

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)"  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Свойства пропагаторов скалярного поля в пространстве  
де Ситтера в статических координатах**

(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Работу выполнил:

студент 821 группы \_\_\_\_\_ Дьяконов Дмитрий Владимирович

Научный руководитель:

д-р физ.-мат. наук, проф. \_\_\_\_\_ Ахмедов Эмиль Тофик Оглы

# Содержание

1	Введение . . . . .	2
2	Геометрия пространства де Ситтера . . . . .	4
3	Каноническое квантование . . . . .	5
4	Термальная двухточечная корреляционная функция . . . . .	7
5	Разложение по голоморфным плоским волнам . . . . .	8
6	Свойства термальных функций Вайтмана . . . . .	10
6.1	Асимптотическое поведение для времени-подобного разделения . . . . .	10
6.2	Пространственно-подобное разделение . . . . .	11
6.3	Свето-подобное разделение . . . . .	12
6.4	Дополнительная особенность на горизонте . . . . .	13
6.5	Плоский предел ( $R \rightarrow \infty$ ) . . . . .	14
7	Однопетлевая поправка . . . . .	16
7.1	Однопетлевая поправка в пределе $t \rightarrow \infty$ . . . . .	16
7.2	Однопетлевая поправка в пределе $t_1 + t_4 \gg  t_1 - t_4 $ . . . . .	20
8	Заключение . . . . .	23
A	Аппендикс . . . . .	24
A.1	Свойства полноты присоединённых функций Лежандра . . . . .	24

# 1 Введение

Пространство де Ситтера является решением уравнений ОТО с космологической постоянной. Предполагается, что реальная Вселенная описывалась моделью де Ситтера на очень ранних стадиях расширения (инфляционная модель Вселенной). В связи с этим изучение квантовой теории поля в де Ситтере является интересным не только с точки зрения изучения КТП в искривленных пространствах, но и понимания происходящего в ранней вселенной.

Одним из свойств пространства-времени де Ситтера является то, что несмотря на его максимальную симметрию, он не обладает глобально определенным времени-подобным вектором Киллинга. В связи с этим возникает множество трудностей в квантовой теории поля в де Ситтере. Однако, эта симметрия допускает существование нескольких систем координат, с помощью которых можно параметризовать различные области пространства де Ситтера.

В данной работе мы рассматриваем статический регион. Сам по себе он является глобально гиперболическим пространством-временем, но поверхность Коши для этого региона является неполной для всего многообразия де Ситтера, а является лишь «половиной» истинной поверхности Коши, см. рис. (1). Однако, квантование в статических координатах имеет отличительные особенности по сравнению с любой другой системой координат на многообразии де Ситтера, поскольку гамильтон оператор не зависит от времени.

В работе мы строим оператор поля, используя стандартное каноническое квантование. Для этих целей мы также нашли свойства полноты присоединённых функций Лежандра, которое не было найдено в литературе. Далее мы строим термальные смешанные состояния. Используя интегральное представление, мы показываем, что только при температуре  $T = 1/2\pi R$  корреляционные функции в де Ситтере уважают его симметрию.

Отметим, что также вакуумное (чистое) состояние при  $T = 0$  не уважает группу изометрий де Ситтера — корреляторы не являются функциями геодезических расстояний. Помимо этого, все термальные состояния, кроме инвариантного, имеют дополнительные особенности на горизонте. Также в данной работе изложено несколько интересных свойств корреляционных функций.

Основной целью наших исследований в дальнейшем является изучение эволюция начального состояния. Дело в том, что в отличие от случая плоского пространства у нас нет интуиции, основанной на тщательных вычислениях, какова судьба общего начального состояния. Например, мы не можем определенно сказать, действительно ли оно термализуется или нет.

Для этого, в работе вычислены однопетлевые поправки к термальным пропагаторам в разных пределах. Суммирование и исследование свойств, к которым они приводят, является дальнейшими планами нашей работы.

## 2 Геометрия пространства де Ситтера

Мы ограничиваем наше внимание двумерным случаем только для упрощения уравнений. Большинство наших результатов, изложенных ниже, могут быть непосредственно распространены на случай большей размерности.

Двумерное пространство де Ситтера проще всего представить в виде однолистного гиперboloида, вложенного в трехмерное пространство Минковского:

$$dS_2 = \{X \in \mathbf{R}^3, X^\alpha X_\alpha = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = -R^2\}. \quad (2.1)$$

Статические координаты заданы следующим образом:

$$X \left( \frac{t}{R}, \frac{x}{R} \right) = \begin{cases} X^0 = R \sinh \frac{t}{R} \operatorname{sech} \frac{x}{R} \\ X^1 = R \tanh \frac{x}{R} = u \\ X^2 = R \cosh \frac{t}{R} \operatorname{sech} \frac{x}{R} \end{cases}, \quad t \in (-\infty, \infty), x \in (-\infty, \infty). \quad (2.2)$$

Для удобства мы положим  $R = 1$ .

Они накрывают четверть  $\{|X^1| < 1\} \cap \{X^2 > |X^0|\}$  пространства де Ситтера Fig. 1

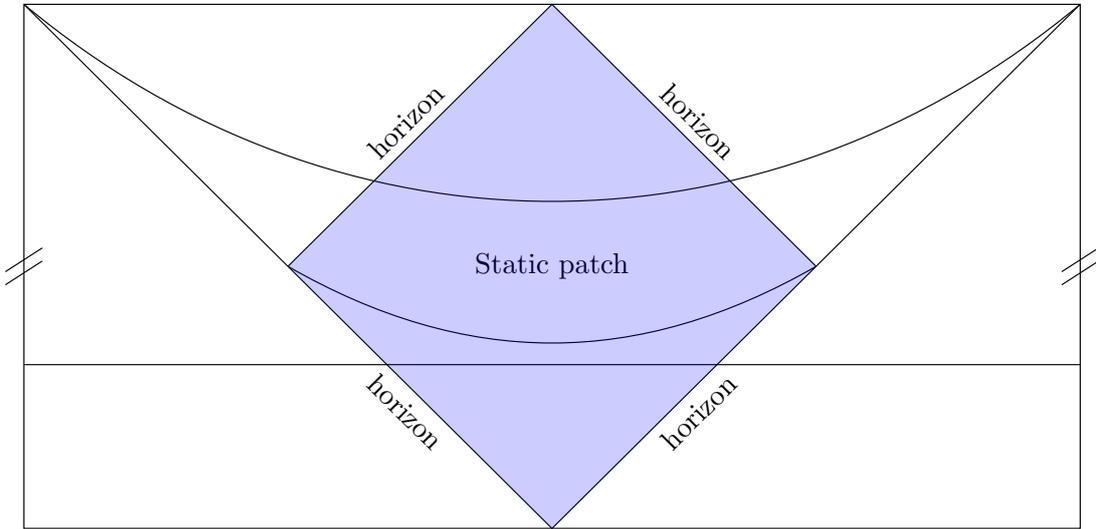


Рис. 1: Диаграмма Пенроуза для пространства де Ситтера с поверхностями Коши для различных регионов.

Метрика в статическом регионе имеет вид:

$$ds^2 = \frac{dt^2 - dx^2}{\cosh x^2}. \quad (2.3)$$

Эта метрика удобна тем, что она не зависит от времени и является конформно плоской. Статический регион ограничен двумя горизонтами

Киллинга

$$x \rightarrow \pm\infty, \quad t = \pm x$$

где метрика вырождается.

Инвариантное скалярное произведение в пространстве де Ситтера имеет вид:

$$\zeta = \zeta_{12} = X_1^\alpha X_{2\alpha} = -\frac{\cosh(t_1 - t_2) + \sinh x_1 \sinh x_2}{\cosh x_1 \cosh x_2}. \quad (2.4)$$

Связь геодезического расстояния  $L$  и  $\zeta$  задается следующим образом:  $\zeta = -\cosh(L)$  времени-подобное,  $\zeta = \cos(L)$  пространственно-подобное;  $\zeta = -1$  свето-подобное разделение.

### 3 Каноническое квантование

В этом разделе мы проквантуем массивное скалярное поля в статическом де Ситтере.

Действие имеет вид:

$$S = \int d^2x \sqrt{g} (\partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi - m^2 \varphi^2). \quad (3.5)$$

Используя вариационный принцип, мы находим уравнение Клейна-Гордона описывающие классическое поле:

$$\left( \partial_t^2 - \partial_x^2 + \frac{m^2}{\cosh^2 x} \right) \phi(t, x) = 0. \quad (3.6)$$

Положительно-частотное решение можно написать следующим образом:

$$\varphi(t, x) = e^{-i\omega t} \psi_\omega(u), \quad u = \tanh x. \quad (3.7)$$

где  $\psi_\omega(u)$  является собственной функцией известной квантово-механической задачи рассеяния:

$$\left[ -\partial_x^2 + \frac{m^2}{\cosh^2 x} \right] \psi_\omega(u) = \omega^2 \psi_\omega(u),$$

$$u = \tanh x, \quad m^2 = \frac{1}{4} + \nu^2. \quad (3.8)$$

Для  $\omega \geq 0$  есть два линейно независимых решения  $\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\pm u)$  — известные как функции Лежандра [26].

Двойное вырождение энергетического уровня  $\omega$  указывает на введение двух пар операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} [a_{\omega_1}, a_{\omega_2}^\dagger] &= \delta(\omega_1 - \omega_2), & [b_{\omega_1}, b_{\omega_2}^\dagger] &= \delta(\omega_1 - \omega_2), \\ [a_{\omega_1}, b_{\omega_2}] &= [a_{\omega_1}, b_{\omega_2}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Разложения по модам оператора поля  $\phi(t, x)$  может быть написан следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[ e^{-i\omega t} \left( \psi_\omega(u) a_\omega + \psi_\omega(-u) b_\omega \right) + \right. \\ \left. + e^{i\omega t} \left( \psi_\omega^*(u) a_\omega^\dagger + \psi_\omega^*(-u) b_\omega^\dagger \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\psi_\omega(u) = \sqrt{\sinh(\pi\omega)} \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\nu - i\omega\right) \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u). \quad (3.11)$$

Нормировка была выбрана так, чтобы удовлетворять коммутационному соотношению

$$\left[ \phi(t, x_1), \phi(t, x_2) \right] = 0, \quad \left[ \phi(t, x_1), \dot{\phi}(t, x_2) \right] = i\delta(x_1 - x_2). \quad (3.12)$$

Для этого нам надо знать свойства полноты функций Лежанда (см. [аппендикс А](#)). Асимптотическое поведение мод на плюс бесконечности имеет вид:

$$\psi_\omega(\tanh x) \sim e^{i\omega x} \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.13)$$

соответственно, это мода соответствуют волнам двигающимся направо, аналогично

$$\psi_\omega(-\tanh x) \sim e^{-i\omega x} \quad x \rightarrow -\infty$$

налево.

Свободный Гамильтониан имеет вид:

$$: H := \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sqrt{g} : T_0^0 := \int_0^{+\infty} d\omega \omega \left( a_\omega^\dagger a_\omega + b_\omega^\dagger b_\omega \right). \quad (3.14)$$

Обратим внимание, что энергии начитается с нуля (а не  $m$ , как для массивного поля в плоском пространстве). Это потому, что вклад массы в действие имеет вид:

$$S_m = \int d^2x (\cosh x)^{-2} m^2 \varphi^2(t, x),$$

и вырождается у горизонта.

## 4 Термальная двухточечная корреляционная функция

В этом разделе мы определим термальную двухточечную корреляционную функцию для произвольной температуры. Среднее по термальному состоянию с обратной температурой  $\beta$  определяется следующим образом:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = \frac{\text{Tr } \rho \mathcal{O}}{\text{Tr } \rho}, \quad \rho \equiv e^{-\beta H}. \quad (4.15)$$

Соответственно, среднее от произведения оператора рождения и уничтожения подчиняется распределению Бозе-Эйнштейна:

$$\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle_\beta = \langle b_\omega^\dagger b_{\omega'} \rangle_\beta = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1} \delta(\omega - \omega'). \quad (4.16)$$

Используя (3.10) и (3.14) мы получаем следующие выражение:

$$\begin{aligned} W_\beta(t_1 - t_2, x_1, x_2) &= \langle \phi(t_1, x_1) \phi(t_2, x_2) \rangle_\beta = \\ &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{4\pi^2} \left[ \frac{e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{1 - e^{-\beta\omega}} \left( \psi_\omega(u_1) \psi_\omega^*(u_2) + \psi_\omega(-u_1) \psi_\omega^*(-u_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{i\omega(t_1-t_2)}}{e^{\beta\omega} - 1} \left( \psi_\omega^*(u_1) \psi_\omega(u_2) + \psi_\omega^*(-u_1) \psi_\omega(-u_2) \right) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(t_1-t_2)} \frac{1 - e^{-2\pi\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} \tilde{P}_\nu(\omega, u_1, u_2) d\omega \quad (4.17) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{P}_\nu(\omega, u_1, u_2) = \frac{e^{\pi\omega} \left( P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u_1) P_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(u_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-u_1) P_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(-u_2) \right)}{8 \cosh \pi(\nu - \omega) \cosh \pi(\nu + \omega)}. \quad (4.18)$$

Отметим, что для произвольной температуры мы не знаем как выразить интеграл в (4.17) через известные спецфункции, но в следующей секции мы увидим что для температуры  $\beta = 2\pi$  эта двухточечная функция зависит лишь от инварианта де Ситтера (геодезического расстояния) и совпадает с так называемой двухточечной функцией Банча-Дэвиса, которая определена на всем пространстве де Ситтера:

$$W_{2\pi}(t_1 - t_2, x_1, x_2) = W_{BD}(\zeta) = \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)|^2}{4\pi} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(\zeta), \quad (4.19)$$

А для произвольной  $\beta$  функция  $W_\beta(t_1 - t_2, x_1, x_2)$  не является де Ситтер инвариантной, так как инвариант де Ситтера не является периодичным в мнимом времени с периодом  $t \rightarrow t + i\beta$ , а лишь с  $\beta = 2\pi$ .

## 5 Разложение по голоморфным плоским волнам

Что бы доказать, что для температуры  $\beta = 2\pi$  двухточечная функция (4.17) совпадает с функцией Банча-Дэвиса мы рассмотрим разложения функции Банча-Дэвиса по голоморфным плоским волнам и покажем, что этот ответ совпадает с полученным нами выше. Для начала рассмотрим двумерное комплексное пространство де Ситтера:

$$dS_2^c = \{Z \in \mathbf{C}^3, \quad Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 = -1\}. \quad (5.20)$$

где

$$Z(t, x) = \begin{cases} Z^0 = \sinh t \operatorname{sech} x \\ Z^1 = \tanh x \\ Z^2 = \cosh t \operatorname{sech} x \end{cases}. \quad (5.21)$$

отметим что  $t$  и  $x$  являются комплексными. В частности

1. для  $0 < \operatorname{Im} t < \pi$  и  $x \in \mathbf{R}$ ,  $Z(t, x)$  лежит в:

$$\mathcal{T}_+ = \{Z = X + iY \in dS_2^c, \quad Y^2 > 0, \quad Y^0 > 0\}. \quad (5.22)$$

2. а для  $-\pi < \operatorname{Im} t < 0$  и  $x \in \mathbf{R}$ ,  $Z(t, x)$  лежит в

$$\mathcal{T}_- = \{Z = X + iY \in dS_2^c, \quad Y^2 > 0, \quad Y^0 < 0\}. \quad (5.23)$$

Существует набор решений уравнения Клейна-Гордона который можно интерпретировать как плоские волны в пространстве де Ситтера [6, 7, 27]. Их определение не имеет отношения к какой-либо конкретной системе координат и может быть задано в терминах пространства вложения:

$$(\square - m^2)(\xi \cdot Z)^{-\frac{1}{2}+i\nu} = 0 \quad (5.24)$$

где действительный вектор  $\xi$  лежит на световом конусе в пространстве вложения

$$C^+ = \{\xi \in \mathbf{R}^3, \quad (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 0, \quad \xi^0 > 0\}. \quad (5.25)$$

Граничное значение является решением действительного уравнения Клейна-Гордона:

$$(\xi \cdot X)_{\pm}^{-\frac{1}{2}+i\nu} = \lim_{Z \in \mathcal{T}_{\pm}, Z \rightarrow X} (\xi \cdot Z)^{-\frac{1}{2}+i\nu} \quad (5.26)$$

Инвариантная к группе де Ситтера функция Банча-Дэвиса имеет следующее интегральное представление в терминах плоских волн для точек  $Z_1 \in \mathcal{T}^-$  и  $Z_2 \in \mathcal{T}^+$  [6, 7]:

$$W_{BD}(Z_1 \cdot Z_2) = \frac{e^{\pi\nu}}{8\pi \cosh \pi\nu} \int_{\Sigma} (\xi \cdot Z_1)^{-\frac{1}{2}-i\nu} (\xi \cdot Z_2)^{-\frac{1}{2}+i\nu} d\sigma(\xi). \quad (5.27)$$

Где  $\Sigma$  - это любой базис на  $C_+$  и  $d\sigma$  соответствующая индуцированная мера [6]. В такой форме инвариантность корреляционной функции относительно изометрий де Ситтера очевидна, как мы сейчас увидим.

Наша цель разложить вышеупомянутую плоскую волну по модам в статическом регионе.

Первое, что нужно сделать - это выбрать базис на  $C_+$ . Удобнее всего для наших вычислений это выбрать на левой стороне конуса базис:

$$\xi_l(w) = \begin{cases} \xi^0 = \cosh w \\ \xi^1 = -1 \\ \xi^2 = \sinh w \end{cases} \quad (5.28)$$

и на правой:

$$\xi_r(w) = \begin{cases} \xi^0 = \cosh w \\ \xi^1 = +1 \\ \xi^2 = -\sinh w \end{cases} \quad (5.29)$$

Соответственно, мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \xi_l \cdot Z &= \tanh x + \operatorname{sech} x \sinh(t - w), \\ \xi_r \cdot Z &= -\tanh x + \operatorname{sech} x \sinh(t + w). \end{aligned} \quad (5.30)$$

В  $Z(t+i\epsilon, x)$  положим  $t$  действительным и так как  $Z(t+i\epsilon, x) \in \mathcal{T}_+$  волна  $(\xi_l \cdot Z)^\lambda$  является регулярной функцией  $t$ . Соответственно делая Фурье преобразование мы получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (\xi_l(w) \cdot Z(t+i\epsilon, x))^{-\frac{1}{2}+i\nu} dt &= \\ &= \frac{2e^{-i\omega w} \Gamma(\frac{1}{2} - i\nu + i\omega)}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\nu)} e^{\frac{1}{2}\pi\omega} \left( e^{-\pi\omega} Q_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(u+i\epsilon) \right); \end{aligned} \quad (5.31)$$

где  $Q$  это присоединённые функции Лежандра определенные на комплексной плоскости с разрезом от  $-\infty$  до 1 [26]. Делая обратное преобразование получим:

$$\begin{aligned} (\xi_l(w) \cdot Z(t+i\epsilon, x))^{-\frac{1}{2}+i\nu} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-w)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - i\nu + i\omega)}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\nu)} e^{\frac{1}{2}\pi\omega} \left( e^{-\pi\omega} Q_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(u+i\epsilon) \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Для  $Z \in \mathcal{T}^-$  аналогичные вычисления дают:

$$\begin{aligned} (\xi_l(w) \cdot Z(t-i\epsilon, x))^{-\frac{1}{2}-i\nu} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int e^{-i\omega(t-w)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)} e^{\frac{1}{2}\pi\omega} \left( e^{\pi\omega} Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u-i\epsilon) \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Также

$$\begin{aligned} & (\xi_r(w) \cdot Z(t \pm i\epsilon, x))^{-\frac{1}{2} \pm i\nu} = \\ & = \pm \frac{e^{-\nu\pi}}{i\pi} \int e^{\pm i\omega(t+w)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \mp i\nu \pm i\omega)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp i\nu)} e^{\frac{1}{2}\pi\omega} \left( e^{\mp\pi\omega} Q_{-\frac{1}{2} \mp i\nu}^{\mp i\omega}(u \mp i\epsilon) \right) d\omega. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Собирая все вместе мы получим интегральное представление функции Банча-Дэвиса:

$$W_{BD}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t_1-t_2)} \widetilde{W}_{BD}(\omega, u_1, u_2) d\omega \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{BD}(\omega, u_1, u_2) &= \frac{e^{\pi\omega}}{4\pi^2 \cosh \pi(\nu - \omega)} \left[ e^{\pi\nu} Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u_1 - i\epsilon) Q_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(u_2 + i\epsilon) + \right. \\ & \left. + e^{-\pi\nu} Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u_1 + i\epsilon) Q_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(u_2 - i\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Теперь, используя соотношение [26]

$$\begin{aligned} Q_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u \pm i0) &= \frac{\pi}{2 \cosh(\pi(\nu + \omega))} e^{-\pi\omega \mp \frac{\pi\omega}{2}} \times \\ & \times \left( \mp i e^{\pm\pi(\nu+\omega)} \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(u) + \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-u) \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

прямым вычислением мы получим:

$$\widetilde{W}_{BD}(\omega, u_1, u_2) = \widetilde{P}_\nu(\omega, u_1, u_2). \quad (5.38)$$

Следовательно, для  $\beta = 2\pi$ , (4.17) и (5.36) совпадают.

## 6 Свойства термальных функций Вайтмана

В этой секции мы изучим свойства термальных функций Вайтмана. Это, в дальнейшем, поможет нам в изучении петлевых поправок.

### 6.1 Асимптотическое поведение для времени-подобного разделения

Рассмотрим асимптотическое поведения термальной функции Вайтмана при произвольной температуре для больших времен  $t = t_1 - t_2 \rightarrow \infty$  и для простоты вычислений положим  $x_1 = x_2 = 0$  (общий случай  $x_1 \neq x_2$  дает тот же самый результат). В таком пределе функция Вайтмана имеет вид:

$$W_\beta(t_1 - t_2, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t_1-t_2)} \frac{\sinh(\pi\omega)}{1-e^{-\beta\omega}} \frac{\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(0) \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}-i\nu}^{-i\omega}(0)}{4 \cosh \pi(\nu-\omega) \cosh \pi(\nu+\omega)}. \quad (6.39)$$

Отметим, что  $\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(0)$  не имеет полюсов по  $\omega$ . Теперь, как мы можем заметить, данный интеграл можно взять по полюсам:

$$\omega = \pm \nu - \frac{i}{2} + in, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega = \frac{2\pi ik}{\beta}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0. \quad (6.40)$$

Полюс  $\omega = 0$  сокращается. А в пределе  $t \rightarrow \infty$  лидирующий вклад дают те полюса, которые лежат ближе всего к действительной оси, так как остальные приводят к экспоненциально подавленным вкладам относительно лидирующего

$$W_\beta(t, x_1 = x_2 = 0) \approx \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}}(C_+ e^{i\nu t} + C_- e^{-i\nu t}) & \text{для } \beta < 4\pi \\ C_\beta e^{-t\frac{2\pi}{\beta}} & \text{для } \beta > 4\pi \end{cases}, \quad (6.41)$$

где

$$C_+ = C_-^* = \frac{1 - e^{-2\pi(\nu + \frac{i}{2})} e^{-\pi\nu} \Gamma(i\nu) \Gamma(\frac{1}{2} - i\nu)}{1 - e^{-\beta(\nu + \frac{i}{2})} 2\pi\sqrt{\pi}}, \quad (6.42)$$

и

$$C_\beta = \frac{\sin\left(\frac{2\pi^2}{\beta}\right)}{4\pi^2\beta} \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\nu}{2} - \frac{\pi}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\nu}{2} + \frac{\pi}{\beta}\right) \right|^2. \quad (6.43)$$

Как мы можем видеть, асимптотическое поведение меняется при температуре  $\beta = 4\pi$ . Следует заметить также, что в пределе  $\beta \rightarrow \infty$  константа  $C_\beta$  стремится к нулю и асимптотическое поведение опять переходит в режим  $\beta < 4\pi$ .

## 6.2 Пространственно-подобное разделение

Чтобы посчитать асимптотическое поведения для пространственно-подобного разделения, возьмем предел одной из координат  $x_2 \rightarrow +\infty$  а  $x_1$  и  $t$  будем держать конечными. Асимптотическое поведения функции Лежандра имеет вид:

$$\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\tanh x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \frac{e^{i\omega x}}{\Gamma(1 - i\omega)}, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-\tanh x) \underset{x \rightarrow \infty}{\approx} \left[ \frac{\Gamma(-i\omega) e^{-i\omega x}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega) \Gamma(\frac{1}{2} - i\nu - i\omega)} + \frac{\cosh(\nu\pi) \Gamma(i\omega) e^{i\omega x}}{\pi} \right]. \quad (6.45)$$

Сразу заметим, что особенность  $\omega = 0$  в двух последних членах сокращается, но, так как мы рассматриваем предел большого пространственного разделения, то мы должны рассматривать эти вклады по отдельности. Потому что в соответствии с леммой Жордана мы должны замыкать контур в разных направлениях. Теперь подставляя (6.44) и (6.45) в (4.17) и делая сдвигку  $\omega \rightarrow \omega + i\epsilon$  мы получим:

$$\begin{aligned}
W_\beta(t, x_1, x_2 \rightarrow +\infty) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4} \frac{e^{i\omega t}}{e^{\beta(\omega+i0)} - 1} \times \\
&\times \frac{\sinh \pi\omega}{\cosh \pi(\omega - \nu) \cosh \pi(\omega + \nu)} \left[ \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\tanh x_1) \frac{e^{-i\omega x_2}}{\Gamma(1+i\omega)} + \right. \\
&+ \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-\tanh x_1) \left[ \frac{\Gamma(i\omega) e^{i\omega x_2}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu + i\omega) \Gamma(\frac{1}{2} - i\nu + i\omega)} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{\cosh(\nu\pi) \Gamma(-i\omega) e^{-i\omega x_2}}{\pi} \right] \right].
\end{aligned}$$

Далее, замыкая контура соответствующим образом, мы получим:

$$\begin{aligned}
\lim_{x_2 \rightarrow \infty} W_\beta(t_1 - t_2, x_1, x_2) &= \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{4 \cosh \nu\pi} P_{-\frac{1}{2}+i\nu}(-\tanh x_1) = \\
&= \frac{2\pi}{\beta} W_{BD}(-\tanh x_1).
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Как мы можем видеть, в этом пределе функция Фейтмана линейно зависит от температуры. Далее мы увидим, что эта особенность поведения пропагаторов приводит к дополнительной особенности на горизонте при  $\beta \neq 2\pi$ .

### 6.3 Свето-подобное разделение

Для свето-подобного разделения, как и ожидается, мы получим особенность как и в пространстве Минковского. Для де Ситтер инвариантного случая, то есть  $\beta = 2\pi$  из уравнения (4.19), мы получаем:

$$W_{BD}(\zeta \approx -1) \approx -\frac{1}{4\pi} \log(1 + \zeta) \approx -\frac{1}{4\pi} \log [t^2 - (x_1 - x_2)^2]. \tag{6.47}$$

В случае же произвольной  $\beta$  этот же результат можно получить следующим образом, так как мы знаем, что интеграл набирается на больших частотах. Следовательно мы можем взять предел  $\omega \rightarrow \infty$  для функций Лежандра

$$\mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\tanh x_1) \approx e^{i\omega x_1} / \Gamma(1 - i\omega).$$

Вычисления дают следующий ответ:

$$\begin{aligned} W_\beta(t, x_1, x_2) &\approx \int_1^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{e^{i\omega t}}{2\omega} \left( e^{i\omega(x_2-x_1)} + e^{-i\omega(x_2-x_1)} \right) \approx \\ &\approx -\frac{1}{4\pi} \log \left[ t^2 - (x_2 - x_1)^2 \right]. \end{aligned}$$

Это поведения имеет место для произвольного  $\beta$  и зависимость от температуры теряется в высоком энергетическом пределе. Ниже мы увидим, что для  $\beta \neq 2\pi$  на горизонте имеется дополнительная особенность, связанная с явлением, рассмотренным в предыдущем разделе. Это несмотря на то, что события на горизонте также имеют свето-подобное разделение.

## 6.4 Дополнительная особенность на горизонте

В этом разделе мы покажем, что для температуры  $\beta \neq 2\pi$  на горизонте появляется дополнительная особенность. Для начала рассмотрим случай  $\beta = 2\pi/N$ . Можно заметить, что термальное распределение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega t}}{e^{2\pi\omega/n} - 1} &= \frac{e^{i\omega t}}{e^{2\pi\omega} - 1} \frac{e^{2\pi\omega} - 1}{e^{2\pi\omega/n} - 1} = \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{e^{2\pi\omega} - 1} \left[ e^{2\pi\omega \frac{n-1}{n}} + e^{2\pi\omega \frac{n-2}{n}} + \dots + e^{2\pi\omega \frac{1}{n}} + 1 \right] = \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\omega(t+i2\pi \frac{k}{n})}}{e^{2\pi\omega} - 1}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Следовательно, мы можем представить термальную функцию Вайтмана как конечную сумму [30]:

$$\begin{aligned} W_{\frac{2\pi}{N}}(t_1 - t_2, x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t_1-t_2)} \frac{1 - e^{-2\pi\omega}}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{N}}} \tilde{P}_{\omega,\nu}(u_1, u_2) d\omega \\ &= \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)|^2}{4\pi} P_{-\frac{1}{2}+i\nu} \left( \zeta \left( t_1 - t_2 - i\epsilon, x_1, x_2 \right) \right) + \\ &+ \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)|^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{N-1} P_{-\frac{1}{2}+i\nu} \left( \zeta \left( t_1 - t_2 - i\frac{2\pi n}{N}, x_1, x_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Первый член этой суммы - это, в точности, функция Банча-Дэвиса, которая является де Ситтер инвариантной и имеет особенность в  $\zeta = -1$ . Дополнительная сингулярность появляется в остальных членах, когда две точки лежат на горизонте

$$X_1 = X(\lambda + c_1, \lambda), \quad X_2 = X(\lambda + c_2, \lambda + \Delta\lambda) \quad (6.50)$$

в пределе  $\lambda \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} & \zeta \left( c_1 - c_2 - i\frac{2\pi n}{N}, \lambda, \lambda + \Delta\lambda \right) = \\ & = -\frac{\cosh \left( c_1 - c_2 - i\frac{2\pi n}{N} \right) + \sinh \lambda \sinh(\lambda + \Delta\lambda)}{\cosh \lambda \cosh(\lambda + \Delta\lambda)} \rightarrow -1. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Для произвольной температуры используя асимптотики функций Лежандра получаем следующие выражение:

$$W_\beta(t, x_1, x_2) \approx \int d\omega \frac{e^{i\omega(c_2-c_1)}}{e^{\beta(\omega+i0)} - 1} \left( A_+(\omega)e^{2i\omega\lambda} + A_-(\omega)e^{-2i\omega\lambda} \right). \quad (6.52)$$

где  $A_\pm$  функции от  $\omega$ . Явный их вид мы не выписываем, так как нам нужно знать поведение одной из них только в нуле. Чтобы посчитать этот интеграл замкнем контур для первого и второго члена в верхней и нижней плоскости соответственно. Лидирующий вклад дает двойной полюс в нуле  $\omega = -i0$ :

$$\begin{aligned} W_\beta(\lambda \rightarrow \infty) & \approx -\frac{1}{2} \int d\omega \frac{1}{(e^{\beta(\omega+i0)} - 1) \sinh \pi(\omega + i0)} e^{-2i\omega\lambda} \approx \\ & \approx \frac{2\pi \lambda}{\beta \pi} \approx \frac{2\pi}{\beta} W_{BD}(\lambda \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (6.53)$$

где

$$\lambda \sim |\log[t^2 - (x_1 - x_2)^2]| \rightarrow \infty.$$

Обратим внимание, что в то время как для светоподобного разделения внутри статического региона, лидирующий вклад в пропагатор вносят большие энергии  $\omega$ , а на горизонте маленькие  $\omega$  обеспечивают основной вклад. При этом горизонт является сведоподобным. Но так как горизонт является границей региона, неудивительно, что в этом основной вклад вносит инфракрасный, а не ультрафиолетовый диапазон частот.

Мы видим, что функция Вайтмана с  $\beta \neq 2\pi$  имеет ту же структуру сингулярности как и функция Банча-Дэвиса, но с другим коэффициентом  $\frac{2\pi}{\beta}$ .

## 6.5 Плоский предел ( $R \rightarrow \infty$ )

В этой секции мы рассмотрим предел когда радиус де Ситтера стремится к бесконечности ( $R \rightarrow \infty$ ). В этом пределе метрика становится плоской.

Начнем с рассмотрения предела функции Вайтмана для  $\beta = 2\pi$  разложенной по плоским волнам (5.27). Для этих целей удобнее выбрать другой базис на  $C^+$ :

$$\xi_+(k) = \begin{cases} \xi^0 = \sqrt{k^2 + m^2}/m \\ \xi^1 = k/m \\ \xi^2 = -1 \end{cases} \quad \xi_-(k) = \begin{cases} \xi^0 = \sqrt{k^2 + m^2}/m \\ \xi^1 = -k/m \\ \xi^2 = +1 \end{cases}. \quad (6.54)$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi_+(k) \cdot X\left(\frac{t-i\epsilon}{R}, \frac{x}{R}\right)}{R} \right)^{-\frac{1}{2}-imR} = e^{-it\sqrt{k^2+m^2}+ikx} \quad (6.55)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi_-(k) \cdot X\left(\frac{t-i\epsilon}{R}, \frac{x}{R}\right)}{R} \right)^{-\frac{1}{2}-imR} = 0. \quad (6.56)$$

Следовательно, функция Вайтмана при  $R \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned} & W_{BD} \left( X \left( \frac{t_1 - i\epsilon}{R}, \frac{x_1}{R} \right), X \left( \frac{t_2 + i\epsilon}{R}, \frac{x_2}{R} \right) \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{k^2+m^2}(t_1-t_2-i\epsilon)+ik(x_1-x_2)} \frac{dk}{\sqrt{k^2+m^2}} \end{aligned} \quad (6.57)$$

и переходит в вакуумную функцию Вайтмана для массивного поля в Минковском.

Теперь посмотрим предел для произвольной температуры  $W_\beta$ . Начнем с интегрального представления (4.17), которое может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} W_\beta(t, x_1, x_2) = & \int_0^\infty d\omega \left[ e^{-i\omega t} \tilde{P}_\nu^R(\omega, x_1, x_2) \frac{1 - e^{-2\pi R\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} + \right. \\ & \left. + e^{i\omega t} \tilde{P}_\nu^R(\omega, x_1, x_2) \frac{1 - e^{-2\pi R\omega}}{e^{\beta\omega} - 1} \right], \end{aligned} \quad (6.58)$$

Предел  $W_R$ , при  $R \rightarrow \infty$  может быть найден при помощи следующего трюка. Для случая  $\beta = 2\pi R$  функцию Вайтмана можно переписать как:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} W_{BD}(t, x_1, x_2) = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} \tilde{P}_\nu^\infty(\omega, x_1, x_2). \quad (6.59)$$

Таким образом, в пределе  $R \rightarrow \infty$ , функция  $P_\nu^\infty$  может быть найдена из (6.57). Таким образом, для произвольной температуры  $\beta$  мы можем написать:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} W_\beta(t, x_1, x_2) &= \int_0^\infty d\omega \left[ e^{-i\omega t} P_\nu^\infty(\omega, x_1, x_2) \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{i\omega t} P_\nu^\infty(\omega, x_1, x_2) \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{4\pi\sqrt{k^2 + m^2}} \left[ e^{-i\sqrt{k^2 + m^2}t + ik(x_1 - x_2)} \frac{1}{1 - e^{-\beta\sqrt{k^2 + m^2}}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{i\sqrt{k^2 + m^2}t - ik(x_1 - x_2)} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{k^2 + m^2}} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Как результат мы получили термальную функцию в плоском пространстве с температурой  $\beta$ .

## 7 Однопетлевая поправка

В работах [17, 18, 19], были изучены различные регионы пространства де Ситтера и их стабильность при учете квантовых флуктуаций. В них было показано что вклад петлевых поправок зависит существенным образом от начального состояния. И петлевые поправки растут сингулярным образом. В некоторых случаях система приходит в состояния схожее с термальным, а в некоторых заселенность уровней становится сингулярной.

В данной части работы мы хотим вычислить однопетлевую поправку к пропагатору для произвольной температуры. Чтобы в дальнейшем понять как эволюционирует произвольное термальное состояние.

### 7.1 Однопетлевая поправка в пределе $t \rightarrow \infty$

Что бы изучать эволюцию произвольно начального состояния. Добавим в действие взаимодействие вида

$$S_{int} = \lambda \int d^2x \sqrt{g} \phi^3(x)$$

Для этих целей мы должны использовать диаграммную технику Келдыша-Швингера[16]. В этой диаграммной технике мы должны работать с матрицей пропагаторов, которую можно составить зная функцию Вайтмана (4.17):

$$\begin{aligned}
\hat{G} &= \begin{pmatrix} G_{--} & G_{-+} \\ G_{+-} & G_{++} \end{pmatrix} = \\
&= \int d\omega \begin{pmatrix} e^{-i\omega|t|} & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & e^{i\omega|t|} \end{pmatrix} \frac{\sinh(\pi\omega)}{4(e^{\beta\omega} - 1) \cosh \pi(\omega - \nu) \cosh \pi(\omega + \nu)} \times \\
&\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\tanh x_1) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-\tanh x_1) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega}(-\tanh x_2) \right]. \tag{7.61}
\end{aligned}$$

Для простоты вычислений однопетлевой поправки к пропагатору, положим значения координат на внешних ногах :  $\tanh x_1 = \tanh x_4 = 0$  и  $t = t_1 - t_4 \rightarrow \infty$ . В этом случае поправка имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \hat{G}(0, 0|t) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \frac{\sinh(\pi\omega_1) \sinh(\pi\omega_2) \sinh(\pi\omega_3) \sinh(\pi\omega_4)}{2^8 \sinh\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_4}{2}\right)} \times \\
&\times \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_1}(0) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_4}(0) e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}}{\cosh^2(\pi(\omega_1 - \nu)) \cosh^2(\pi(\omega_1 + \nu))} \times \\
&\times \int \frac{dx_2 dx_3}{(\cosh x_2)^2 (\cosh x_3)^2} \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(-\tanh x_2) \right]}{\cosh \pi(\omega_2 - \nu) \cosh \pi(\omega_2 + \nu)} \times \\
&\times \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_3) \right]}{\cosh \pi(\omega_3 - \nu) \cosh \pi(\omega_3 + \nu)} \times \\
&\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_3) \right] \times \\
&\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_3) \right] \times \\
&\times \int_{t_0}^{\infty} dt_2 dt_3 \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1|t_1-t_2|} & e^{i\omega_1(t_1-t_2)} \\ e^{-i\omega_1(t_1-t_2)} & e^{i\omega_1|t_1-t_2|} \end{pmatrix} \sigma_3 \times \\
&\times \begin{pmatrix} e^{-i(\omega_2+\omega_3)|t_2-t_3|} & e^{i(\omega_2+\omega_3)(t_2-t_3)} \\ e^{-i(\omega_2+\omega_3)(t_2-t_3)} & e^{i(\omega_2+\omega_3)|t_2-t_3|} \end{pmatrix} \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{-i\omega_4|t_3-t_4|} & e^{i\omega_4(t_3-t_4)} \\ e^{-i\omega_4(t_3-t_4)} & e^{i\omega_4|t_3-t_4|} \end{pmatrix}, \tag{7.62}
\end{aligned}$$

где  $\sigma_3$  это матрица Паули и  $t_0$  это начальное время, после которого взаимодействие включается адиабатически. Для вычисления последнего интеграла в (7.62) воспользуемся следующим интегральным представлением:

$$\begin{pmatrix} e^{-i\omega|t|} & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & e^{i\omega|t|} \end{pmatrix} = \int da e^{-iat} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \frac{2i\omega}{a^2 - \omega^2 + 2i\omega\epsilon} & \delta(\omega + a) \\ \delta(\omega - a) & -\frac{1}{2\pi} \frac{2i\omega}{a^2 - \omega^2 - 2i\omega\epsilon} \end{pmatrix}. \tag{7.63}$$

После взятия интеграла по  $t_{2,3}$  а также предела  $t_0 \rightarrow \infty$  в (7.62) мы можем убедиться, что всегда есть члены вида  $\delta(a - \omega_1)\delta(a - \omega_4)$ , которые соответствуют закону сохранения энергии на внешних ногах. Эти слагаемые дают лидирующий вклад:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 \hat{G}(0, 0|t) = & \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 \frac{\sinh(\pi\omega_1) \sinh(\pi\omega_2) \sinh(\pi\omega_3) \sinh(\pi\omega_4)}{2^8 \sinh\left(\frac{\beta\omega_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_4}{2}\right)} \times \\
& \times \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_1}(0) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_4}(0) e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}}{\cosh^2(\pi(\omega_1 - \nu)) \cosh^2(\pi(\omega_1 + \nu))} \times \\
& \times \int \frac{dx_2 dx_3}{(\cosh x_2)^2 (\cosh x_3)^2} \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(-\tanh x_2) \right]}{\cosh \pi(\omega_2 - \nu) \cosh \pi(\omega_2 + \nu)} \times \\
& \times \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_3) \right]}{\cosh \pi(\omega_3 - \nu) \cosh \pi(\omega_3 + \nu)} \times \\
& \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_3) \right] \times \\
& \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_3) \right] \times \\
& \times \int da e^{-iat} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \frac{i\Omega\delta(\omega_1+a)\delta(\omega_4-a)}{a^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\epsilon} & \delta(\omega_1 + a)\delta(\omega_4 + a)\delta(\Omega - a) \\ \delta(\omega_1 - a)\delta(\omega_4 - a)\delta(\Omega + a) & \frac{1}{2\pi} \frac{-i\Omega\delta(\omega_1-a)\delta(\omega_4+a)}{a^2 - \Omega^2 + 2i\Omega\epsilon} \end{pmatrix}, \\
\end{aligned} \tag{7.64}$$

где  $\Omega = \omega_2 + \omega_3$ . Далее возьмем интеграл по  $\omega_1$  и  $\omega_4$  :

$$\Delta_1 \hat{G}(0, 0|t) = \int da \frac{\sinh^2(\pi a)}{\sinh^2\left(\frac{\beta a}{2}\right)} \frac{e^{-iat}}{\cosh^2(\pi(a - \nu)) \cosh^2(\pi(a + \nu))} \begin{pmatrix} I_{--} & I_{-+} \\ I_{+-} & I_{++} \end{pmatrix}, \tag{7.65}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{--}(a) &= -I_{++}(-a) = \int d\omega_2 d\omega_3 P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-ia}(0) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-ia}(0) \times \\
&\quad \times \frac{\sinh(\pi\omega_2) \sinh(\pi\omega_3)}{2^8 \sinh\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)} e^{-\frac{\beta}{2}(\omega_2+\omega_3)} \times \\
&\quad \times \int \frac{dx_2 dx_3}{(\cosh x_2)^2 (\cosh x_3)^2} \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(-\tanh x_2) \right]}{\cosh \pi(\omega_2 - \nu) \cosh \pi(\omega_2 + \nu)} \times \\
&\quad \times \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(-\tanh x_3) \right]}{\cosh \pi(\omega_3 - \nu) \cosh \pi(\omega_3 + \nu)} \times \\
&\quad \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(\tanh x_4) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_4) \right] \times \\
&\quad \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_3) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_3) \right] \times \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \frac{i\Omega}{a^2 - \Omega^2 - 2i\Omega\epsilon}, \tag{7.66}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
I_{-+}(a) &= I_{+-}(-a) = \int d\omega_2 d\omega_3 P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-ia}(0) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(0) \times \\
&\quad \times \frac{\sinh(\pi\omega_2) \sinh(\pi\omega_3)}{2^8 \sinh\left(\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \sinh\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)} e^{\frac{\beta}{2}a} \times \\
&\quad \times \int \frac{dx_2 dx_3}{(\cosh x_2)^2 (\cosh x_3)^2} \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{ia}(-\tanh x_2) \right]}{\cosh \pi(\omega_2 - \nu) \cosh \pi(\omega_2 + \nu)} \times \\
&\quad \times \frac{\left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-ia}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-ia}(-\tanh x_3) \right]}{\cosh \pi(\omega_3 - \nu) \cosh \pi(\omega_3 + \nu)} \times \\
&\quad \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_3) \right] \times \\
&\quad \times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_3) \right] \times \\
&\quad \times \delta(\omega_2 + \omega_3 - a). \tag{7.67}
\end{aligned}$$

Подынтегральная функция (7.65) содержит двойные полюса: первые когда

$$\cosh[\pi(\omega - \nu)] \cosh[\pi(\omega + \nu)] = 0 \tag{7.68}$$

и вторые

$$\sinh\left(\frac{\beta a}{2}\right) = 0 \tag{7.69}$$

Чтобы вычислить лидирующий вклад в однопетлевую поправку мы можем замкнуть контур и взять интеграл по полюсам. В пределе  $t \rightarrow \infty$  лидирующий вклад берется из полюса который находится ближе всего к действительной оси  $\omega = -\frac{i}{2} \pm \nu$  или  $\omega = i\frac{2\pi}{\beta}$ . Также учтем, что при взятии интеграл следующим образом:

$$\int_{C_{\omega_c}} da \frac{e^{-iat} f(a)}{(a - \omega_N)^2} = \int_{C_{\omega_c}} da \left( \frac{e^{-iat} f(\omega_c)}{(a - \omega_c)} (-it) + \frac{e^{-iat} f'(\omega_c)}{(a - \omega_c)} \right), \quad (7.70)$$

в правой части первый член много больше второго в пределе  $t \rightarrow \infty$ . Собирая все вместе, мы получим:

$$\Delta_1 \hat{G}(0, 0|t) = \begin{cases} \hat{C}_{1+} e^{-t(\frac{1}{2}-i\nu)} t + \hat{C}_{1-} e^{-t(\frac{1}{2}+i\nu)} t & , \text{if } \beta < 4\pi \\ \hat{C}_{1\beta} e^{-t\frac{2\pi}{\beta}} t & , \text{if } \beta > 4\pi \end{cases}. \quad (7.71)$$

Где матрица  $\hat{C}_{1(+-\beta)}$  это значение подынтегрального выражения в соответствующем полюсе (7.65). Как мы можем видеть, в этом пределе однопетлевая поправка может быть гораздо больше древесного вклада, так как она растет со временем.

## 7.2 Однопетлевая поправка в пределе $t_1 + t_4 \gg |t_1 - t_4|$

В этой секции мы рассмотрим однопетлевую поправку в пределе  $t_1 + t_4 \rightarrow \infty$  и  $t_1 - t_4 = \text{const}$ . В этом пределе мы можем переписать  $\Delta_1 G_{--}(x, y, t)$ , где  $t = t_1 - t_4$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 G_{--}(x, y, t) &= \int dw_1 dw_2 dw_3 dw_4 n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) F(\omega_i) \times \quad (7.72) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 dt_3 \left[ e^{-i\omega_1|t_1-t_2|-i(\omega_2+\omega_3)|t_2-t_3|-i\omega_4|t_3-t_4|} - e^{i\omega_1(t_1-t_2)-i(\omega_2+\omega_3)(t_2-t_3)-i\omega_4|t_3-t_4|} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\omega_1|t_1-t_2|+i(\omega_2+\omega_3)(t_2-t_3)-i\omega_4(t_3-t_4)} + e^{i\omega_1(t_1-t_2)+i(\omega_2+\omega_3)|t_2-t_3|-i\omega_4(t_3-t_4)} \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F(\omega_i) &= \int \frac{dx_2 dx_3}{\cosh^2(x_2) \cosh^2(x_3)} \prod_{i=1}^4 \frac{\sinh(\pi\omega_i)}{4 \cosh \pi(\omega_i - \nu) \cosh \pi(\omega_i + \nu)} \times \\ &\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_1}(\tanh x_1) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(\tanh x_2) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_1}(-\tanh x_1) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_1}(-\tanh x_2) \right] \times \\ &\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_2}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_2}(-\tanh x_3) \right] \times \\ &\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(\tanh x_3) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_3}(-\tanh x_2) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_3}(-\tanh x_3) \right] \times \\ &\times \left[ P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_4}(\tanh x_3) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_4}(\tanh x_4) + P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega_4}(-\tanh x_3) P_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{-i\omega_4}(-\tanh x_4) \right]. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных  $t_{2,3} = T \pm \frac{\tau}{2}$  и в пределе  $t_{2,3} < t_{1,4} \rightarrow \infty$  мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta_1 G_{--}(x, y, t) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) F(\omega_i) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dT d\tau \left[ e^{-i\omega_1 t_1 - i\omega_4 t_4 + i(\omega_1 + \omega_4)T + \frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_4)\tau - i(\omega_2 + \omega_3)|\tau|_-} \right. \\ &\quad - e^{i\omega_1 t_1 - i\omega_4 t_4 - i(\omega_1 - \omega_4)T - i(\omega_2 + \omega_3 + (\omega_1 + \omega_4)/2)\tau} - \\ &\quad \times e^{-i\omega_1 t_1 + i\omega_4 t_4 + i(\omega_1 - \omega_4)T + i(\omega_2 + \omega_3 + (\omega_1 + \omega_4)/2)\tau} + \\ &\quad \left. + e^{i\omega_1 t_1 + i\omega_4 t_4 - i(\omega_1 + \omega_4)T - \frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_4)\tau + i(\omega_2 + \omega_3)|\tau|} \right]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Далее мы можем взять интеграл по  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \Delta_1 G_{--}(x, y, t) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) F(\omega_i) \times \\ &\times \left[ e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_1 \tau - i(\omega_2 + \omega_3)|\tau|_-} \right. \\ &\quad - e^{i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 + \omega_1) - \\ &\quad - e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 + \omega_1) + \\ &\quad \left. + e^{i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_1 \tau + i(\omega_2 + \omega_3)|\tau|} \right]. \end{aligned} \quad (7.74)$$

На следующем шаге сделаем замену переменных  $\omega_{1,4} \rightarrow -\omega_{1,4}$  в первом слагаемом и объединяя его с последним мы получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1 G_{--}(x, y, t) &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) F(\omega_i) \times \quad (7.75) \\ &\times \left[ e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) - e^{i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 + \omega_1) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 + \omega_1) + e^{i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) \right] = \\ &= \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 F(\omega_i) \left[ n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) + (1 + n(\omega_1)) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) - \right. \\ &\quad \left. + n(\omega_1) (1 + n(\omega_2)) (1 + n(\omega_3)) (1 + n(\omega_4)) + \right. \quad (7.76) \\ &\quad \left. + (1 + n(\omega_1)) (1 + n(\omega_2)) (1 + n(\omega_3)) (1 + n(\omega_4)) \right] \times \\ &\quad \times e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) = \\ &\times \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 F(\omega_i) n(\omega_1) n(\omega_2) n(\omega_3) n(\omega_4) \times \\ &\quad \times e^{-i\omega_1(t_1 - t_4)} \delta(\omega_1 + \omega_4) \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1) \\ &\quad \left[ 1 - e^{\beta\omega_1} - e^{\beta(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)} + e^{\beta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что лидирующий вклад в  $\Delta_1 G_{--}(x, y, t)$  загуляется в следствии ЗСЭ и свойств термального распределения. Для  $\Delta_1 G_{-+}$ ,  $\Delta_1 G_{+-}$

и  $\Delta_1 G_{++}$  можно проделать те же самые вычисления и убедиться, что лидирующие вклады загибаются.

## 8 Заключение

В данной работе мы явно построили термальное состояние и показали, что состояние Банча-Дэвиса является термальным с температурой  $T = 1/2\pi R$ . Для произвольной температуры состояние является смешанным. Единственное чистое состояние в этом семействе получается в пределе нулевой температуры.

Термальные пропагаторы имеют необычные патологические особенности на горизонте — границе статического региона. В дальнейшем мы планируем изучить влияние этих особенностей на петлевые поправки. Отметим также, что инвариантное состояние Банча-Дэвиса в статическом регионе де Ситтера выглядит как тепловое, но оно не обладает по крайней мере одним из свойств тепловых состояний Минковского. А именно в де Ситтере отсутствует Дебаевское экранирование в инвариантном состоянии [37]. Так что тут есть место для дальнейшего изучения.

В плоском пространстве-времени произвольное начальное состояние рано или поздно термализуется. И температура зависит от начальных условий и может быть произвольной. А как насчет термализации в пространстве де Ситтера? Есть ли термализация до состояния с произвольной температурой? Над этими вопросами мы планируем работать в дальнейшем.

# А Аппендикс

## А.1 Свойства полноты присоединённых функций Лежандра

В аппендиксе мы докажем свойства полноты присоединённых функций Лежандра, которое необходимо нам для квантование скалярного поля в статическом регионе де Ситтера (3.12).

Нашей целью является доказательство следующего выражения:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\omega}{4\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega\right) \right|^2 \times \\ & \times \left[ \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\cos\theta_1) \left( \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\cos\theta_2) \right)^* + \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-\cos\theta_1) \left( \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(-\cos\theta_2) \right)^* \right] = \\ & = \sinh(\pi\nu) \sin^2\theta_1 \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2), \quad (\text{A.77}) \end{aligned}$$

Для этого вычисления более удобно использовать углы  $\theta_{1,2}$  вместо  $x_{1,2}$ . Начнем с интегрального представления [26] функции Лежандра:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\cos\theta) &= \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)}{2\pi\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left( e^{\frac{\pi\omega}{2}} [\cos\theta + i\sin\theta \cosh t]^{-\frac{1}{2}-i\nu} - \right. \\ & \quad \left. - e^{-\frac{\pi\omega}{2}} [\cos\theta - i\sin\theta \cosh t]^{-\frac{1}{2}-i\nu} \right). \end{aligned}$$

Мы можем сдвинуть контур интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{\pi\omega}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos\theta + i\sin\theta \cosh t]^{-\frac{1}{2}-i\nu} e^{-i\omega t} dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos\theta + \sin\theta \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{A.78}) \end{aligned}$$

Таким образом получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{-\frac{1}{2}+i\nu}^{i\omega}(\cos\theta) &= \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)}{2\pi\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu - i\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \left( [\cos\theta + \sin\theta \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} - \right. \\ & \quad \left. - [\cos\theta + \sin\theta \sinh(t - i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} \right), \quad (\text{A.79}) \end{aligned}$$

где  $i\epsilon$  сдвигка нужна для того, чтобы понимать с какой стороны разреза лежит контур. Подставляя (A.79) в первое слагаемое в левой части

уравнения (A.77) и используя

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 d\omega \omega e^{i\omega(t_2-t_1)} g(t_1) f(t_2) = -\pi i \int dt \left( g'(t) f(t) - g(t) f'(t) \right),$$

мы получим для него следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} I = & \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)|^2}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (-idt) \left[ \partial_t \left( [\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} - \right. \right. \\ & \left. \left. - [\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sinh(t - i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} \right) \times \right. \\ & \times \left( [\cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sinh(t - i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}+i\nu} - [\cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}+i\nu} \right) - \\ & \left. - \left( [\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} - [\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \sinh(t - i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}-i\nu} \right) \times \right. \\ & \left. \times \partial_t \left( [\cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sinh(t - i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}+i\nu} - [\cos \theta_2 + \sin \theta_2 \sinh(t + i\epsilon)]^{-\frac{1}{2}+i\nu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Используя интегральное представление

$$[a \pm ib]^\lambda = \frac{e^{\pm i\frac{\pi\lambda}{2}}}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty du u^{-\lambda-1} e^{\pm iu(a \pm ib)}; \quad b > 0. \quad (\text{A.81})$$

и используя более короткую запись  $s_{1,2} = \sin \theta_{1,2}$  и  $c_{1,2} = \cos \theta_{1,2}$ , мы получим :

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{16\pi^2} e^{\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d \sinh t \, du \, dw \left( \frac{u}{w} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{iu(c_1+s_1 \sinh t)} e^{-iw(c_2+s_2 \sinh t)} s_1 - \\ & - \frac{1}{16\pi^2} e^{-\pi\nu} \int_{-\infty}^{\infty} d \sinh t \, du \, dw \left( \frac{u}{w} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{-iu(c_1+s_1 \sinh t)} e^{iw(c_2+s_2 \sinh t)} s_1 + \\ & - \frac{i}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d \sinh t \, du \, dw \left( \frac{u}{w} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{-iu(c_1+s_1 \sinh t)} e^{-iw(c_2+s_2 \sinh t)} s_1 - \\ & + \frac{i}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d \sinh t \, du \, dw \left( \frac{u}{w} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{iu(c_1+s_1 \sinh t)} e^{iw(c_2+s_2 \sinh t)} s_1 - \\ & - (\nu \rightarrow -\nu; 1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Интегрирование по  $\sinh t$  дает:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{1}{8\pi} e^{\pi\nu} \int_0^\infty du dw \left(\frac{u}{w}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{iuc_1-iwc_2} s_1 \delta(us_1 - ws_2) + \\
& -\frac{1}{8\pi} e^{-\pi\nu} \int_0^\infty du dw \left(\frac{u}{w}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{-iuc_1+iwc_2} s_1 \delta(us_1 - ws_2) + \\
& -\frac{i}{8\pi} \int_0^\infty du dw \left(\frac{u}{w}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{-iuc_1-iwc_2} s_1 \delta(us_1 + ws_2) + \\
& +\frac{i}{8\pi} \int_0^\infty du dw \left(\frac{u}{w}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{iuc_1+iwc_2} s_1 \delta(us_1 + ws_2) - (\nu \rightarrow -\nu; 1 \leftrightarrow 2).
\end{aligned} \tag{A.83}$$

Так как  $s_{1,2} > 0$  для  $0 < \theta < \pi$  то два последних слагаемых зануляются:

$$\begin{aligned}
I = & \frac{1}{4\pi} e^{\pi\nu} \int_0^\infty du \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{iu(c_1-\frac{s_1}{s_2}c_2)} - \\
& -\frac{1}{4\pi} e^{-\pi\nu} \int_0^\infty du \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{-iu(c_1-\frac{s_1}{s_2}c_2)}.
\end{aligned} \tag{A.84}$$

Для вычисления второго слагаемого в (A.77) сделаем замену  $c_{1,2} \rightarrow -c_{1,2}$  в eq. (A.1), теперь, объединяя первое со вторым, мы получим дельта функцию.

## Список литературы

- [1] C. Midwinter and M. Janssen, *Bull. Am. Phys. Soc.* **56**, 1 (2011).
- [2] W. de Sitter, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings* 19 (1916-17): 1217-1225.
- [3] W. de Sitter, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceedings* 20 (1917-18): 229-243.
- [4] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D15**, 2738 (1977).
- [5] G. Sewell *Ann. Phys.* 141, 202 (1982)
- [6] J. Bros and U. Moschella, *Rev. Math. Phys.* **8**, 327 (1996)
- [7] J. Bros, U. Moschella and J. P. Gazeau, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1746 (1994).
- [8] H. Narnhofer, I. Peter and W. E. Thirring, *Int. J. Mod. Phys. B*10, 1507-1520 (1996).
- [9] W. E. Thirring, *Acta Phys. Aust. Suppl.* IV, 269 (1967)
- [10] O. Nachtmann, *Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturw. Kl. Abt. II* 176, 363-379 (1968)
- [11] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.* **A9**, 109 (1968).
- [12] C. Schombld, and P. Spindel, *Annales de l'I.H.P. Physique théorique* 25, 67-78 (1976)
- [13] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A360**, 117 (1978).
- [14] R. Figari, R. Hoegh-Krohn and C.R. Nappi, *Comm. Math. Phys.* 44, 265-278 (1975).
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theoretical Physics Vol. 10.* Pergamon Press, Oxford (1975).
- [16] A. Kamenev, *Many-body theory of non-equilibrium systems* Cambridge University Press, Cambridge (2011).
- [17] E. T. Akhmedov, *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1430001 (2014)
- [18] E. T. Akhmedov, U. Moschella and F. K. Popov, *Phys. Rev. D* **99** (2019) no.8, 086009

- [19] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko and F. K. Popov, Phys. Rev. D **96**, no. 2, 025002 (2017)
- [20] G. Lemaître, Journal of Mathematics and Physics, 4, 188 (1925).
- [21] E. Schrodinger, *Expanding Universes*, Cambridge University Press, Cambridge (1956).
- [22] U. Moschella, Prog. Math. Phys. **47**, 120-133 (2006).
- [23] K. Lanczos, Welt. Phys. Z. 24, 539 (1922)
- [24] U. Moschella and R. Schaeffer, JCAP **02**, 033 (2009)
- [25] U. Moschella and R. Schaeffer, AIP Conf. Proc. **1132**, no.1, 303-332 (2009)
- [26] [Higher Transcendental Functions \[Volumes I-III\]](#) Bateman, Harry (1953) Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]. Vol.I-III. McGraw-Hill Book Company , New York.
- [27] I.M.Gel'fand, M. I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions Vol 5: Integral geometry and representation theory*, Academic Press, New York (1964)
- [28] S. A. Fulling, Phys. Rev. D7, 2850–2862 (1973).
- [29] S. A. Fulling, J. Phys. A10, 917–951 (1977).
- [30] E. T. Akhmedov, K. V. Bazarov, D. V. Diakonov, U. Moschella, F. K. Popov and C. Schubert, Phys. Rev. D **100** (2019) no.10, 105011 doi:10.1103/PhysRevD.100.105011 [arXiv:1905.09344 [hep-th]].
- [31] R. Bousso, A. Maloney and A. Strominger, Phys. Rev. D **65**, 104039 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.104039 [[hep-th/0112218](#)].
- [32] E. Mottola, Phys. Rev. D **31**, 754 (1985). doi:10.1103/PhysRevD.31.754
- [33] B. Allen, Phys. Rev. D **32**, 3136 (1985). doi:10.1103/PhysRevD.32.3136
- [34] H. Epstein and U. Moschella, Commun. Math. Phys. **336**, no.1, 381-430 (2015)  
Phys. Rev. D **100** (2019) no.10, 105011 doi:10.1103/PhysRevD.100.105011 [arXiv:1905.09344 [hep-th]].
- [35] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **797**, 199 (2008) doi:10.1016/j.nuclphysb.2008.01.002 [[arXiv:0709.2899 \[hep-th\]](#)].

- [36] Sebastian Bielski (2013) Orthogonality relations for the associated Legendre functions of imaginary order, Integral Transforms and Special Functions, 24:4, 331-337, DOI: 10.1080/10652469.2012.690097
- [37] F. K. Popov, JHEP **06**, 033 (2018) doi:10.1007/JHEP06(2018)033 [arXiv:1711.11010 [hep-th]].
- [38] D. Krotov and A. M. Polyakov, Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011) doi:10.1016/j.nuclphysb.2011.03.025 [arXiv:1012.2107 [hep-th]].