=}-\frac{1}{2}\left(V_1^{\mathrm{LL}}+V_2^{\mathrm{LL}}\right) \tag{2.7.4}$$

$$V_1^{\mathrm{LL}}=-\frac{1}{z}L(z,S)-2M(z,S)=-\frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -S_{11}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ 2S_{11}+3z^2S_{12} & -S_{12}\end{pmatrix} \tag{2.7.5}$$

где матрица $M$

$$M(z,S)=\begin{pmatrix} S_{12} & 0 \\ 2S_{11}+2z^2S_{12} & -S_{12}\end{pmatrix} \tag{2.7.6}$$

Матрица $V_2^{\mathrm{LL}}$ представлена в виде

$$V_2^{\mathrm{LL}}=L(z,h)=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} h_{11}-z^2h_{12} & h_{12} \\ h_{21}-2z^2h_{11}-z^4h_{12} & -h_{11}+z^2h_{12}\end{pmatrix} \tag{2.7.7}$$

где матрица $h$ напоминаем

$$h=-\frac{k}{4\lambda^2}\left[S,S_x\right], \quad S_x=\partial_x S \tag{2.7.8}$$

При подстановке этих определений в (2.7.1), выводятся два уравнения:

$$k\partial_x V_1^{\mathrm{LL}}=\left[L,V_2^{\mathrm{LL}}\right], \tag{2.7.9}$$

$$\partial_t L-\frac{1}{2}k\partial_x V_2^{\mathrm{LL}}=-\frac{1}{2}\left[L,V_1^{\mathrm{LL}}\right]=[L,\mathcal{M}] \tag{2.7.10}$$

и

$$-k\partial_x S=[S,h] \tag{2.7.11}$$

$$\partial_t S-(k/2)\partial_x h=[J(S),S] \tag{2.7.12}$$

При условии $SS_x+S_xS=0$ первое уравнение решается при определении (2.7.8). А второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S=[J(S),S]-\alpha\left[S,S_{xx}\right] \tag{2.7.13}$$

с константой $\alpha=k^2/8\lambda^2$. По компонентам имеем

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t S_{11}=\alpha S_{21}\partial_x^2 S_{12}-\alpha S_{12}\partial_x^2 S_{21}+2S_{12}S_{11} \\ \partial_t S_{21}=-2\alpha S_{21}\partial_x^2 S_{11}+2\alpha S_{11}\partial_x^2 S_{21}+2S_{12}S_{21}-4S_{11}^2 \\ \partial_t S_{12}=-2\alpha S_{11}\partial_x^2 S_{12}+2\alpha S_{12}\partial_x^2 S_{11}-2S_{12}^2 \end{array}\right. \tag{2.7.14}$$

Отсюда следует, что уравнение (2.7.14) и (2.7.13) эквивалентно (2.7.1)

## 2.8. Взаимосвязь м/д системами Ландау-Лифшица и полевого Калоджера-Мозера.

Для того, чтобы получить замены переменных $S(x)$ применяется матрица Лакса полевого Калоджера-Мозера

$$\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} p - k\frac{q_x}{2z} & -\nu\left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2q}\right) \\ -\nu\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2q}\right) & -p + k\frac{q_x}{2z} \end{pmatrix} \tag{2.8.1}$$

с вычетом (так как любая матрица Лакса задаётся своим вычетом)

$$B = Res\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \tag{2.8.2.1}$$

Однако перед тем как применить матрицы (2.8.1) и (2.8.2.1), следует обьяснить причину использывания вычета матрицы Лакса для простой механики в качестве примера. Изначально матрица $D$ выбиралась из таких соображений

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.8.2.2}$$

чтобы матрица перехода $g$ обладала таким свойством, что от $g(z = 0)$ имеет собственный вектор (1, 1), а собственный вектор вычета вида

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8.3}$$

должен зануляется в ядре. Это необходимо для того, чтобы не образовывались полюса второго порядка при сопряжении матриц перехода в калибровачном преобразовании. Поэтому для случая поля, т. е. для матрицы Лакса (2.8.1) нужно выбрать такую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{2.8.4}$$

чтобы полученная при этом $g$ зануляла собственный вектор (2.8.2.1).

Теперь вычисляется собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k = 0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для начала выводятся собственные значение из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \tag{2.8.5}$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \tag{2.8.6.1}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \tag{2.8.6.2}$$

и уравнения

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.8.7}$$

вычисляются собственные вектроры для случая (2.8.6.1)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{2.8.8.1}$$

А для случая (2.8.6.2)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{2.8.8.2}$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (2.8.8.1) переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь, имея в наличии собственный вектор (2.8.8.1) и опператор Хекке

$$\Xi(z,q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (z+q)^2 & (z-q)^2 \end{pmatrix} \tag{2.8.9.1}$$

$$\Xi^{-1}(z,q) = -\frac{1}{4qz} \begin{pmatrix} (z-q)^2 & -1 \\ -(z+q)^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8.9.2}$$

можно определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{2.8.10}$$

А для этого необходимо, чтобы матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z,q) D^{-1}(q) \tag{2.8.11}$$

зануляла вектор (2.8.8.1), т. е.

$$g \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.8.12}$$

В итоге матрица (2.8.10) имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(c + kq) \end{pmatrix} \tag{2.8.13.1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c} \end{pmatrix} \tag{2.8.13.2}$$

А калибровочное преобразование (2.8.11) примет вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & -\frac{1}{2}(c + kq_x) \\ \frac{1}{2}(q+z)^2 \nu & -\frac{1}{2}(z-q)^2 (c + kq_x) \end{pmatrix} \tag{2.8.14.1}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(z-q)^2}{2qz\nu} & \frac{1}{2qz\nu} \\ -\frac{(q+z)^2}{2qz(c+kq_x)} & \frac{1}{2qz(c+kq_x)} \end{pmatrix} \tag{2.8.14.2}$$

Затем подстановка (2.8.14.1), (2.8.14.2) и (2.8.1) в

$$L^{\mathrm{LL}} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} - kg\partial_x g^{-1} \tag{2.8.15.1}$$

Если вспомнить, что уравнение нулевой связнасти (уравнение Лакса и уравнение Захарова-Шабата) обладают естественной калибровочной связнастью например уравнение Лакса инвариантна относительно преобразований

$$L \to gLg^{-1}, \quad M \to gMg^{-1} - \partial_t g g^{-1} \tag{$*$}$$

то уравнение Захарова-Шабата аналогично определяется калибровочным преобразованием с учетом компонеты связности $k\partial_x + L$, которое приведет к соответствующим удлинениям калибровочных преобразований. Т.е. в соответствии взаимосвязи м/д системой Калоджера и волчкками Эйлера в механике из предыдущего семинара переходит в соответствие на уровне (1+1)-теорией.

Здесь первое слагаемое обозначим как

$$\tilde{L}^{(CM),(2)} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \tag{2.8.15.2}$$

где элементы матрицы

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(\tilde{L}_{11}^{CM}\left(g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}\right) + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}g_{21}\right) \tag{2.8.15.3}$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(-2\tilde{L}_{11}^{CM}(g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}^2\right) \tag{2.8.15.4}$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(2\tilde{L}_{11}^{CM}g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{21}^2\right) \tag{2.8.15.5}$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{gathered} \det g = zq(c+kq_x)\nu, \\ g_{12}g_{22} = \tfrac{1}{4}(z-q)^2(c+kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = \tfrac{1}{4}(q+z)^2\nu^2 \end{gathered} \tag{2.8.15.6}$$

$$\begin{gathered} g_{11}^2 = \tfrac{\nu^2}{4} \\ g_{12}^2 = \tfrac{1}{4}(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{2.8.15.7}$$

$$\begin{gathered} g_{21}^2 = \tfrac{1}{4}(q+z)^4\nu^2 \\ g_{22}^2 = \tfrac{1}{4}(z-q)^4(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{2.8.15.8}$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = -\frac{1}{2}\left(q^2 + z^2\right)(c+kq_x)\nu \tag{2.8.15.9}$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{4}(c + kq_x)\nu \tag{2.8.15.10}$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{4}(z-q)^2(q+z)^2(c + kq_x)\nu \tag{2.8.15.11}$$

а вторая слагаемая будет имеет вид

$$G^{(1)} = -kg\partial_x g^{-1} \tag{2.8.15.12}$$

Если приравнять соотношения (2.7.3) и (2.8.15.1), то следующие замены будут зависить от спектрального параметра в результате лишних слагаемых присутствующих в диагональных элементах в матрице (2.8.15.1).

Чтобы избавиться от лишних слагаемых, следует ввести нормировку калибровочного преобразования (2.8.14.1) и (2.8.14.2) на обратный корень из детерминанта

$$G = g\sqrt{(detg)^{-1}}, \quad G^{-1} = g^{-1}\sqrt{detg} \tag{2.8.16}$$

Используя калибровочное преобразование (2.8.16) в (2.8.15.1) матрица (2.8.15.2) остаётся неизменной, а матрица (2.8.15.12) приобретает дополнительную матрицу вида

$$G^{(2)} = -kI\sqrt{(detg)^{-1}}\partial_x\sqrt{detg} \tag{2.8.17}$$

где $I$ - единичная матрица. В итоге мы имеем следующую матрицу (складывая матрицу )

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{2.8.17.1}$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = \frac{k\left(\nu\left(-2czq_x + k\left(q^2+z^2\right)q_{xx} - 2kzq_x^2\right) - \left(q^2+z^2\right)\nu_x\left(c+kq_x\right)\right)}{4zq\nu\left(c+kq_x\right)} \tag{2.8.17.2}$$

$$G_{12} = \frac{k\left(\nu_x\left(c+kq_x\right)\right) - k\nu q_{xx})}{4zq\nu\left(c+kq_x\right))} \tag{2.8.17.3}$$

$$G_{21} = \frac{k(z-q)(q+z)\left(-\left(z^2-q^2\right)\nu_x\left(c+kq_x\right) - \nu\left(4czq_x + k\left(q^2-z^2\right)q_{xx} + 4kzq_x^2\right)\right)}{4zq\nu\left(c+kq_x\right)} \tag{2.8.17.4}$$

$$G_{22} = -G_{11} \tag{2.8.17.5}$$

Благодаря этой матрицы лишние слагаемые для диагональных элементов матрицы (2.8.15.1) зануляются. В итоге следующие замены переменных имеют следующий вид

$$S_{12} = \frac{c}{4q^2} + \frac{p}{2q} - \frac{ck^2 q_{\mathrm{xx}}}{4q\left(c^2 - k^2 q_x^2\right)} \tag{2.8.18.1}$$

$$S_{11} = \frac{c}{4} - \frac{pq}{2} + \frac{ck^2 q q_{\mathrm{xx}}}{4\left(c^2 - k^2 q_x^2\right)} \tag{2.8.18.2}$$

$$S_{21} = \frac{3cq^2}{4} - \frac{pq^3}{2} + \frac{ck^2 q^3 q_{\mathrm{xx}}}{4\left(c^2 - k^2 q_x^2\right)} \tag{2.8.18.3}$$

Теперь при подстановке функции Казимира $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$ (фиксирующая сопряженную орбиту в отмеченной точке), и $k = 0$, полученные нами замены (2.8.18) придут к заменам (2.3.7) из пункта 2.3. А ещё подстановка замен (2.8.18) в гамильтониан (2.6.9) даёт следующий гамильтониан (2.5.5) (с учетом (2.5.6)). А скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующие виды

$$\{S_{11}(x), S_{12}(y)\} = S_{12}(x)\delta(x-y) \tag{2.7.19.1}$$

$$\{S_{11}(x), S_{21}(y)\} = -S_{21}(x)\delta(x-y) \tag{2.7.19.2}$$

$$\{S_{12}(x), S_{21}(y)\} = 2S_{11}(x)\delta(x-y) \tag{2.7.19.3}$$

аналогичные скобкам для простой механики (2.3.8)

# 3. Тригонометрический случай

На самом деле все задачи, описанные в данном разделе были решены таким же образом, как и в предыдущем разделе. Единственные различия, которые возникает в тригонометрическом случаи - это технические вопросы, с которыми каждый читатеть будет сталкиваться при ознакомлении с решениемя тригонометрических задач.

## 3.1. Поиски элементов коалгебры Ли $sl_2$ для механической системы Калоджера-Мозера

**Утверждение:**

При наличии матрица Лакса Калоджера-Мозера

$$L^{CM} = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) \\ -\frac{\nu}{2}\coth(z) - \frac{\nu}{2}\coth(q) & -p \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

калибровочного преобразования

$$L^{\mathrm{top}} = gL^{\mathrm{CM}}g^{-1} \tag{3.1.2}$$

и матрицы Лакса вида

$$L^{tor} = \begin{pmatrix} S_{11}\coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4S_{12}\sinh(z) & S_{22}\coth(z) \end{pmatrix} \qquad (3.1.3)$$

получить следующие элементы группы Ли $S_{11}$, $S_{12}$ и $S_{21}$.

**Доказательство:**

Имея опператор Гекке

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{(q+z)} + e^{-(q+z)} & e^{(z-q)} + e^{-(z-q)} \end{pmatrix} \qquad (3.1.4.1)$$

или для тригонометрического случая

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2\cosh(q+z) & 2\cosh(z-q) \end{pmatrix} \qquad (3.1.4.2)$$

и диагональную матрицу

$$D = 2\sinh(q)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.1.5)$$

матрица перехода будет иметь следующий вид

$$g = \Xi(z,q)D^{-1}(q) \qquad (3.1.6.1)$$

или (в матричном виде)

$$g = \frac{1}{2\sinh(q)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2\cosh(q+z) & -2\cosh(q-z) \end{pmatrix} \qquad (3.1.6.2)$$

$$g^{-1} = \frac{\sinh(q)}{\cosh(q-z) - \cosh(q+z)}\begin{pmatrix} 2\cosh(q-z) & -1 \\ 2\cosh(q+z) & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.1.6.3)$$

При подстановке (3.1.6.2), (3.1.6.3) и (3.1.1) в (3.1.2) получается матрица Лакса вида

$$L^{top} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.1.7)$$

где элементы матрицы (3.1.7) имеют вид

$$L_{11} = -\left(p\coth(q) + \frac{\nu}{2\sinh^2(q)}\right)\coth(z) \qquad (3.1.7.1)$$

$$L_{12} = \frac{1}{4}\frac{(2p + \nu\coth(q))}{\sinh(q)\sinh(z)} \qquad (3.1.7.2)$$

$$L_{21} = -\frac{(2p\sinh(q+2z) + 2p\sinh(q-2z) + 2p\sinh(3q) - 2p\sinh(q))}{4\sinh^2(q)\sinh(z)} -$$

$$-\frac{(3\nu\cosh(q)-\nu\cosh(3q)+\nu\cosh(q+2z)+\nu\cosh(q-2z))}{4\sinh^2(q)\sinh(z)} \tag{3.1.7.3}$$

$$L_{22}=\left(p\coth(q)+\frac{\nu}{2\sinh^2(q)}\right)\coth(z) \tag{3.1.7.4}$$

Из этого следует, что при равенстве матриц (3.1.7) и (3.1.3) получаются следующие замены

$$S_{12}=\frac{1}{4}\frac{(2p+\nu\coth(q))}{\sinh(q)} \tag{3.1.8.1}$$

$$S_{11}=-\left(p\coth(q)+\frac{\nu}{2\sinh^2(q)}\right) \tag{3.1.8.2}$$

$$S_{22}=p\coth(q)+\frac{\nu}{2\sinh^2(q)} \tag{3.1.8.3}$$

$$S_{21}=-\coth(q)\left(\frac{2p\sinh(2q)+3\nu-\nu\cosh(2q)}{2\sinh(q)}\right) \tag{3.1.8.4}$$

Используя канонические отображение $p\to p-\frac{\nu}{2}\coth(q)$ динамичекие замены приобретают вид

$$S_{12}=\frac{1}{2}\frac{p}{\sinh(q)} \tag{3.1.9.1}$$

$$S_{11}=\frac{\nu}{2}-p\coth(q) \tag{3.1.9.2}$$

$$S_{22}=p\coth(q)-\frac{\nu}{2} \tag{3.1.9.3}$$

$$S_{21}=2\cosh(q)(\nu-p\coth(q)) \tag{3.1.9.4}$$

С соответствующими скобками Пуассона

$$\{S_{11},S_{12}\}=S_{12} \tag{3.1.10.1}$$

$$\{S_{11},S_{21}\}=-S_{21} \tag{3.1.10.2}$$

$$\{S_{12},S_{21}\}=2S_{11} \tag{3.1.10.3}$$

Похожие замены переменных для $SL(n)$ можно найти в статье Т. В. Краснова [12].

## 3.2. Выписать полное исходное описание системы Калоджеро-Мозера в тригонометрическом случае.

**Утверждение:**

Используя матрицу Лакса вида [12]

$$L = \begin{pmatrix} p & \frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) \\ -\frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) & -p \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

получить Гамильтонианы из соотношения производящей функции

$$\frac{1}{2}Tr(L^2), \tag{3.2.2}$$

Затем получить уравнение движения из уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), \mathcal{M}(z)] \tag{3.2.3}$$

**Доказательство:**

Формула производящей функции (3.2.2) при подстановке матрицы Лакса (3.2.1) будет иметь следующий вид

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4}\coth^2(q) + \frac{\nu^2}{4}\coth^2(z) \tag{3.2.4.1}$$

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = 2H_0 + H_2\coth^2(z) \tag{3.2.4.2}$$

Отсюда получаются следующие Гамильтоианы

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\coth^2(q) \tag{3.2.4.3}$$

и

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \tag{3.2.4.4}$$

Теперь при подстановке полученного гамильтониана $H_0$ в (3.2.3) выводятся уравнение движения

$$\dot{p} = -\frac{\nu^2\coth(q)}{4\sinh^2(q)} \tag{3.2.5}$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\sinh^2(q)} & -\frac{\nu}{4\sinh^2(q)} \\ -\frac{\nu}{4\sinh^2(q)} & -\frac{1}{4\sinh^2(q)} \end{pmatrix} \tag{3.2.6}$$

## 3.3. Выписать полное исходное описание системы Волчка Эйлера в тригонометрическом случае.

**Утверждение:**

Используя матрицу Лакса вида [12]

$$L = \begin{pmatrix} S_{11}\coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4\sinh(z)S_{12} & S_{22}\coth(z) \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

получить Гамильтонианы из соотношения производящей функции

$$\frac{1}{2}Tr(L^2), \tag{3.3.2}$$

и подставить замены (3.1.8) в полученные Гамильтонианы и сравнить с гамильтонианом для Калоджеро-Мозера (3.2.4).

**Доказательство:**

Соотношения (3.3.2) при подстановке матрицы Лакса будет иметь следующий

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = -4S_{12}^2 - S_{12}S_{21} + \frac{1}{2}\left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{12}S_{21}\right)\coth^2(z) \tag{3.3.3.1}$$

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = 2H_0 + H_2\coth^2(z) \tag{3.3.3.2}$$

Отсюда получаются следующие Гамильтонианы

$$H_0 = -2S_{12}^2 - \frac{1}{2}S_{12}S_{21} = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\coth^2(q) \tag{3.3.4.1}$$

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \tag{3.3.4.2}$$

В итоге, полученные Гамильтонианы (3.3.4) совпадают с (3.2.4). Согласованность не нарушена.

Теперь перейдем к уравнению движения, которая описывает Гамильтониан $H_0$

$$\begin{cases} \dot{S}_{11} = -\dot{S}_{22} = 4S_{12}^2 \\ \dot{S}_{21} = -4S_{12}\left(S_{11} - S_{22}\right) - \frac{1}{2}S_{21}\left(S_{11} - S_{22}\right) \\ \dot{S}_{12} = \frac{1}{2}S_{12}\left(S_{11} - S_{22}\right) \end{cases} \tag{3.3.5}$$

А при степени $z^{-2}$ каждая уравнение системы равна нулю. В итоге, приравнивая уравнение (3.3.5) и

$$\dot{S} = \{H, S\} = [J(S), S], \tag{3.3.6}$$

получается следующая матрица

$$J_1(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12} & \frac{1}{2}S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

Однако если подставить матрицу (3.3.7) в

$$H = \frac{1}{2}Tr(SJ(S)) \tag{3.3.8}$$

то получается другой Гамильтониан

$$H = -2S_{12}^2 + \frac{1}{4}S_{11}^2 + \frac{1}{4}S_{22}^2 \tag{3.3.9}$$

который не согласуется с Гамильтонианом (3.3.4.1). Поэтому вводится новая матрица $J(S)$

$$J(S) = J_1(S) - \frac{1}{2}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}S_{12} \\ -4S_{12} - \frac{1}{2}S_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

Теперь подставляя эту матрицу в Гамильтониан (3.3.8) получается (3.3.4.1) и согласованность Гамильтониана и уравнения движения сохраняются.

Теперь, используя соотношения (3.3.1) и (3.2.3) получается матрица $M$

$$M(z) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12}\cosh(z) & \frac{1}{2}S_{22} \end{pmatrix} \tag{3.3.11}$$

Если поставить матрицы (3.3.1) и (3.3.8) в уравнение Лакса (3.2.3), то это уравнение Лакса будет эквивалентно системе уравнений (3.3.5).

## 3.4. Взаимосвязь м/д системами Ландау-Лифшица и полевого Калоджера-Мозера.

Здесь же как и в предыдущем разделе применяется матрица Лакса полевого Калоджера-Мозера, но в тригонометрическом случаи

$$L = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}\coth(z) & \frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) \\ -\frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) & -p + \frac{kq_x}{2}\coth(z) \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$

с вычетом (так как любая матрица Лакса задаётся своим вычетом)

$$B = Res\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

Из предыдущего раздела известна причина использования вычета матрицы Лакса для простой механики в качестве примера. Поэтому для случая поля, т. е. для мартрицы Лакса (3.4.1) нужно выбирать такую же матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

чтобы полученная при этом $g$ зануляла собственный вектор (3.4.2). Теперь вычислим собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k = 0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Сперва вычисляются собственные значение из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \tag{3.4.4}$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \tag{3.4.5.1}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \tag{3.4.5.2}$$

и уравнение

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.4.6}$$

получаются собственные вектроры для случая (3.4.5.1)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{3.4.7.1}$$

А для случая (3.4.5.2)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2} \\ -\frac{\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{3.4.7.2}$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (3.4.7.1) переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь имея в наличии собственный вектор (3.4.7.1) и опператор Хекке

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2\cosh(q+z) & 2\cosh(z-q) \end{pmatrix} \tag{3.4.8}$$

можно определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{3.4.9}$$

А для этого необходимо, чтобы матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z,q) D^{-1}(q) \tag{3.4.10}$$

зануляла вектор (3.4.7.1), т. е.

$$g \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.4.11}$$

В итоге матрица (3.4.9) имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(c + kq) \end{pmatrix} \tag{3.4.12.1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\nu} & 0 \\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c} \end{pmatrix} \tag{3.4.12.2}$$

В итоге калибровочное преобразование (3.4.10) примет вид

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{2} & -\frac{1}{2}\left(c+kq_x\right) \\ \cosh(z+q)\nu & -\cosh(z-q)\left(c+kq_x\right) \end{pmatrix} \tag{3.4.13.1}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\coth(z)\coth(q)}{\nu} & \frac{1}{2\nu\sinh(z)\sinh(q)} \\ -\frac{\coth(z)\coth(q)+1}{c+kq_x} & \frac{1}{2\sinh(z)\sinh(q)(c+kq_x)} \end{pmatrix} \tag{3.4.13.2}$$

Дальше идёт подстановка (3.4.13.1), (3.4.13.2) и (3.3.1) в

$$L^{\mathrm{LL}} = -kg\partial_x g^{-1} + g\tilde{L}^{CM}g^{-1} \tag{3.4.14.1}$$

Здесь второе слагаемое обозначим как

$$\tilde{L}^{(CM),(2)} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \tag{3.4.14.2}$$

где элементы матрицы

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(\tilde{L}_{11}^{CM}\left(g_{11}g_{22}+g_{21}g_{12}\right) + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}g_{21}\right) \tag{3.4.14.3}$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(-2\tilde{L}_{11}^{CM}(g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}^2\right) \tag{3.4.14.4}$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(2\tilde{L}_{11}^{CM}g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{21}^2\right) \tag{3.4.14.5}$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{gathered} \det g = \sinh(z)\sinh(q)(c+kq_x)\nu, \\ g_{12}g_{22} = \tfrac{1}{2}\cosh(z-q)(c+kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = \tfrac{1}{2}\cosh(q+z)\nu^2 \end{gathered} \tag{3.4.14.6}$$

$$\begin{gathered} g_{11}^2 = \tfrac{\nu^2}{4} \\ g_{12}^2 = \tfrac{1}{4}(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{3.4.14.7}$$

$$\begin{gathered} g_{21}^2 = \cosh^2(q+z)\nu^2 \\ g_{22}^2 = \cosh^2(z-q)(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{3.4.14.8}$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = -\cosh(z)\cosh(q)(c+kq_x)\nu \tag{3.4.14.9}$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{4}(c+kq_x)\nu \tag{3.4.14.10}$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2}(\cosh(2q)+\cosh(2z))(c+kq_x)\nu \tag{3.4.14.11}$$

а первая слагаемая будет имеет вид

$$G^{(1)} = -kg\partial_x g^{-1} \tag{3.4.14.12}$$

Если приравнять соотношения (3.6.1) и (3.4.14.1), то следующие замены будут зависить от спектрального параметра в результате лишних слагаемых присутствующих в диагональных элементах в матрице (3.4.14.1) (как и в предыдущем разделе). Чтобы избавиться от лишних слагаемых применяется такая же нормировка (как для рационального случая) калибровочного преобразования (3.4.13.1) и (3.4.13.2) на обратный корень из детерминанта

$$G = g\sqrt{(detg)^{-1}}, \quad G^{-1} = g^{-1}\sqrt{detg} \tag{3.4.15}$$

Используя калибровочное преобразование (3.4.15) в (3.4.14.1) матрица (3.4.14.2) остаётся неизменной, а для матрица (3.4.14.3) приобретает дополнительную матрицу вида

$$G^{(2)} = -Ik\sqrt{(detg)^{-1}}\partial_x\sqrt{detg} \tag{3.4.16}$$

где $I$ - единичная матрица. В итоге мы имеем следующую матрицу (складывая матрицу )

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{3.4.16.1}$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = -\frac{k\coth(q)\left(\coth(z)\nu_x\left(c+kq_x\right)+\nu\left(cq_x-k\coth(z)q_{xx}+kq_x^2\right)\right)}{2\nu\left(c+kq_x\right)} \tag{3.4.16.2}$$

$$G_{12} = \frac{k\left(\nu_x\left(c+kq_x\right)-k\nu q_{xx}\right)}{4\nu\left(c+kq_x\right)\sinh(q)\sinh(z))} \tag{3.4.16.3}$$

$$G_{21} = -\frac{k\left(\nu\left(2c\sinh(2z)q_x-kq_{xx}(\cosh(2q)+\cosh(2z))+4k\sinh(z)\cosh(z)q_x^2\right)\right)}{2\nu\left(c+kq_x\right)\sinh(q)\sinh(z)}-$$

$$-\frac{k\left(\nu_x(\cosh(2q)+\cosh(2z))\left(c+kq_x\right)\right)}{2\nu\left(c+kq_x\right)\sinh(q)\sinh(z)} \tag{3.4.16.4}$$

$$G_{22} = -G_{11} \tag{3.4.16.5}$$

Благодаря этой матрицы (3.4.16.1) лишние слагаемые для диагональных элементов матрицы (3.4.14.1) зануляются. В итоге получаются следующие замены

$$S_{12} = \frac{c}{4\sinh(q)}\coth(q) + \frac{p}{2\sinh(q)} - \frac{ck^2 q_{xx}}{4\nu^2\sinh(q)} \tag{3.4.17.1}$$

$$S_{11} = -p\coth(q) - \frac{c}{2\sinh^2(q)} - \frac{ck^2 q_{xx}\coth(q)}{2\left(k^2q_x^2-c^2\right)} \tag{3.4.17.2}$$

$$S_{21} = \frac{c\left(\cosh(2q)\coth(q) - 3\coth(q)\right) - 2p\sinh(2q)\coth(q)}{2\sinh(q)} - \frac{ck^2 q_{xx}\sinh(2q)\coth(q)}{2\sinh(q)\left(k^2 q_x^2 - c^2\right)} \qquad (3.4.17.3)$$

Теперь при подстановке функции Казимира $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$ (фиксирующая сопряженную орбиту в отмеченной точке), и $k = 0$, полученные нами замены (3.4.17) придут к заменам (3.1.8) из пункта 3.1. А скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующие виды

$$\{S_{11}(x), S_{12}(y)\} = S_{12}(x)\delta(x-y) \qquad (3.4.18.1)$$

$$\{S_{11}(x), S_{21}(y)\} = -S_{21}(x)\delta(x-y) \qquad (3.4.18.2)$$

$$\{S_{12}(x), S_{21}(y)\} = 2S_{11}(x)\delta(x-y) \qquad (3.4.18.3)$$

аналогичные скобкам для простой механики (3.1.10.4)

## 3.5. Гамильтонианы для полевого Калоджера-Мозера.

С использрванием конструкции, описанной в пункте 2.4 для матрицы Лакса

$$L = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}\coth(z) & \frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) \\ -\frac{\nu}{2}\coth(q) - \frac{\nu}{2}\coth(z) & -p + \frac{kq_x}{2}\coth(z) \end{pmatrix} \qquad (3.5.1)$$

и выражения для $T$ выводятся следующие коэффициенты

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2 q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2\nu_x}{\nu} q_x - k^2 q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{k^2 q_x^2}{2\sinh^2(q)} - \frac{\nu^2}{4}\coth^2(q) - \frac{kp\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4}\left(\frac{\nu_x}{\nu}\right)^2 \end{cases} \qquad (3.5.2)$$

Здесь следующее выражение представляется в следующем виде

$$\frac{k^2 q_x^2}{2\sinh^2(q)} - \frac{\nu^2}{4}\coth^2(q) = \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4}\coth^2(q) - \frac{k^2 q_x^2}{2} \qquad (3.5.2.1)$$

с учетом

$$\frac{1}{\sinh^2(q)} = \coth^2(q) - 1 \qquad (3.5.2.2)$$

$$c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2 \qquad (3.5.2.3)$$

В итоге получается следующий квадратичный Гамильтониан Калоджера-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx\sqrt{h}\chi_1 = \frac{1}{2}\oint dx\left(T_0 - \frac{1}{h'}T_{-1}^2\right) \qquad (3.5.3)$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'}\left(T_{-1}^{CM}\right)^2 = p^2\left(1 - \frac{k^2q_x^2}{c^2}\right) + \frac{(3k^2q_x^2 - c^2)}{4}\coth^2(q) - \frac{k^2q_x^2}{2} - \frac{k^4q_{\mathrm{xx}}^2}{4\nu^2} \quad (3.5.4)$$

Уравнение движения, производимые $H_0^{CM}$ имеют вид:

$$\dot{q} = p\left(1 - \frac{k^2q_x^2}{c^2}\right) \quad (3.5.5.1)$$

$$\dot{p} = -\frac{k^2}{c^2}\partial_x\left(p^2q_x\right) + \frac{(3k^2q_x^2 - c^2)\coth(q)}{4\sinh^2(q)} + \frac{3k^2}{4}\partial_x\left(q_x\coth^2(q)\right) -$$

$$-\frac{k^2\partial_x(q_x)}{2} + \frac{k^4}{4}\partial_x\left(\frac{q_{xxx}\nu - \nu_xq_{xx}}{\nu^3}\right) \quad (3.5.5.2)$$

с соответсвующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \quad (3.5.6)$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2q_x^2 + \nu^2$), то Гамильтониан (3.5.3)-(3.5.4) перейдет в выражение (3.2.4).

## 3.6. Гамильтониан для системы Ландау-Лифшиц.

Теперь, снова применяется конструкция описанная в пункте 2.4 с матрицей Лакса

$$L^{tor} = \begin{pmatrix} S_{11}(x)\coth(z) & \frac{S_{12}(x)}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}(x)}{\sinh(z)} - 4S_{12}(x)\sinh(z) & -S_{11}(x)\coth(z) \end{pmatrix} \quad (3.6.1)$$

получаются следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{11}(x)^2 + S_{12}(x)S_{21}(x) \quad (3.6.2.1)$$

$$T_{-1} = k(S_{11}(x))_x - \frac{kS_{11}(x)(S_{12}(x))_x}{S_{12}(x)} \quad (3.6.2.2)$$

$$T_0 = -4S_{12}(x)^2 - S_{12}(x)S_{21}(x) + \frac{3k^2(S_{12}(x))_x^2}{4(S_{12}(x))^2} - \frac{k^2(S_{12}(x))_{xx}}{2S_{12}(x)} \quad (3.6.2.3)$$

где индекс $x$ и $xx$ - это производные по $x$. Теперь используя следующие определения

$$h_l(x) = \lambda\chi_{l-1}, \quad \lambda^2 = T_{-2} \quad (3.6.3)$$

где $\lambda$ - собственное значение матрицы

$$S = \begin{pmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) \\ S_{21}(x) & -S_{11}(x) \end{pmatrix} \quad (3.6.4)$$

выводятся следующее выражение

$$h_2 = \lambda\chi_1 = \frac{1}{2}\left(T_0 - \frac{1}{4\lambda^2}T_{-1}^2\right) \tag{3.6.5}$$

Наконец при подстановке (3.6.5) и (3.6.2) в гамильтониан

$$H_l = \oint \mathrm{d}x h_l(x) \tag{3.6.6}$$

получается следующий Гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{\mathrm{LL}} = \frac{1}{2}\oint\{-4S_{12}(x)^2 - S_{12}(x)S_{21}(x) - \alpha\left(2(S_{11}(x))_x^2 + 2(S_{12}(x))_x(S_{21}(x))_x\right)\}\mathrm{dx} \tag{3.6.7.1}$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$.

Этот Гамильтониан может быть представлен в виде

$$H^{\mathrm{LL}} = \frac{1}{2}\oint\{tr\left(SJ\left(S\right)\right) - \alpha tr\left(S_x^2\right)\}\mathrm{dx} \tag{3.6.7.2}$$

Если подставить этот Гамильтониан в (3.3.6) с учетом скобки Пуассона-Ли

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = \left(S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}\right)\delta(x-y) \tag{3.6.8}$$

то в итоге получается уравнение движения для ферромагнетика

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha\left[S, S_{xx}\right] \tag{3.6.9}$$

А при подстановке переменных (3.4.17) в (3.6.7) выводится гамильтониан полевого КМ

$$H = \frac{1}{2}\oint dx\left(p^2\left(1 - \frac{k^2q_x^2}{c^2}\right) + \frac{(3k^2q_x^2 - c^2)}{4}\coth^2(q) - \frac{k^2q_x^2}{2} - \frac{k^4q_{\mathrm{xx}}^2}{4\nu^2}\right) \tag{3.6.10}$$

## 3.7. Уравнение Ландау-Лифшица.

Как и в предыдущем разделе, так и здесь используется уравнение Захарова-Шабата

$$\partial_t U(z) + k\partial_x V(z) = [U(z), V(z)] \tag{3.7.1}$$

где $x$ - координата на окружности. Скобки Пуассона у нас остаются прежними в связи с заменами переменных (3.4.17)

$$\{S_{ij}(x), S_{kl}(y)\} = \left(S_{il}(x)\delta_{kj} - S_{kj}(x)\delta_{il}\right)\delta(x-y) \tag{3.7.2}$$

На основе последних данных матрица Лакса (3.3.1) примет вид одной из U-V пар

$$U^{\mathrm{LL}} = L(z, S(x)) = \begin{pmatrix} S_{11}\coth(z) & \frac{S_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{S_{21}}{\sinh(z)} - 4S_{12}\sinh(z) & -S_{11}\coth(z) \end{pmatrix} \tag{3.7.3}$$

и

$$V^{\mathrm{LL}=} - \frac{1}{2}\left(V_1^{\mathrm{LL}} + V_2^{\mathrm{LL}}\right) \tag{3.7.4}$$

где

$$V_1^{\mathrm{LL}} = -\coth(z)L(z, S) - 2M(z, S) \tag{3.7.5}$$

а матрица $M$

$$M(z, S) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}S_{11} & 0 \\ -4S_{12}\cosh(z) & -\frac{1}{2}S_{11} \end{pmatrix} \tag{3.7.6}$$

Матрица $V_2^{\mathrm{LL}}$ представлена в виде

$$V_2^{\mathrm{LL}} = L(z, h) = \begin{pmatrix} h_{11}\coth(z) & \frac{h_{12}}{\sinh(z)} \\ \frac{h_{21}}{\sinh(z)} - 4h_{12}\sinh(z) & -h_{11}\coth(z) \end{pmatrix} \tag{3.7.7}$$

где матрица $h$

$$h = -\frac{k}{4\lambda^2}\left[S, S_x\right], \quad S_x = \partial_x S \tag{3.7.8}$$

Включив эти определения в (3.7.1) получится два уравнения:

$$k\partial_x V_1^{\mathrm{LL}} = \left[L, V_2^{\mathrm{LL}}\right], \tag{3.7.9}$$

$$\partial_t L - \frac{1}{2}k\partial_x V_2^{\mathrm{LL}} = -\frac{1}{2}\left[L, V_1^{\mathrm{LL}}\right] = [L, \mathcal{M}] \tag{3.7.10}$$

и

$$-k\partial_x S = [S, h] \tag{3.7.11}$$

$$\partial_t S - (k/2)\partial_x h = [J(S), S] \tag{3.7.12}$$

Благодаря соотношению $SS_x + S_x S = 0$ первое уравнение может быть решено, как указано в (3.7.8). Второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha\left[S, S_{xx}\right] \tag{3.7.13}$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. По компонентам получается

$$\begin{cases} \partial_t S_{11} = \alpha S_{21}\partial_x^2 S_{12} - \alpha S_{12}\partial_x^2 S_{21} + 4S_{12}^2 \\ \partial_t S_{21} = -2\alpha S_{21}\partial_x^2 S_{11} + 2\alpha S_{11}\partial_x^2 S_{21} - 8S_{12}S_{11} - S_{21}S_{11} \\ \partial_t S_{12} = -2\alpha S_{11}\partial_x^2 S_{12} + 2\alpha S_{12}\partial_x^2 S_{11} + S_{12}S_{11} \end{cases} \tag{3.7.14}$$

Отсюда следует, что уравнение (3.7.14) и (3.7.13) эквивалентно (3.7.1)

# 4. Эллиптический случай

Несмотря на то, что задачи здесь решаются также как и в предыдущих рзделах основным техническим вопросом по решению задач в эллиптическом случае являются тождества из раздела «**Приложения**»

## 4.1. Классическая механика

### 4.1.1. Поиски замены переменных от одного уравнения к другому

**Утверждение:**

При наличии матрицы Лакса Калоджера-Мозера

$$L^{\mathrm{KM}} = \begin{pmatrix} p & -\frac{\nu}{2}\phi(-q,z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q,z) & -p \end{pmatrix}, \tag{4.1.1}$$

матрицы Лакса Волчка Эйлера

$$L^{\mathrm{rot}} = \begin{pmatrix} S_{10}\varphi_{10} & S_{01}\varphi_{01} - iS_{11}\varphi_{11} \\ S_{01}\varphi_{01} + iS_{11}\varphi_{11} & -S_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

где

$$\varphi_{10} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{10}(z)}{\vartheta(z)\theta_{10}(0)}, \quad \varphi_{11} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{00}(z)}{\vartheta(z)\theta_{00}(0)}, \quad \varphi_{01} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{01}(z)}{\vartheta(z)\theta_{01}(0)} \tag{4.1.3}$$

и калибровочного преобразования

$$L^{\mathrm{top}} = gL^{\mathrm{KM}}g^{-1} \tag{4.1.4}$$

получить следующие элементы группы Ли $S_{10}$, $S_{11}$ и $S_{01}$. Затем получить Гамильтонианы Калоджера и Эйлера. Затем убедиться, что при подстановке замен Гамильтонианы сохраняют эквивалентность. И наконец выписать уравнение движение и пары Лакса.

**Доказательство:**

В этом пункте применяется матрица

$$g = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z+q,2\tau) & -\theta_{00}(z-q,2\tau) \\ -\theta_{10}(z+q,2\tau) & \theta_{10}(z-q,2\tau) \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

калибровочное преобразование (4.1.4) и следующие тождества (A.23)-(A.32), чтобы выписать равенство (4.1.4) для матричных элементов

$$L^{rot}_{11} = \frac{1}{\det g}\left(L^{KM}_{11}\left(g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}\right) + L^{KM}_{21}g_{12}g_{22} - L^{KM}_{12}g_{11}g_{21}\right) \tag{4.1.5.1}$$

$$L_{12}^{rot} = \frac{1}{\det g}\left(-2L_{11}^{KM}(g_{12}g_{11}) + L_{12}^{KM}g_{11}^2 - L_{21}^{KM}g_{12}^2\right) \tag{4.1.5.2}$$

$$L_{21}^{rot} = \frac{1}{\det g}\left(2L_{11}^{KM}g_{21}g_{22} + L_{21}^{KM}g_{22}^2 - L_{12}^{KM}g_{21}^2\right) \tag{4.1.5.3}$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{gathered} \det g = \vartheta(z)\vartheta(q), \\ g_{12}g_{22} = -\tfrac{1}{2}\theta_{10}(-z+q)\theta_{10}(0), \quad g_{11}g_{21} = -\tfrac{1}{2}\theta_{10}(z+q)\theta_{10}(0) \end{gathered} \tag{4.1.5.4}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)\right) \\ g_{12}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)\right) \end{aligned} \tag{4.1.5.5}$$

$$\begin{aligned} g_{21}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)\right) \\ g_{22}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)\right) \end{aligned} \tag{4.1.5.6}$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = \theta_{10}(z)\theta_{10}(q) \tag{4.1.5.7}$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{2}\left(\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) + \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)\right) \tag{4.1.5.8}$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2}\left(\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) - \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)\right) \tag{4.1.5.9}$$

дальше используется те же формулы сложения для тэта-функций. В итоге окончательный ответ будет иметь следующий вид ([15] и [16])

$$\begin{cases} S_{10} = p\dfrac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{10}(q)}{\vartheta(q)} + \dfrac{\nu}{2}\dfrac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)} \\ S_{11} = -p\dfrac{\theta_{00}(0)}{\sqrt{-1}\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)}{\vartheta(q)} - \dfrac{\nu}{2}\dfrac{\theta_{00}^2(0)}{\sqrt{-1}\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)}\dfrac{\theta_{10}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)} \\ S_{01} = p\dfrac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{01}(q)}{\vartheta(q)} + \dfrac{\nu}{2}\dfrac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)\theta_{10}(q)}{\vartheta^2(q)} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Чтобы определить каким скобкам Пуассона удовлетворяют замены (4.1.6), следует представить эти замены через эллиптические функции Якоби или воспользоваться соотношением (A.36)-(A.37) (следует также учитывать каноническую скобку Пуассона $\{p,q\} = 1$). В итоге получается следующая скобка Пуассона-Ли

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma \tag{4.1.7}$$

где (1, 2, 3)=(01, 11, 10).

### 4.1.2. Гамильтонианы.

В данном пункте применяется формула производящей функции, чтобы вычислить гамильтониан Калоджеро

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = p^2 + \frac{\nu^2}{4}\phi(-q,z)\phi(q,z) \tag{4.1.8}$$

или с учётом тождество (A.17)

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = p^2 - \frac{\nu^2}{4}\wp(q) + \frac{\nu^2}{4}\wp(z) \tag{4.1.9}$$

Отсюда следуют следующие выражения

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\wp(q) \tag{4.1.10}$$

$$H_2 = \frac{\nu^2}{4} \tag{4.1.11}$$

Теперь вычисляется гамильтониан Волчка Эйлера-Арнольда

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = S_{01}^2\varphi_{01}(z)^2 + S_{11}^2\varphi_{11}(z)^2 + S_{10}^2\varphi_{10}(z)^2 \tag{4.1.12}$$

Используя следующее соотношение $(\varphi_\alpha(z))^2 = \wp(z) - \wp(\omega_\alpha)$ и индексы $(01,11,10) = (1,2,3)$, в итоге получается

$$\frac{1}{2}Tr(L^2) = (S_{01}^2 + S_{11}^2 + S_{10}^2)\wp(z) + (-S_{01}^2\wp(\omega_1) - S_{11}^2\wp(\omega_2) - S_{10}^2\wp(\omega_3)) \tag{4.1.13}$$

Теперь здесь перед тем как проверить, что при подстановке замен (4.1.6) в гамильтониан

$$H_0 = \frac{1}{2}(-S_{01}^2\wp(\omega_1) - S_{11}^2\wp(\omega_2) - S_{10}^2\wp(\omega_3)) \tag{4.1.14}$$

проверяют, что при подстановке замен (4.1.6) в константу

$$H_2 = S_{01}^2 + S_{11}^2 + S_{10}^2 \tag{4.1.15}$$

получается константа (4.1.11).

При использования следующих соотношений (A.27)-(A.34) выводятся

$$H_2 = \frac{\nu^2\theta_{00}(0)^2\theta_{01}(0)^2\theta_{10}(0)^2\left(\theta_{01}(q)^4 + \theta_{10}(q)^4 - \theta_{00}(q)^4\right)}{\theta_{00}(0)^2\theta_{01}(0)^2\theta_{10}(0)^2\theta_{11}(q)^4} \tag{4.1.16}$$

теперь, если представить себе такое выражение (A.35)

$$\theta_{01}(q)^4 + \theta_{10}(q)^4 - \theta_{00}(q)^4 = \theta_{11}(q)^4 \tag{4.1.17}$$

то это выражение легко можно доказать при помощи соотношений (A.27)-(A.34). В итоге доказана эквивалентность (4.1.15) и (4.1.11).

Теперь можно возвращаться к проверке гамильтониана (4.1.14), используя при этом следующее соотношение $(\varphi_\alpha(z))^2 = \wp(z) - \wp(\omega_\alpha)$, но уже с аргументом $q$, т. е.

$$\wp(\omega_\alpha) = \wp(q) - (\varphi_\alpha(q))^2 \tag{4.1.18}$$

Подставляя (4.1.18) и (4.1.6) в (4.1.14) и, используя те же тождества (A.33), (A.34) и (A.35), получается гамильтониан КМ

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\wp(q) \tag{4.1.19}$$

В итоге доказана эквивалентность гамильтонианов.

### 4.1.3. Уравнения движения и пары Лакса.

Здесь применяется определении

$$\dot{S} = \{H, S\}, \tag{4.1.20}$$

гамильтониан (4.1.14) и скобки Пуассона (4.1.7), чтобы получить новую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{S}_{10} = \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{11}) - \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{01}) \\ \dot{S}_{11} = \sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{01}) - \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{10}) \\ \dot{S}_{01} = -\sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{11}) + \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{10}) \end{cases} \tag{4.1.21}$$

где $\wp(S_\alpha) = S_\alpha\wp(\omega_\alpha)$. А при степени $\wp(z)$ каждая уравнение системы равна нулю. Система уравнений (4.1.21) представлена в виде

$$\dot{S} = [J(S), S], \tag{4.1.22}$$

где

$$J(S) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \wp(S_{10}) & \wp(S_{01}) - \sqrt{-1}\wp(S_{11}) \\ \wp(S_{01}) + \sqrt{-1}\wp(S_{11}) & -\wp(S_{10}) \end{pmatrix} \tag{4.1.23}$$

С учётом матрицы (4.1.23) гамильтониан (4.1.14) можно представить в следующем виде

$$H_0 = \frac{1}{2}Tr(SJ(S)) \tag{4.1.24}$$

Теперь, из уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = \{H, L(z)\} = [L(z), \mathcal{M}(z)] \tag{4.1.25}$$

получается матрица $M$

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} & \frac{1}{2}(if_{11}(z)S_{11} - f_{01}(z)S_{01} \\ \frac{1}{2}(-f_{01}(z)S_{01} - if_{11}(z)S_{11}) & \frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} \end{pmatrix} \tag{4.1.26}$$

Если поставить матрицы (4.1.26) и (4.1.2) в уравнение Лакса (4.1.25), то это уравнение Лакса будет эквивалентно сисеме уравнений (4.1.22). С учётом тождество (A38).

Теперь из следующих определений для системы Калоджеро-Мозера и гамильтониана (4.1.19) выводятся уравнения движения

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\nu^2}{8}\wp'(q), \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \tag{4.1.27}$$

а матрица $M(z)$ будет иметь вид

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}E_2(q) & \frac{1}{4}\nu\phi'(-q,z) \\ \frac{1}{4}\nu\phi'(q,z) & -\frac{1}{4}E_2(q) \end{pmatrix} \tag{4.1.28}$$

Если поставить матрицы (4.1.1) и (4.1.28) в уравнение Лакса (4.1.25), то это уравнение Лакса будет эквивалентна уравнению (4.1.27).

## 4.2. Взаимосвязь м/д полевой системой Калоджеро-Мозера и уравнения Ландау-Лифшица.

**Утверждение:**

При наличии матриц Лакса для полевого Калоджеро-Мозера

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q,z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q,z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

и системы Ландау-Лифшиц

$$L^{\mathrm{LL}} = \begin{pmatrix} S_{10}\varphi_{10} & S_{01}\varphi_{01} - iS_{11}\varphi_{11} \\ S_{01}\varphi_{01} + iS_{11}\varphi_{11} & -S_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

и конструкции, описанной в пункте 1.1 получить гамильтонианы. Затем проверить эквивалентность уравнения Захарова-Шабата и Ландау-Лифшица.

**Доказательство:**

### 4.2.1. Гамильтониан для полевого Калоджера-Мозера.

Здесь (как и в предыдущих разделах) используется конструкция, описанная в пункте 2.4 для матрицы Лакса (4.2.1)

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q,z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q,z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

и выражения для $T$ ([13] и [16]) мы имеем

$$\begin{cases} 4T_{-2}^{CM} = k^2 q_x^2 + \nu^2 = c^2 = h' \\ 2T_{-1}^{CM} = -2kpq_x + \frac{k^2\nu_x}{\nu} q_x - k^2 q_{xx} \\ T_0^{CM} = p^2 + \frac{(2k^2q_x^2 - \nu^2)}{4}\wp(q) - \frac{kp\nu_x}{\nu} + \frac{k^2}{4}\left(\frac{\nu_x}{\nu}\right)^2 \end{cases} \tag{4.2.14}$$

Дальше вычисляется двумерное обобщение квадратичного гамильтониана Калоджера-Мозера

$$H_0^{CM} = \oint dx \sqrt{h} \chi_1 = \frac{1}{2} \oint dx \left( T_0 - \frac{1}{h'} T_{-1}^2 \right) \tag{4.2.15}$$

где подинтегральное выражение имеет вид

$$T_0^{CM} - \frac{1}{h'} \left( T_{-1}^{CM} \right)^2 = p^2 \left( 1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) + \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{4} \wp(q) - \frac{k^4 q_{\mathrm{xx}}^2}{4\nu^2} \tag{4.2.16}$$

Уравнение движения, производимые $H_0^{CM}$ имеют вид:

$$\dot{q} = p \left( 1 - \frac{k^2 q_x^2}{c^2} \right) \tag{4.2.17.1}$$

$$\dot{p} = \frac{k^2}{c^2} \partial_x \left( p^2 q_x \right) - \frac{(3k^2 q_x^2 - c^2)}{8} \wp'(q) + \frac{3k^2}{4} \partial_x \left( q_x \wp(q) \right) + \frac{k^4}{4} \partial_x \left( \frac{q_{xxx}\nu - \nu_x q_{xx}}{\nu^3} \right) \tag{4.2.17.2}$$

с соответсвующей скобкой Пуассона

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y) \tag{4.2.18}$$

Если подставить $k = 0$, то (учитывая $c^2 = k^2 q_x^2 + \nu^2$) уравнения движения (4.2.17.1) и гамильтониан перейдут в выражения (4.1.19) и (4.1.27).

### 4.2.2. Гамильтониан для системы Ландау-Лифшиц.

Теперь, вновь применяется та же конструкция описанная в пункте 2.4 и матрица Лакса (4.2.2). Отсюда получаются следующие соотношения

$$T_{-2} = S_{01}(x)^2 + S_{11}(x)^2 + S_{10}(x)^2 \tag{4.2.19.1}$$

$$T_{-1} = -\frac{kS_{10}(x)S'_{01}(x)}{S_{01}(x) - \sqrt{-1}S_{11}(x)} + \frac{\sqrt{-1}kS_{10}(x)S'_{11}(x)}{S_{01}(x) - \sqrt{-1}S_{11}(x)} + kS'_{10}(x) \tag{4.2.19.2}$$

$$T_0 = \frac{3k^2 S'_{01}(x)^2}{4(S_{01}(x) - \sqrt{-1}S_{11}(x))^2} - S_{01}(x)^2\wp(\omega_1) - S_{11}(x)^2\wp(\omega_2) - S_{10}(x)^2\wp(\omega_3) -$$

$$-\frac{3\sqrt{-1}k^2 S'_{01}(x)S'_{11}(x)}{2(S_{01}(x)-\sqrt{-1}S_{11}(x))^2}+\frac{\sqrt{-1}k^2 S''(2,x)}{2(S_{01}(x)-\sqrt{-1}S_{11}(x))}-\frac{k^2 S''(1,x)}{2(S_{01}(x)-\sqrt{-1}S_{11}(x))}-$$

$$-\frac{3k^2 S'_{11}(x)^2}{4(S_{01}(x)-\sqrt{-1}S_{11}(x))^2} \tag{4.2.19.3}$$

где индекс $'$ и $''$ - это производные по $x$. Теперь с учётом следующих определений

$$h_l(x)=\lambda\chi_{l-1}, \quad \lambda^2=T_{-2} \tag{4.2.20}$$

где $\lambda$ - собственное значение матрицы

$$S=\begin{pmatrix} S_{10}(x) & S_{01}(x)-\sqrt{-1}S_{11}(x) \\ S_{01}(x)+\sqrt{-1}S_{11}(x) & -S_{10}(x) \end{pmatrix} \tag{4.2.21}$$

выводятся следующее выражение

$$h_2=\lambda\chi_1=\frac{1}{2}\left(T_0-\frac{1}{4\lambda^2}T_{-1}^2\right) \tag{4.2.22}$$

Наконец подстановка (4.2.22) и (4.2.19) в гамильтониан

$$H_l=\oint \mathrm{d}x h_l(x) \tag{4.2.23}$$

даёт следующий гамильтониан Ландау-Лифшица

$$H^{\mathrm{LL}}=\frac{1}{2}\oint\left(-S_{01}(x)^2\wp(\omega_1)-S_{11}(x)^2\wp(\omega_2)-S_{10}(x)^2\wp(\omega_3)\right)\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{1}{2}\oint\left(-\frac{k^2 S'_{01}(x)^2}{4\lambda^2}-\frac{k^2 S'_{11}(x)^2}{4\lambda^2}-\frac{k^2 S'_{10}(x)^2}{4\lambda^2}\right)\mathrm{d}x \tag{4.2.24.1}$$

$$H^{\mathrm{LL}}=\frac{1}{2}\oint\{tr\left(SJ\left(S\right)\right)-\alpha tr\left(S_x^2\right)\}\mathrm{dx} \tag{4.2.24.2}$$

с константой $\alpha=k^2/8\lambda^2$.

### 4.2.3. Уравнение Ландау-Лифшица.

Как и в предыдущих разделах, так и здесь испоьзуется уравнение Захарова-Шабата

$$\partial_t U(z)+k\partial_x V(z)=[U(z),V(z)] \tag{4.2.25}$$

где $x$ - координата на окружности. Динамические переменные - это теперь периодические поля с скобками Пуассона

$$\{S_\alpha(x),S_\beta(y)\}=-\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma(x)\delta(x-y) \tag{4.2.26}$$

На основе последних данных матрица Лакса (4.2.2) примет вид одной из U-V пар

$$U^{\mathrm{LL}} = L(z, S(x)) = \begin{pmatrix} S_{10}\varphi_{10} & S_{01}\varphi_{01} - iS_{11}\varphi_{11} \\ S_{01}\varphi_{01} + iS_{11}\varphi_{11} & -S_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \tag{4.2.27}$$

и

$$V^{\mathrm{LL}=} - \frac{1}{2}\left(V_1^{\mathrm{LL}} + V_2^{\mathrm{LL}}\right) \tag{4.2.28}$$

$$V_1^{\mathrm{LL}} = -E_1(z)L(z, S) - 2M(z, S) \tag{4.2.29}$$

где матрица $M$

$$M(z,S) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} & \frac{1}{2}(if_{11}(z)S_{11} - f_{01}(z)S_{01} \\ \frac{1}{2}(-f_{01}(z)S_{01} - if_{11}(z)S_{11}) & \frac{1}{2}f_{10}(z)S_{10} \end{pmatrix} \tag{4.2.30}$$

Матрица $V_2^{\mathrm{LL}}$ имеет следующий вид

$$V_2^{\mathrm{LL}} = L(z, h) = \begin{pmatrix} h_{10}\varphi_{10} & h_{01}\varphi_{01} - \sqrt{-1}h_{11}\varphi_{11} \\ h_{01}\varphi_{01} + \sqrt{-1}h_{11}\varphi_{11} & -h_{10}\varphi_{10} \end{pmatrix} \tag{4.2.31}$$

где матрица $h$

$$h = -\frac{k}{4\lambda^2}\left[S, S_x\right], \quad S_x = \partial_x S \tag{4.2.32}$$

Подстановка определения в (4.2.25) выводит два уравнения:

$$k\partial_x V_1^{\mathrm{LL}} = \left[L, V_2^{\mathrm{LL}}\right], \tag{4.2.33}$$

$$\partial_t L - \frac{1}{2}k\partial_x V_2^{\mathrm{LL}} = -\frac{1}{2}\left[L, V_1^{\mathrm{LL}}\right] = [L, \mathcal{M}] \tag{4.2.34}$$

и

$$-k\partial_x S = [S, h] \tag{4.2.35}$$

$$\partial_t S - (k/2)\partial_x h = [J(S), S] \tag{4.2.36}$$

Благодаря соотношению $SS_x + S_xS = 0$ первое уравнение может быть решено, как указано в (4.2.32). Второе уравнение принимает вид:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha\left[S, S_{xx}\right] \tag{4.2.37}$$

с константой $\alpha = k^2/8\lambda^2$. По компонентам имеем

$$\begin{cases} \dot{S}_{10} = \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{11}) - \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{01}) + \dfrac{ik^2 S_{11}(x)S''_{01}(x)}{4\lambda^2} - \dfrac{ik^2 S_{01}(x)S''_{11}(x)}{4\lambda^2} \\ \dot{S}_{11} = \sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{01}) - \sqrt{-1}S_{01}\wp(S_{10}) + \dfrac{ik^2 S_{01}(x)S''_{10}(x)}{4\lambda^2} - \dfrac{ik^2 S_{10}(x)S''_{01}(x)}{4\lambda^2} \\ \dot{S}_{01} = -\sqrt{-1}S_{10}\wp(S_{11}) + \sqrt{-1}S_{11}\wp(S_{10}) + \dfrac{ik^2 S_{10}(x)S''_{11}(x)}{4\lambda^2} - \dfrac{ik^2 S_{11}(x)S''_{10}(x)}{4\lambda^2} \end{cases} \tag{4.2.38}$$

Отсюда следует, что уравнение (4.2.37) эквивалентно (4.2.25).

## 4.3. Поиски замен переменных между системами Ландау-Лифшица и полевого Калоджера-Мозера.

В этом пункте получены замены переменных $S$. Для этой цели используют следующую матрицу Лакса полевого Калоджера-Мозера

$$\tilde{L}^{CM} = \begin{pmatrix} p - \frac{kq_x}{2}E_1(z) & -\frac{\nu}{2}\phi(-q,z) \\ -\frac{\nu}{2}\phi(q,z) & -p + \frac{kq_x}{2}E_1(z) \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

с вычетом (так как любая матрица Лакса задаётся своим вычетом)

$$B = Res\tilde{L}_4^{CM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

Как и в предыдущих задачах для матрицы Лакса (4.3.1) нужно выбрать такую матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

чтобы полученная при этом $g$ зануляла собственный вектор (4.3.2).

Теперь вычисляется собственный вектор $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, который при $k = 0$ переходит в $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Сперва вычисляются собственные значение из детерминанта

$$\det(B - \lambda I) = 0 \tag{4.3.4}$$

Дальше из собственных значений

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} \tag{4.3.5.1}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{2} \tag{4.3.5.2}$$

и уравнения

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}kq_x - \lambda & -\frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{2}kq_x - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.3.6}$$

выводятся собственные вектроры для случая (4.3.5.1)

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{kq_x}{2} - \frac{c}{2}\\ -\frac{\nu}{2}\end{pmatrix} \tag{4.3.7.1}$$

А для случая (4.3.5.2)

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{c}{2} - \frac{kq_x}{2}\\ -\frac{\nu}{2}\end{pmatrix} \tag{4.3.7.2}$$

где $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2 q_x^2}$. Если ввести условие $k = 0$, то только вектор (4.3.7.1) переходит в $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Теперь, имея в наличии собственный вектор (4.3.7.1), и опператор Хекке

$$\Xi = \begin{pmatrix}\theta_{00}(z+q, 2\tau) & \theta_{00}(z-q, 2\tau)\\ -\theta_{10}(z+q, 2\tau) & -\theta_{10}(z-q, 2\tau)\end{pmatrix} \tag{4.3.8}$$

можно определить элементы диагональной матрицы

$$D = \begin{pmatrix}d_1 & 0\\ 0 & d_2\end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

А для этого необходимо, чтобы матрица калибровочного преобразования

$$g = \Xi(z,q)D^{-1}(q) \tag{4.3.10}$$

зануляла вектор (4.3.9.1), т. е.

$$g\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = 0 \tag{4.3.11}$$

В итоге матрица (4.3.9) примет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{\nu}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}(c+kq)\end{pmatrix} \tag{4.3.12.1}$$

$$D = \begin{pmatrix}\frac{2}{\nu} & 0\\ 0 & \frac{2}{-kq_x - c}\end{pmatrix} \tag{4.3.12.2}$$

В итоге калибровочное преобразование (4.3.10) примет вид

$$g = \begin{pmatrix}\theta_{00}(z+q,2\tau)\nu & -\theta_{00}(q-z,2\tau)\,(c+kq_x)\\ -\theta_{10}(z+q,2\tau)\nu & \theta_{10}(q-z,2\tau)\,(c+kq_x)\end{pmatrix} \tag{4.3.13.1}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{\theta_{10}(q-z,2\tau)}{\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)\nu} & -\frac{\theta_{00}(q-z,2\tau)}{\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)\nu}\\ -\frac{\theta_{10}(z+q,2\tau)}{\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)(c+kq_x)} & -\frac{\theta_{00}(z+q,2\tau)}{\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)(c+kq_x)}\end{pmatrix} \tag{4.3.13.2}$$

Дальше подстановка (3.3.13) и (4.3.1) в

$$L^{\mathrm{LL}} = -kg\partial_x g^{-1} + g\tilde{L}^{CM}g^{-1} \tag{4.3.14.1}$$

Здесь второе слагаемое обозначена как

$$\tilde{L}^{(CM),(2)} = g\tilde{L}^{CM}g^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{CM} & L_{12}^{CM} \\ L_{21}^{CM} & L_{22}^{CM} \end{pmatrix} \tag{4.3.14.2}$$

где (используется тождество (A.23)-(A.26))

$$L_{11}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(\tilde{L}_{11}^{CM}\left(g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12}\right) + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}g_{22} - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}g_{21}\right) \tag{4.3.14.3}$$

$$L_{12}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(-2\tilde{L}_{11}^{CM}(g_{12}g_{11}) + \tilde{L}_{12}^{CM}g_{11}^2 - \tilde{L}_{21}^{CM}g_{12}^2\right) \tag{4.3.14.4}$$

$$L_{21}^{CM} = \frac{1}{\det g}\left(2\tilde{L}_{11}^{CM}g_{21}g_{22} + \tilde{L}_{21}^{CM}g_{22}^2 - \tilde{L}_{12}^{CM}g_{21}^2\right) \tag{4.3.14.5}$$

С учётом следующих соотношений

$$\begin{gathered} \det g = \vartheta(z)\vartheta(q)(c + kq_x)\nu, \\ g_{12}g_{22} = -\tfrac{1}{2}\theta_{10}(-z+q)\theta_{10}(0)(c+kq_x)^2, \quad g_{11}g_{21} = -\tfrac{1}{2}\theta_{10}(z+q)\theta_{10}(0)\nu^2 \end{gathered} \tag{4.3.14.6}$$

$$\begin{gathered} g_{11}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)\right)\nu^2 \\ g_{12}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)\right)(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{4.3.14.7}$$

$$\begin{gathered} g_{21}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z+q)\theta_{01}(0)\right)\nu^2 \\ g_{22}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\theta_{00}(-z+q)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(-z+q)\theta_{01}(0)\right)(c+kq_x)^2 \end{gathered} \tag{4.3.14.8}$$

А ещё выражения

$$g_{11}g_{22} + g_{21}g_{12} = \theta_{10}(z)\theta_{10}(q)(c+kq_x)\nu \tag{4.3.14.9}$$

$$g_{12}g_{11} = -\frac{1}{2}\left(\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) + \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)\right)(c+kq_x)\nu \tag{4.3.14.10}$$

$$g_{21}g_{22} = -\frac{1}{2}\left(\theta_{00}(z)\theta_{00}(q) - \theta_{01}(z)\theta_{01}(q)\right)(c+kq_x)\nu \tag{4.3.14.11}$$

При упрощении выражений понадобятся тождество (A23-A32), (A36) и (A37). А первая слагаемая будет при нормировках $g \to g\sqrt{(detg)^{-1}}$, $\quad g^{-1} \to g^{-1}\sqrt{detg}$ раскладываться на две слагаемые, одна из которых имеет вид

$$G^{(1)} = -kg\partial_x g^{-1} \tag{4.3.14.12}$$

а другая слагаемая будет иметь следующий вид

$$G^{(2)} = -Ik\sqrt{(detg)^{-1}}\partial_x\sqrt{detg} \tag{4.3.14.13}$$

где $I$ - единичная матрица. При сложение обоих слагаемых получается

$$G = G^{(1)} + G^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{4.3.14.14}$$

где элементы матрицы

$$G_{11} = \frac{kq_x\theta_{10}'(z,\tau)\theta_{10}(q,\tau)}{2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{10}(z,\tau)\theta_{10}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.14.15)$$

$$G_{12} = -\frac{ck^2q_{xx}\theta_{00}(z,\tau)\theta_{00}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{01}(z,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} +$$

$$+\frac{kq_x\theta_{00}'(z,\tau)\theta_{00}(q,\tau)}{2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} + \frac{kq_x\theta_{01}'(z,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.14.16)$$

$$G_{21} = \frac{ck^2q_{xx}\theta_{00}(z,\tau)\theta_{00}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} - \frac{ck^2q_{xx}\theta_{01}(z,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} +$$

$$+\frac{kq_x\theta_{01}'(z,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} - \frac{kq_x\theta_{00}'(z,\tau)\theta_{00}(q,\tau)}{2\vartheta(z,\tau)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.14.17)$$

$$G_{22} = -G_{11} \qquad (4.3.14.18)$$

Здесь для упрощение используются те же тождество (A), а также производные (A23)-(A26).

В итоге получаются следующие замены переменных

$$S_{10} = -\frac{ck^2\theta_{10}(0,\tau)q_{xx}\theta_{10}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} + \frac{c\theta_{10}(0,\tau)^2\theta_{00}(q,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{2\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\vartheta(q,\tau)^2} + \frac{p\theta_{10}(0,\tau)\theta_{10}(q,\tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.15.1)$$

$$S_{01} = -\frac{ck^2\theta_{01}(0,\tau)q_{xx}\theta_{01}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} + \frac{c\theta_{01}(0,\tau)^2\theta_{00}(q,\tau)\theta_{10}(q,\tau)}{2\theta_{00}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau)\vartheta(q,\tau)^2} + \frac{p\theta_{01}(0,\tau)\theta_{01}(q,\tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.15.2)$$

$$S_{11} = -\frac{ick^2\theta_{00}(0,\tau)q_{xx}\theta_{00}(q,\tau)}{2\nu^2\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} + \frac{ic\theta_{00}(0,\tau)^2\theta_{01}(q,\tau)\theta_{10}(q,\tau)}{2\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau)\vartheta(q,\tau)^2} + \frac{ip\theta_{00}(0,\tau)\theta_{00}(q,\tau)}{\vartheta'(0)\vartheta(q,\tau)} \qquad (4.3.15.3)$$

Если воспользоваться (A.14), (A.15) и (4.1.3), то из замен (4.3.15) можно вынести общий множитель и тогда замены будут иметь следующий вид

$$S_\alpha(p,q) = (p - (c/2)\partial_q - (ck^2/2)(q_{xx}/\nu^2))\varphi_\alpha(q) \qquad (*)$$

Теперь при подстановке $c = \sqrt{h'} = \sqrt{\nu^2 + k^2q_x^2}$ (фиксирующая сопряженную орбиту в отмеченной точке), и $k = 0$, полученные замены (4.3.15) придут к заменам (4.1.6) из пункта 4.1. А скобки Пуассона-Ли будут иметь соответствующие виды

$$\{S_{11}(x), S_{01}(y)\} = \sqrt{-1}S_{10}(x)\delta(x-y) \qquad (4.3.16.1)$$

$$\{S_{10}(x), S_{01}(y)\} = -\sqrt{-1}S_{11}(x)\delta(x-y) \qquad (4.3.16.2)$$

$$\{S_{10}(x), S_{11}(y)\} = \sqrt{-1} S_{01}(x)\delta(x-y) \tag{4.3.16.3}$$

аналогичные скобкам для простой механики (4.1.7). (Скобки Пуассона (4.3.16) можно проверить также как и скобки (4.1.7)). Также как и в предыдущих разделах при помощи замен (4.3.15) можно проверить совпадение гамильтонианов.

# 5. Заключение

Приведем основные результаты:

- Установлена калибровочная эквивалентность между уравнениями Ландау-Лифшица и 1+1 полевой моделью Калоджеро-Мозера в рациональном, тригонометрическом и эллиптическом случаях.
- Явно получены замены переменных, выражающие компоненты вектора намагниченности модели Ландау-Лифшица через канонические полевые переменные Калоджеро-Мозера.
- Проверено, что полученные формулы замены переменных представляют собой пуассоново отображение, переводящее канонические скобки Пуассона $\{p(x),q(y)\} = \delta(x-y)$ в линейные скобки на алгебре петель $\{S_a(x),S_b(y)\} = ...$ Также проверено совпадение гамильтонианов обеих моделей.

Полученные результаты также распространяются на такие же задачи ранга выше $N > 2$, к примеру $N = 3$. В дальнейшем планируется также проверить аналогичность полученных замен $S(x)$ для каждого случая (рационального, тригонометрического и эллиптического), т.е. к примеру проверить, что замены переменных $S(x)$ для эллиптического случая переходят в замены для тригонометрического и рационального случая.

# 6. Приложение

Все основные формулы для эллиптических функций из данного приложения были позаимствованны [18]. Пусть $q = e^{2\pi i\tau}$ , где $\tau$ является модульным параметром эллиптической кривой $E_\tau$ .

Основным элементом является тета-функция:

$$\vartheta(z|\tau) = q^{\frac{1}{8}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n e^{\pi i(n(n+1)\tau+2nz)} =$$

$$= q^{\frac{1}{8}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\left(1-q^n e^{2i\pi z}\right)\left(1-q^n e^{-2i\pi z}\right) \tag{A.1}$$

Функции Эйзенштейна

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \log\vartheta(z|\tau), \quad E_1(z|\tau) \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1 z \tag{A.2}$$

где

$$\eta_1(\tau) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{3}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m\tau+n)^2} = \frac{24}{2\pi i}\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \tag{A.3.1}$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n>0}(1-q^n) \tag{A.3.2}$$

это функция Дедекинда.

$$E_2(z|\tau) = -\partial_z E_1(z|\tau) = \partial_z^2 \log\vartheta(z|\tau), \quad E_2(z|\tau) \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1 \tag{A.4}$$

Следующая важная функция

$$\phi(u,z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)} \tag{A.5}$$

имеет полюс в $z = 0$ и разлагается в следующий ряд

$$\phi(u,z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}\left(E_1^2(u) - \wp(u)\right) + \dots \tag{A.6}$$

Четность функций

$$\vartheta(-z) = -\vartheta(z) \tag{A.7}$$

$$E_1(-z) = -E_1(z) \tag{A.8}$$

$$E_2(-z) = E_2(z) \tag{A.9}$$

$$\phi(u,z) = \phi(z,u) = -\phi(-u,-z) \tag{A.10}$$

Квазипериодические свойства

$$\vartheta(z+1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(z+\tau) = -q^{-\frac{1}{2}}e^{-2\pi i z}\vartheta(z) \tag{A.11}$$

$$E_1(z+1) = E_1(z), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i \tag{A.12}$$

$$E_2(z+1) = E_2(z), \quad E_2(z+\tau) = E_2(z) \tag{A.13}$$

$$\phi(u+1,z) = \phi(u,z), \quad \phi(u+\tau,z) = e^{-2\pi i z}\phi(u,z) \tag{A.14}$$

Формула сложения

$$\phi(u,z)\partial_v\phi(v,z)-\phi(v,z)\partial_u\phi(u,z)=\left(E_2(v)-E_2(u)\right)\phi(u+v,z) \qquad (A.15)$$

$$\phi(u,z)\partial_v\phi(v,z)-\phi(v,z)\partial_u\phi(u,z)=(\wp(v)-\wp(u))\phi(u+v,z) \qquad (A.16)$$

$$\phi(-q,z)\phi(q,z)=\wp(z)-\wp(q)=E_2(z)-E_2(q) \qquad (A.17)$$

Тета-функции с характеристиками

$$\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](z,\tau)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left((j+a)^2\frac{\tau}{2}+(j+a)(z+b)\right) \qquad (A.18)$$

В частности, функция $\vartheta$ (A.1) это тета-функция с характеристикой

$$\vartheta(x,\tau)=\theta\left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array}\right](x,\tau) \qquad (A.19)$$

$$\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](z+1,\tau)=\mathbf{e}(a)\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](z,\tau) \qquad (A.20)$$

$$\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](z+a'\tau,\tau)=\mathbf{e}\left(-a'^2\frac{\tau}{2}-a'(z+b)\right)\theta\left[\begin{array}{c} a+a' \\ b \end{array}\right](z,\tau) \qquad (A.21)$$

$$\theta\left[\begin{array}{c} a+j \\ b \end{array}\right](z,\tau)=\theta\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right](z,\tau), \quad j\in\mathbb{Z} \qquad (A.22)$$

Здесь $\theta\left[\begin{array}{c} a/2 \\ b/2 \end{array}\right]=\theta_{ab}$

Формулы с удвоенным модулярным параметром

$$2\vartheta(x,2\tau)\theta_{01}(y,2\tau)=\vartheta\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right)+$$
$$+\theta_{10}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2},\tau\right) \qquad (A.23)$$

$$2\theta_{00}(x,2\tau)\theta_{10}(y,2\tau)=\vartheta\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2},\tau\right)+$$
$$+\theta_{10}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right) \qquad (A.24)$$

$$2\theta_{00}(x,2\tau)\theta_{00}(y,2\tau)=\theta_{00}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right)+$$
$$+\theta_{01}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right) \qquad (A.25)$$

$$2\theta_{10}(x,2\tau)\theta_{10}(y,2\tau)=\theta_{00}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right)-$$

$$-\theta_{01}\left(\frac{x+y}{2},\tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2},\tau\right) \tag{A.26}$$

формулы сложения для тета-функций

$$\vartheta(x+u)\theta_{00}(x-u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0)=\theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u)+$$

$$+\theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u) \tag{A.27}$$

$$\vartheta(x-u)\theta_{00}(x+u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0)=\theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u)-$$

$$-\theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u) \tag{A.28}$$

$$v(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)=\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u)+$$

$$+\theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u) \tag{A.29}$$

$$v(x-u)\theta_{01}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)=-\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u)+$$

$$+\theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u) \tag{A.30}$$

$$v(x+u)\theta_{10}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)=\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u)+$$

$$+\theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u) \tag{A.31}$$

$$\vartheta(x-u)\theta_{10}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)=-\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u)+$$

$$+\theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u) \tag{A.32}$$

Соотношения между квадратами тета-функций

$$\begin{array}{l}\vartheta(z)^2\theta_{01}(0)^2=\theta_{00}(z)^2\theta_{10}(0)^2-\theta_{10}(z)^2\theta_{00}(0)^2\\ \theta_{10}(z)^2\theta_{01}(0)^2=\theta_{01}(z)^2\theta_{10}(0)^2-\vartheta(z)^2\theta_{00}(0)^2\\ \theta_{00}(z)^2\theta_{01}(0)^2=\theta_{01}(z)^2\theta_{00}(0)^2-\vartheta(z)^2\theta_{10}(0)^2\\ \theta_{01}(z)^2\theta_{01}(0)^2=\theta_{00}(z)^2\theta_{00}(0)^2-\theta_{10}(z)^2\theta_{10}(0)^2\end{array} \tag{A.33}$$

Тождество Римана

$$\theta_{00}(0)^4=\theta_{10}(0)^4+\theta_{01}(0)^4 \tag{A.34}$$

Ещё одна формула сложения тета-фуекций

$$\theta_{01}(x)^4 + \theta_{10}(x)^4 - \theta_{00}(x)^4 = \theta_{11}(x)^4 \tag{A.35}$$

квазипериодические функции

$$F_\gamma(z) = \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(z) = \varphi_\gamma(z)E_1(z) - f_\gamma(z) = -\partial_z\varphi_\gamma(z) \tag{A.36}$$

$$\partial_z\varphi_\gamma(z) = \varphi_\gamma(z)\left(\frac{\theta'_\gamma(z)}{\theta_\gamma(z)} - \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\right) \tag{A.37}$$

и тождество

$$\varphi_\beta(z)f_\gamma(z) - \varphi_\gamma(z)f_\beta(z) = \varphi_{\beta+\gamma}(z)\left(\wp(\omega_\beta) - \wp(\omega_\gamma)\right) \tag{A.38}$$

# Список литературы


[1] Кричевер И. Интегрирование линейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц. анал. и прил. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 15-31;

[2] Фаддеев Л., Тахтаджян Л. Гамильтонов подход в теории солтонов. М.: Наука, 1986.
Sokolov V. V., Shabat A. B. Classification of integrable evolution equations // Sov. Sci. Rev. C. 1984. V.4. P.221-280;

[3] F. Calogero, J. Math. Phys. 10 (1969) 2191–2196.
F. Calogero, J. Math. Phys. 12 (1971) 419–436.
B. Sutherland, Physical Review A, 4:5 (1971) 2019–2021.
B. Sutherland, Physical Review A, 5:3 (1972) 1372–1376.
J. Moser, Advances in mathematics 16 (1975) 197–220.

[4] A.G. Reyman, M.A Semenov-Tyan-Shanskii, Lie algebras and Lax equations with spectral parameter on elliptic curve, Notes from Sci. Seminar LOMI Vol. 150, (1986), 104-118 (in Russian)

[5] R.J.Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain, I.Ann.Phys. **76** (1973)
M.Jimbo, T.Miwa, M.Okado, Local state probabilities of solvable lattice models: an $A^1_{n-1}$ family, Nucl.Phys. **B300**, [**FS22**] 74-108 (1988)
L.Faddeev, L.Takhtajan, The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model, Uspekhi Mat.Nauk **34:5**, (1979) 11-68 (English transl.)

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Собр. тр. Л. Д. Ландау. М., 1969. Т.1. С. 128-143.

[7] B.Dubrovin, V.Matveev, S.Novikov, Nonlinear equations of KdV type and finite gap linear operators and abelian manifolds, UMN (1976), XXXI, 1 (187) (in Russian).

[8] Krichever, Vector bundles and Lax equations on algebraic curves, hep-th/0108110

[9] I.M. Krichever, Funct. Anal. Appl., 14:4 (1980) 282–290.

[10] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Classical integrable systems and soliton equations related to eleven-vertex R-matrix. Nuclear Physics B 887 (2014) 400-422 arXiv:1406.2995

[11] G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, Rational Top and its Classical R-matrix. High Energy Physics - Theory J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 305207 arXiv:1402.3189v3.

[12] T. Krasnov, A. Zotov, Trigonometric integrable tops from solutions of associative Yang-Baxter equation. Math. Phys. Annales Henri Poincare 20:8 (2019) 2671-2697 arXiv:1812.04209

[13] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Hitchin systems - Symplectic Hecke correspondence and two-dimensional version. Commun. Math. Phys. 236 (2003) 93–133; arXiv:nlin/0110045v3 [nlin.SI].

[14] Zotov A., 1+1 Gaudin Model. Math. Phys. SIGMA 7: 067 (2011) arXiv:1012.1072.

[15] А. В. Зотов, А. В. Смирнов, Модификации расслоений, эллиптические интегрируемые системы и связанные задачи, ТМФ, 2013, том 177, номер 1, 3–67 DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8551

[16] А. В. Зотов, "Классические интегрируемые системы и их теоретико-полевые обобщения", Физика элементарных частиц и атомного ядра, 37:3 (2006), 759–842 ; A. V. Zotov, "Classical integrable systems and their field-theoretical generalizations", Physics of Particles and Nuclei, 37:3 (2006), 400-443 .

[17] L.Takhtajan, V.Zakharov The equivalence the nonlinear Schrodinger equation and the Heizenberg ferromagnet, Theor. Math. Phys. 38 (1979) 26-35.

[18] A.Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976.
D.Mumford, Tata Lectures on Theta I, II, Birkhauser Boston, 1983, 1984.