Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
“Московский физико-технический институт (государственный университет)”

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Три–векторные деформации решений 11–ти мерной супергравитации
Выпускная квалификационная работа
(магистерская работа)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Работу выполнил:
студент 821 группы ______________ Губарев Кирилл Алексеевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., с.н.с ______________ Мусаев Эдвард Таваккулович

Москва, 2020

Аннотация

Построено вложение $7+4$ супергравитации в SL(5) ExFT. Рассмотрена редукция SL(5) ExFT для описания пространств вида $M_4 \times M_7$ и для нее сконструирована обобщенная деформация Янга-Бакстера. Развитый формализм применен к решению 11–ти мерной супергравитации $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, предъявлены две новые неабелевы неунимодулярные три–векторные деформации $\Omega \sim P \wedge P \wedge M$ и $\Omega \sim D \wedge P \wedge P$, генерирующие новые решения супергравитации.

Содержание

1 Введение

1.1 Связь деформаций решений уравнений 10-ти мерной супергравитации и классических уравнений Янга-Бакстера

История изучения связи деформаций решений уравнений 10-ти мерной супергравитации с классическими уравнениями Янга-Бакстера из теории интегрируемых систем берет начало с работ [1, 2, 3]. В [1] было показано, что суперструна Грина-Шварца (ГШ) на фоне $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ обладает бесконечным числом сохраняющихся зарядов и поэтому является интегрируемой. Аналогичный результат был получен для σ-модели Янга-Бакстера [2], являющейся деформацией Пуассона-Ли интегрируемой главной киральной модели и частным случаем σ-моделей Янга-Бакстера на групповых многообразиях, рассматриваемых в [3].

Следующим шагом стало обобщение этих деформаций, и построение так называемой η-деформации [4]. Она дает уже известный результат для главной киральной модели, а также позволяет деформировать интегрируемые σ-модели, определенные не только на групповых многообразиях, но и на факторпространствах типа G/K, где K - максимальная компактная подгруппа группы G. Применяя обобщение метода развитого в [4] было построено η-деформированное действие IIB суперструны на фоне $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ и показано, что деформированная таким образом теория остается интегрируемой [5].

Для η-деформированной σ-модели на $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ были найдены бозонные и фермионные части лагранжиана, а также переопределение полей, переводящее соответствующий деформированный лагранжиан в стандартный лагранжиан IIB суперструны ГШ, соответствующий набор получающихся фоновых полей называется фоном Арутюнова-Борсато-Фролова (АБФ) [6, 7]. Удивительно, что поля RR-сектора фона АБФ не удовлетворяют уравнениям IIB супергравитации [7], но решают уравнения так называемой обобщенной супергравитации [8].

Фон АБФ, решающий уравнения обобщенной супергравитации, связан преобразованием T-дуальности с фоном Хоара-Цейтлина (ХЦ), решающим уравнения IIB-супергравитации [8, 9, 10]. Стоит отметить, что T-дуальность в данном случае понимается в особом смысле (обобщенная T-дуальность), так как метрика $G^{\text{ХЦ}}$ и RR-поля $\mathcal{F}^{\text{ХЦ}}$ фона ХЦ не зависят от направления $I_m^{\text{АБФ}}$ (векторного поля Киллинга для фона АБФ), вдоль которого применяется T-дуальность (заметим поле Кальба-Рамонда (КБ) $B^{\text{ХЦ}} = 0$), а дилатон $\phi^{\text{ХЦ}}$ зависит линейно от этого направления. Тем не менее, действие струны ГШ на фоне ХЦ инвариантно относительно преобразований T-дуальности, так как дилатон входит в него через инвариантные RR-поля и производные. В результате $G^{\text{ХЦ}}$, $B^{\text{ХЦ}}$, $\mathcal{F}^{\text{ХЦ}}$ преобразуются по стандартным правилам Бушера в $G^{\text{АБФ}}$, $B^{\text{АБФ}}$, $\mathcal{F}^{\text{АБФ}}$. Однако, для фона АБФ не существует дилатона, который бы дополнял $G^{\text{АБФ}}$, $B^{\text{АБФ}}$, $\mathcal{F}^{\text{АБФ}}$ до решения уравнений обычной супергравитации. Вместо этого, для фона АБФ появляется поле $Z_m = \partial_m \phi^{\text{АБФ}} + B_{mn}^{\text{АБФ}} I^{n\ \text{АБФ}}$, играющее роль дилатона, где $\phi^{\text{АБФ}}$ находится по стандартному правилу Бушера для дилатона из части $\phi^{\text{ХЦ}}$, не содержащей линейного члена вдоль $I_m^{\text{АБФ}}$. Тогда набор $G^{\text{АБФ}}$, $B^{\text{АБФ}}$, $\mathcal{F}^{\text{АБФ}}$, Z_m и $I_m^{\text{АБФ}}$ решает уравнения обобщенной супергравитации, отличающиеся от уравнений обычной супергравитации дополнительными членами, зависящими от I_m. В случае $I_m = 0$ восстанавливаются обычные уравнения супергравитации.

В [11] была построена обобщенная двойная теория поля (mDFT), явно ковариантная относительно симметрии уравнений обобщенной супергравитации - обобщенной T-дуальности. Также было показано, что уравнения на $NS - NS$-поля в mDFT совпадают с соответствующими уравнениями обобщенной супергравитации. Затем, в [12, 13] продемонстрировано, что mDFT эквивалентна двойной теории поля (DFT) со специальным решением уравнения проекции, а также из уравнений этой теории получен полный набор уравнений обобщенной супергравитации на RR- и $NS - NS$-поля. Наконец в [14] уравнения обобщенной супергравитации получены из требования сохранения $\varkappa$-симметрии струны ГШ на соответствующем фоне, что приводит к масштабной инвариантности струны ГШ на таком фоне, а в случае, когда обобщенная супергравитация переходит в обычную ($I_m = 0$), масштабная инвариантность переходит в Вейлевскую.

Наиболее общим и удобным способом построения деформаций супергравитации оказалось открыто/замкнутое струнное отображение [15, 16, 17], которое выглядит следующим образом для супергравитации с метрикой G_{mn}, дилатоном Φ, RR-полями и полем Кальба-Рамонда $B_{mn} = 0$

$$g_{mn} + b_{mn} = (G^{-1} + \beta^{mn})^{-1}, \qquad e^{-2\phi}\sqrt{|detg_{mn}|} = e^{-2\Phi}\sqrt{|detG_{mn}|}, \tag{1.1}$$

где g_{mn}, b_{mn}, ϕ - деформированные поля, а $\beta^{mn} = r^{ab}k_a^m k_b^n$ - антисимметричный параметр деформации, построенный из векторов Киллинга метрики G_{mn}, с антисимметричной матрицей r^{ab}.

Впервые данное отображение было рассмотрено в [17], где было показано, что открытая струна на фоне полей g_{mn}, b_{mn}, появляющихся в спектре замкнутой струны, может быть эффективно описана, как струна, распространяющаяся в некоммутативном пространстве с метрикой G_{mn} и параметром некоммутативности β^{mn}. А именно, если b_{mn} имеет ранг p, и $b_{kl} \neq 0$ вдоль направлений $k, l = \overline{1,p}$ и ноль для остальных, то коррелятор для координат концов струны выглядит следующим образом

$$\langle X^k(\tau), X^l(\tau')\rangle = -\alpha' G^{kl} ln(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2}\beta^{kl}\theta(\tau - \tau'), \qquad k, l = \overline{1,p}. \tag{1.2}$$

В [18, 19] было предположено и продемонстрировано на примерах, что в $\mathcal{N} = 2$, $d = 10$ супергравитации для того, чтобы деформированный фон (1.1) оставался решением супергравитации, r^{ab} должно удовлетворять классическим уравнениям Янга-Бакстера (Приложение B.1)

$$f_{de}{}^{[a}r^{b|d|}r^{c]e} = 0, \tag{1.3}$$

где $f_{ab}{}^c$ - структурные константы алгебры векторов Киллинга $[k_a, k_b] = f_{ab}{}^c k_c$.

В [20] данное предположение было доказано при помощи формализма DFT (теории, явно ковариантной относительно T-дуальности) и β-супергравитации [21]. В терминах двойной теории поля деформация Янга-Бакстера обретает ясный смысл и вид (Рис.1).

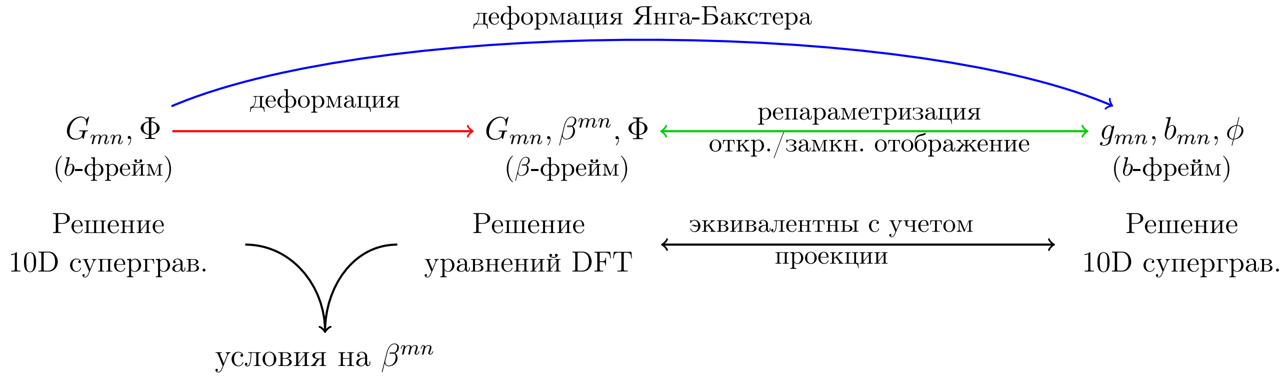

Рис. 1: Связь фона (G_{mn}, Φ), решающего уравнения 10D супергравитации, и его деформации (g_{mn}, b_{mn}, ϕ). b-фрейм - супергравитация (возможно обобщенная, если $I_m \neq 0$), β-фрейм - β-супергравитация [21]. Деформация Янга-Бакстера действует на решение супергравитации, и в данном случае интерпретируется, как композиция деформации с параметром β^{mn} и открыто/замкнутого отображения. Требования выполнений уравнений супергравитации для деформированного фона накладывает условия на β^{mn}, а именно (1.4).

Суть такого способа построения деформации заключается в: 1) поднятии изначального решения супергравитации (G_{mn}, Φ) в b-фрейм двойной теории поля; 2) затем его деформация с параметром β^{mn} - переход в β-фрейм $(G_{mn}, \beta^{mn}, \Phi)$; 3) переписывание деформированного решения в b-фрейме (g_{mn}, b_{mn}, ϕ), что дает деформированные поля.

Оказалось, что получить ограничения на параметр деформации β^{mn} значительно проще, работая с уравнениями β-супергравитации, а не с уравнениями обычной супергравитации с подставленным деформированным фоном (1.1).

В результате, ограничения на β^{mn} из β-супергравитации действительно оказываются классическими уравнениями Янга-Бакстера. Более того, для того, чтобы деформированный фон был решением обычной, а не обобщенной супергравитации, необходимо дополнительно потребовать $I^m = 0$. Для бикилингового вида параметра деформации $I^m = \nabla_k \beta^{km} = f_{ab}{}^c r^{ab} k_c^m$.

Таким образом, чтобы деформированный фон остался решением обычной супергравитации, параметр деформации должен удовлетворять [20]

$$\begin{cases} f_{de}{}^{[a} r^{b|d|} r^{c]e} = 0, & \text{(классические уравнения Янга-Бакстера)}, \\ f_{ab}{}^c r^{ab} = 0, \qquad \Rightarrow & I^m = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2 11-ти мерная супергравитация и исключительная теория поля

Начиная с этого параграфа и везде далее мы будем использовать обозначения, приведенные в Приложении.A.

Теория струн обладает симметриям T- и S- дуальности, которые объединяют пять известных теорий суперструн типа I, типа IIA/IIB, гетеротические $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$, и позволяют смотреть на них, как на различные пределы одной, более фундаментальной M-теории [22, 23, 24] (Рис. 2). M-теория обладает симметрией U-дуальности, представляющей из себя объединение T- и S- дуальностей. Низкоэнергетическим пределом M-теории является 11-ти мерная супергравитация, впревые построенная в [25] .

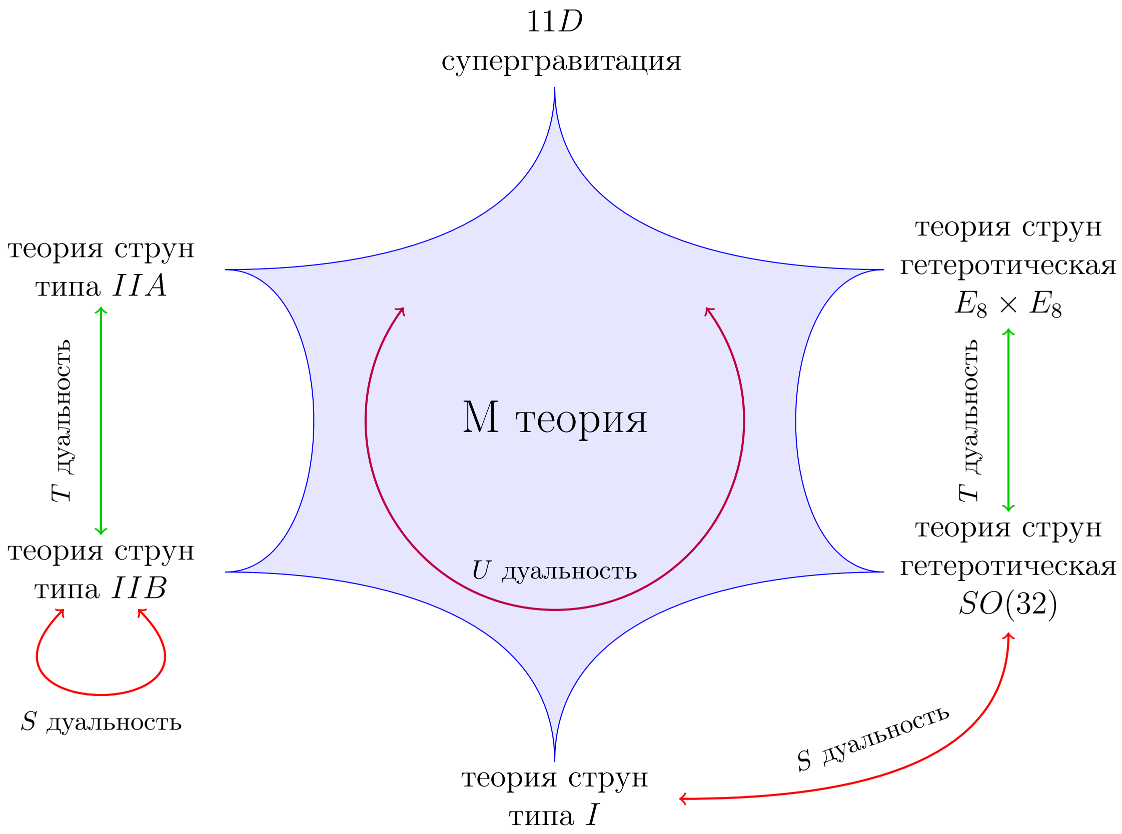

Рис. 2: Пять известных теорий суперструн типа I, типа IIA/IIB, гетеротических $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$, и 11-ти мерная супергравитация, как пределы более фундаментальной M-теории, и их связь T- ($\leftrightarrow$) и S- ($\leftrightarrow$) дуальностями. $M-$теория обладает симметрией - U-дуальностью ($\leftrightarrow$), представляющей из себя объединение S- и T- дуальностей.

Максимальная супергравитация в D измерениях, получающаяся при компактификации 11-ти мерной супергравитации на тор $\mathbb{T}^{11-D}$, обладает скрытой глобальной группой симметрий $\mathbf{G}$ (симметрия U-дуальности) [26, 27, 28] (Таблица.1). Это означает, что бозонные поля скомпактифицированной теории могут быть сгруппированы в неприводимые представления группы симметрии $\mathbf{G}$ [26, 27, 28], а фермионные поля в неприводимые представления максимальной компактной подгруппы $\mathbf{G}$ [29, 30].

Для того, чтобы это понять, посмотрим например на бозонный спектр теории скомпактифицированной на тор $\mathbb{T}^4$ (Рис.3). $\mathbb{T}^4$ будем называть внутренним пространством, а координатные индексы на нем $m, n, k, l... \in \overline{1,4}$. Оставшуюся семимерную часть пространства будем называть внешней, и координатные индексы на ней $\mu, \nu, \rho, \lambda, ... \in \overline{1,7}$. Индексами $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}, \mathcal{L}... \in \overline{1,10}$ будем обозначать представление $\mathbf{10}$, а индексами $M, N, K, L... \in \overline{1,5}$ фундаментальное представление **5** соответствующей группы симметрии $SL(5)$ (подробнее про обозначения смотри в Приложении.A).

Таблица 1: Глобальные симметрии $11D$ супергравитации скомпактифицированной на тор $\mathbb{T}^{11-D}$ (максимальной супергравитации в D измерениях). **G** - глобальная группа симметрии скомпактифицированной теории, **K** - максимальная компактная подгруппа **G**. $E_{d(d)}$ обозначает максимально некомпактную действительную форму E_d [28].

	G	**K**
$\mathbf{D = 10}$	$SO(1,1)$	$\mathbb{1}$
$\mathbf{D = 9}$	$SL(2,\mathbb{R})$	$SO(2)$
$\mathbf{D = 8}$	$SL(3,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$	$SO(3) \times SO(2)$
$\mathbf{D = 7}$	$SL(5,\mathbb{R})$	$SO(5)$
$\mathbf{D = 6}$	$SO(5,5)$	$SO(5) \times SO(5)$
$\mathbf{D = 5}$	$E_{6(6)}$	$Usp(8)$
$\mathbf{D = 4}$	$E_{7(7)}$	$SU(8)$
$\mathbf{D = 3}$	$E_{8(8)}$	$SO(16)$

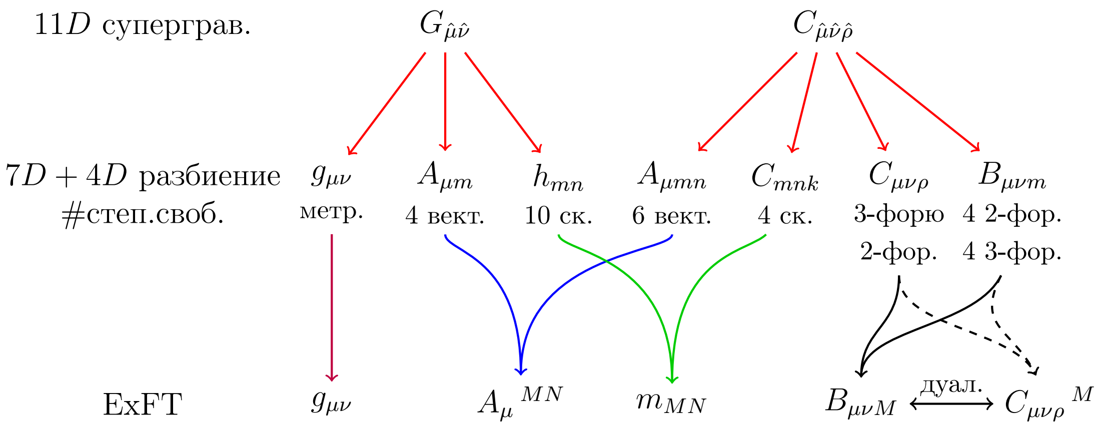

Рис. 3: Редукция полей 11-ти мерной супергравитации в семь измерений и их объединение в $SL(5)$ мультиплеты при помощи дуализации. Большие латинские индексы $M, N, K, \ldots$ обозначают фундаментальное представление **5** группы $SL(5)$, маленькие латинские индексы $m, n, k, \ldots$ обозначают координаты на внутреннем пространстве $\mathbb{T}^4$ (фундаментальное представление **4** группы $GL(4)$)[31].

Как показано на Рисунке.3, получающиеся поля можно объединить в мультиплеты преобразующиеся в неприводимых представлениях группы $SL(5)$. $g_{\mu\nu}$ - скаляр относительно действия $SL(5)$. $(A_{\mu m}, A_{\mu mn})$ объединяются в $A_\mu{}^{\mathcal{M}} = A_\mu{}^{MN}$, преобразующийся в представлении $\overline{\mathbf{10}}$ $SL(5)$ ($\mathbf{4} \oplus \mathbf{6} = \overline{\mathbf{10}}$). (h_{mn}, C_{mnk}) объединяются в m_{MN}, симметричное представление $(\mathbf{5} \otimes \mathbf{5})_{\text{симм.}} = \mathbf{14}$ группы SL(5) ($\mathbf{10} + \mathbf{4} = \mathbf{14}$). Дуализуя 3-форму $C_{\mu\nu\rho}$ в 2-форму $\tilde{B}_{\mu\nu}$ и объединяя ее с $B_{\mu\nu m}$, получим мультиплет $B_{\mu\nu M}$ в представлении **5** группы $SL(5)$ ($\mathbf{1} + \mathbf{4} = \mathbf{5}$). С другой стороны можно дуализовать 2-формы $B_{\mu\nu m}$ в 3-формы $\tilde{C}_{\mu\nu\rho m}$, объединяя последние с $C_{\mu\nu\rho}$, получим мультиплет $C^M_{\mu\nu\rho}$ в представлении $\bar{\mathbf{5}}$ группы $SL(5)$. Таким образом $B_{\mu\nu M}$ и $C^M_{\mu\nu\rho}$ описывают одни и те же степени свободы и связаны преобразованием дуальности

$$m^{MN} \mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N = \frac{1}{4!} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda\sigma\eta\delta} \mathcal{F}_{\lambda\sigma\eta\delta}{}^M. \tag{1.5}$$

далее (Пункты 1.2,1.3) мы поясним что подразумевается под $\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N$ и $\mathcal{F}_{\lambda\sigma\eta\delta}{}^M$ и как возникает связь (1.5).

Исключительная теория поля (ExFT) - это обобщение максимальной супергравитации, скомпактифицированной на тор $\mathbb{T}^d$, явно ковариантное относительно группы U-дуальности $\mathbf{G}$. Она позволяет дать геометрическую интерпретацию калибровочной симметрии, симметрии относительно диффеоморфизмов и симметрии дуальности, и объединяет их в симметрию относительно диффеоморфизмов на обобщенном пространстве с координатами $(x^\mu, \mathbb{X}^\mathcal{M})$, где x^μ координаты на внешнем пространстве размерности $(11-d)$, а $\mathbb{X}^\mathcal{M}$ на обобщенном пространстве размерности $\mathcal{R}_\mathbb{X}$, которая зависит от размерности d, и определяется при помощи подсчета числа намоток объектов M-теории - бран (Таблица.2) [32, 33, 34, 35, 36, 31]. Важно заметить, что никакой компактификации при формулировке ExFT не подразумевается. Торические редукции супергравитации описанные выше используются только для подсчета числа намоток. В формализме ExFT, торические фоны являются максимально симметричными решениями относительно группы U-дуальности. Отметим также, что такой подход к построению явно ковариантной теории абсолютно идентичен тому, как строится явно ковариантная относительно T-дуальности (скрытой симметрии 10-ти мерной супергравитации скомпактифицированной на тор $\mathbb{T}^d$) двойная теория поля (DFT), размерность обобщенного пространства которой $2d$, где одно d - число независимых импульсов, а второе d - число намоток струны на тор $\mathbb{T}^d$ [37, 38, 39].

Таблица 2: Подсчет числа намоток бран в M-теории на пространстве вида $M_{11-d}\times\mathbb{T}^d$. $\mathbf{G}$ - группа U-дуальности, $\mathbf{P}$ - число независимых импульсов, $\mathcal{R}_\mathbb{X}$ - размерность обобщенного пространства (размерность представления $\mathbf{G}$ по которому преобразуются обобщенные координаты)[31].

d	**G**	**P**	**M2**	**M5**	**KK6**	$\mathbf{5^3}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{0^{(1,7)}}$	$\mathcal{R}_\mathbb{X}$
2	$SL(2)$	2	1	-	-	-	-	-	$\mathbf{3}$
3	$SL(3)\times SL(2)$	3	3	-	-	-	-	-	$(\mathbf{3},\mathbf{2})$
4	$SL(5)$	4	6	-	-	-	-	-	$\mathbf{10}$
5	$SO(5,5)$	5	10	1	-	-	-	-	$\mathbf{16_s}$
6	$E_{6(6)}$	6	15	6	-	-	-	-	$\mathbf{27}$
7	$E_{7(7)}$	7	21	21	7	-	-	-	$\mathbf{56}$
8	$E_{8(8)}$	8	28	56	56	56	28	8	$\mathbf{248}$

Для построения ExFT, как теории, инвариантной относительно диффеоморфизмов на обобщенном пространстве, прежде всего необходимо определить эти диффеомрфизмы.

Начнем с обобщенных диффеоморфизмов внутреннего пространства (внутренних обобщенных диффеоморфизмов). Для их определения в обобщенной геометрии ExFT с тензорами, имеющими индексы как во внешнем, так и в обобщенном пространстве, вводится обобщенная производная Ли для обобщенных векторов [32, 33, 34, 35, 36]

$$\delta_\Lambda V^\mathcal{M} = \underbrace{\Lambda^\mathcal{N}\partial_\mathcal{N}V^\mathcal{M} - V^\mathcal{N}\partial_\mathcal{N}\Lambda^\mathcal{M}}_{L_\Lambda V^\mathcal{M}} + Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_\mathcal{N}\Lambda^\mathcal{K}V^\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Lambda V^\mathcal{M} = [\Lambda, V]_D^\mathcal{M}, \tag{1.6}$$

где $[\bullet,\bullet]_D$ - скобка Дорфмана, $\Lambda^\mathcal{M} = \Lambda^\mathcal{M}(x^\mu, \mathbb{X}^\mathcal{M})$ - параметр диффеоморфизма, а тензор $Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ может быть записан в общем виде

$$Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \delta^\mathcal{M}_\mathcal{K}\delta^\mathcal{N}_\mathcal{L} - \alpha_d\mathbb{P}^\mathcal{M}_{(adj)}{}_\mathcal{L}{}^\mathcal{N}{}_\mathcal{K} + \beta_d\delta^\mathcal{M}_\mathcal{L}\delta^\mathcal{N}_\mathcal{K}, \tag{1.7}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_\Lambda V^\mathcal{M} = \Lambda^\mathcal{N}\partial_\mathcal{N}V^\mathcal{M} - \alpha_d\mathbb{P}^\mathcal{M}_{(adj)}{}_\mathcal{L}{}^\mathcal{N}{}_\mathcal{K}\partial_\mathcal{N}\Lambda^\mathcal{K}V^\mathcal{L} + \beta_d\partial_\mathcal{K}\Lambda^\mathcal{K}V^\mathcal{M} = \mathcal{L}_\Lambda V^\mathcal{M} = [\Lambda, V]_D^\mathcal{M}, \tag{1.8}$$

здесь α_d, β_d - некоторые коэффициенты (β_d называется весом относительно внутренних обобщенных диффеоморфизмов), а $\mathbb{P}^\mathcal{M}_{(adj)}{}_\mathcal{L}{}^\mathcal{N}{}_\mathcal{K}$ - проектор на присоединенное представление группы U-дуальности.

Из требования замкнутости алгебры

$$[\mathcal{L}_{\Lambda_1}, \mathcal{L}_{\Lambda_2}] = \mathcal{L}_{[\Lambda_1,\Lambda_2]_E}, \tag{1.9}$$

где $[\bullet,\bullet]_E$ - E-скобка, являющаяся аналагом скобки Куранта для DFT, имеет вид

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_E = [\Lambda_1, \Lambda_2]_D - \frac{1}{2} Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} (\Lambda_1^{\mathcal{K}} \Lambda_2^{\mathcal{L}}), \tag{1.10}$$

получаются ограничения на Y-тензор, однозначно фиксирующие его (Таблица.3, выражения для Y-тензоров для различных случаев были построены в [36], отметим, что для β_d получено общее выражение $\beta_d = \frac{1}{9-d}$), и уравнение проекции

$$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}}\, \partial_{\mathcal{M}} \bullet \otimes \partial_{\mathcal{N}} \bullet = 0, \tag{1.11}$$

где вместо $\bullet$ могут стоять произвольные поля теории. Уравнение проекции накладывает $\mathcal{R}_{\mathbb{X}} - d$ условий на поля, таким образом проецируя их из обобщенного пространства размерности $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ в физическое пространство размерности d.

Далее мы также будем рассматривать и поля, которые преобразуются с весом λ, отличным от β_d, при действии обобщенных диффеоморфизмов. Под обобщенной производной Ли для таких полей мы будем подразумевать

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda V^{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_q} &= \Lambda^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{N}} V^{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_q} - \alpha_d \mathbb{P}_{(adj)}^{\mathcal{M}_1}{}_{\mathcal{L}_1}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}} \partial_{\mathcal{N}} \Lambda^{\mathcal{K}} V^{\mathcal{L}_1 \mathcal{M}_2 \ldots \mathcal{M}_q} \\ &- \alpha_d \mathbb{P}_{(adj)}^{\mathcal{M}_q}{}_{\mathcal{L}_q}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}} \partial_{\mathcal{N}} \Lambda^{\mathcal{K}} V^{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_{q-1} \mathcal{L}_q} + \lambda[V^{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_q}] \partial_{\mathcal{K}} \Lambda^{\mathcal{K}} V^{\mathcal{M}} = \mathcal{L}_\Lambda V^{\mathcal{M}} = [\Lambda, V]_D^{\mathcal{M}}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

и аналогично для тензоров с обобщенными ковекторными индексами.

Таблица 3: Y-тензор для различных групп U-дуальности М-теории на торе $\mathbb{T}^d$ и для $O(d,d)$ группы T-дуальности теории струн на торе $\mathbb{T}^d$. (где $\mathscr{A}$ индекс представления **10** группы $SO(5,5)$, а $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ размерность обобщенного пространства)[31, 36].

Группа симметрии	Y-тензор	$\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$
$O(d,d)$	$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = \eta^{\mathcal{MN}} \eta_{\mathcal{KL}}$	$n = 2d$
$SL(5)$	$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = \epsilon^{M\mathcal{MN}} \epsilon_{M\mathcal{KL}}$	$n = 10$
$SO(5,5)$	$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = \frac{1}{2} (\gamma^{\mathscr{A}})^{\mathcal{MN}} (\gamma_{\mathscr{A}})_{\mathcal{KL}}$	$n = 16$
$E_{6(6)}$	$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = 10 d^{\mathcal{MNR}} d_{\mathcal{KLR}}$	$n = 27$
$E_{7(7)}$	$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = 12 c^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} + \delta^{(\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} \delta^{\mathcal{N})}_{\mathcal{L}} + \frac{1}{2} \epsilon^{\mathcal{MN}} \epsilon_{\mathcal{KL}}$	$n = 56$

Для построения диффеоморфизмов на внешнем пространстве (внешних обобщенных диффеоморфизмов) необходимо ковариантизовать производные по координатам внешнего пространства относительно внутренних обобщенных диффеомрфизмов

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}, \tag{1.13}$$

здесь $A_\mu^{\mathcal{M}}$ - обобщенное векторное поле, играющее роль обобщенной связности, и преобразующееся как

$$\delta_\Lambda A_\mu^{\mathcal{M}} = \partial_\mu \Lambda^{\mathcal{M}} - \mathcal{L}_{A_\mu} \Lambda^{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_\mu \Lambda^{\mathcal{M}}. \tag{1.14}$$

Полевой состав теории - 1) репер внешнего пространства $e_\mu^{\overline{\mu}}$ ($g_{\mu\nu} = e_\mu^{\overline{\mu}} e_\nu^{\overline{\nu}} \eta_{\overline{\mu\nu}}$), являющийся скаляром с весом $\lambda[e_\mu^{\overline{\mu}}] = \beta_d$ относительно внутренних обобщенных диффеоморфизмов; 2) обобщенная метрика $\mathcal{M}_{\mathcal{MN}}$, являющаяся ковариантным обобщенным 2-тензором с весом $\lambda[\mathcal{M}_{\mathcal{MN}}] = 0$

относительно внутренних обобщенных диффеоморфизмов; 3) поля, появляющиеся из тензорной иерархии [40, 41, 42], возникающей при построении тензора напряженности для $A_\mu^{\mathcal{M}}$

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mu\nu}}, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = \underbrace{2\partial_{[\mu}A_{\nu]}^{\mathcal{M}} - [A_\mu, A_\nu]_E^{\mathcal{M}}}_{F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}} - Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{N}}B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \tag{1.15}$$

где поле $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ добавлено, для того, чтобы напряженность $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$ преобразовывалась ковариантно при обобщенных диффеоморфизмах (как обобщенный вектор с весом β_d). Отметим, что $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ не дает вклада в обобщенную производную Ли в (1.15), буквально $\mathcal{L}_{F_{\mu\nu}} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mu\nu}}$, так как приводит к уравнению проекции (1.11).

Конструируя инвариантный тензор напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M}\mathcal{K}}$ для $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, аналогично необходимо будет добавить новое поле $C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M},\mathcal{K}\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} = 3\mathcal{D}_{[\mu}B_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{3}{(11-d)(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}(A_{[\mu}^{\mathcal{M}}\partial_\nu A_{\rho}^{\mathcal{N}} - \frac{1}{3}[A_{[\mu}, A_\nu]_E^{(\mathcal{M}}A_{\rho]}^{\mathcal{N})}) \\ - 3(\partial_{\mathcal{N}}C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{K}\mathcal{L}} - Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{Q}}C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{M}\mathcal{Q}}),\end{aligned} \tag{1.16}$$

и так далее

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}{}^{\mathcal{M},\mathcal{K}\mathcal{L}} = 4\mathcal{D}_{[\mu}C_{\nu\rho\sigma]}{}^{\mathcal{M},\mathcal{K}\mathcal{L}} + (2B_{[\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\mathcal{F}_{\rho\sigma]}{}^{\mathcal{M}} - B_{[\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}\partial_{\mathcal{N}}B_{\rho\sigma]}{}^{\mathcal{R}\mathcal{Q}}) \\ + \frac{4}{3(11-d)(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{N}\mathcal{Q}}(A_{[\mu}^{\mathcal{M}}A_\nu^{\mathcal{N}}\partial_\rho A_{\sigma]}^{\mathcal{Q}} - \frac{1}{4}A_{[\mu}^{\mathcal{M}}[A_\nu, A_\rho]_E^{\mathcal{N}}A_{\sigma]}^{\mathcal{Q}}).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Связь преобразований нововведенных полей с преобразованиями $A_\mu^{\mathcal{M}}$ относительно внутренних диффеоморфизмов дается формулами [40, 41, 42]

$$\begin{aligned}\Delta A_\mu^{\mathcal{M}} &= \delta A_\mu^{\mathcal{M}}, \\ \Delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} &= \delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} - \frac{1}{6}Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}A_{[\mu}^{\mathcal{M}}\delta A_{\nu]}^{\mathcal{N}}, \\ \Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{K}\mathcal{L}} &= \delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{K}\mathcal{L}} - \delta A_{[\mu}^{\mathcal{N}}B_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} - \frac{1}{18}Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}A_{[\mu}^{\mathcal{N}}A_\nu^{\mathcal{R}}\delta A_{\rho]}^{\mathcal{Q}}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

На некотором этапе тензорная иерархия прерывается, так как появляющиеся поля могут быть дуализованы в уже имеющиеся младшие формы (аналогично тому, как это реализовано в (1.5)). Соответственно их тензоры напряженности не входят в лагранжиан и не нуждаются в ковариантизации. Старшие тензоры напряженности связаны с младшим через тождества Бьянки (с учетом проекции (1.11)) [40, 41, 42]

$$\begin{aligned}3\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{F}_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{M}} &= -Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \\ 4\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{F}_{\nu\rho\sigma]}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} &= \frac{3}{(11-d)(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}_{\rho\sigma}{}^{\mathcal{N}} - 3(\partial_{\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}{}^{\mathcal{N},\mathcal{K}\mathcal{L}} - Y^{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{Q}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}{}^{\mathcal{N},\mathcal{M}\mathcal{Q}}), \\ &\ldots\end{aligned} \tag{1.19}$$

Таким образом полевой состав теории:

$$\{e_\mu^{\overline{\mu}}, \mathcal{M}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, A_\mu^{\mathcal{M}}, \underbrace{B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \quad \ldots}_{\text{поля тензорной иерархии}}\}. \tag{1.20}$$

Теперь, с помощью ковариантной производной (1.13), мы можем определить внешние обобщенные диффеоморфизмы с параметрами $\xi^\mu = \xi^\mu(x^\mu, \mathbb{X}^\mathcal{M})$ [40, 41, 42]

$$\begin{aligned}
\delta_\xi e_\mu^{\overline{\mu}} &= \xi^\nu \mathcal{D}_\nu e_\mu^{\overline{\mu}} + \mathcal{D}_\mu \xi^\nu e_\nu^{\overline{\mu}}, \\
\delta_\xi \mathcal{M}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} &= \xi^\nu \mathcal{D}_\nu \mathcal{M}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \\
\delta_\xi A_\mu^\mathcal{M} &= \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}{}^\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} g_{\mu\nu} \partial_\mathcal{N} \xi^\nu, \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Лагранжиан ExFT строится в два этапа: а) из требования инвариантности отностильно внутренних диффеоморфизмов строятся все возможные комбинации полей теории, преобразующиеся как скаляры с весом $\lambda = 1$ и дающие при вариации уравнения второго порядка; б) из требования инвариантности относительно внешних диффеоморфизмов фиксируются все относительные коэффициенты комбинаций, полученных в пункте "а".

Используя описанный выше подход, были построены $SL(5)$, $SO(5,5)$, $E_{6(6)}$, $E_{7(7)}$, $E_{8(8)}$ ExFT [43, 42, 41, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Заметим, что на самом деле теории, построенные таким образом, обладают большей симметрией, а именно $E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$.

В завершение отметим, что существует два различных способа параметризации фактор пространства $E_{d(d)}/\mathbf{K}$: 1) при помощи генераторов из алгебры Картана и положительных корней (либо отрицательных, либо их комбинации) алгебры $e_{d(d)}$ следуя [26, 27, 28]; 2) используя нелинейную реализацию, и ее редукции, для полупрямого произведения $E_{11} \ltimes l_1$, где l_1 фундаментальное представление E_{11} [34, 50].

1.3 Исключительная теория поля SL(5)

В этом пункте мы кратко приведем основные результаты и формулы, получающиеся при построении $SL(5)$ ExFT [42] согласно формализму, описанному в Разделе 1.2.

Для SL(5) ExFT компоненты, через которые выражается обобщенная производная Ли (1.6), (1.8), выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} &= \epsilon^{M\mathcal{MN}}\epsilon_{M\mathcal{KL}} = \epsilon^{MNKLP}\epsilon_{MQRST}, \\
\alpha_4 &= 3, \\
\beta_4 &= \frac{1}{5}, \\
\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{(adj)}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}} &= (t^i{}_j)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{L}}(t^i{}_j)^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где $\epsilon^{M\mathcal{MN}}$ $SL(5)$ инвариантный тензор, компоненты которого определяются знакопеременным символом ϵ^{MNKLP}; $(t^i{}_j)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{L}}$ - генераторы представления **10** $SL(5)$ (смотри связь генераторов представления **10** $SL(5)$ и представления **5** $SL(5)$ в Приложении Б); $Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}}$ и $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}_{(adj)}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}}$ связаны соотношением (1.7) (Приложение Б). Подставляя все компоненты в обобщенную производную Ли (1.6) и разбивая обобщенный вектор (ковектор) в представлении **10** на два вектора (ковектора) в фундаментальном представлении **5** $SL(5)$, мы можем найти действие обобщенных диффеоморфизмов на фундаментальное представление

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda V^M &= \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}V^M - V^K\partial_{KL}\Lambda^{ML} + \frac{1}{4}V^M\partial_{KL}\Lambda^{KL}, \\
\delta_\Lambda V_M &= \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}V_M + V_K\partial_{ML}\Lambda^{KL} - \frac{1}{4}V_M\partial_{KL}\Lambda^{KL}.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Условие проекции (1.11) для теории $SL(5)$ записывается

$$\epsilon^{MNKLP}\partial_{MN}\bullet\partial_{KL}\bullet = 0, \tag{1.24}$$

везде далее мы подразумеваем, что (1.24) решено следующим образом - $\partial_{mn} = 0$, что убирает зависимость от 6 из 10 обобщенных координат, и проецирует теорию из 10+7 в 4+7=11 мерное пространство ($m, n = 1, \ldots, 4$, Приложение А).

Полевой состав $SL(5)$ ExFT

$$\{e_\mu^{\overline{\mu}}, \quad A_\mu{}^{MN}, \quad B_{\mu\nu M}, \quad m_{MN}\}, \tag{1.25}$$

где в обобщенных векторах мы перешли от представления **10** $SL(5)$ к представлению **5** $SL(5)$ (Приложение А), и вместо рассмотренных в Разделе 1.2 обобщенной метрики $\mathcal{M}_{\mathcal{MN}}$ и полей $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}}$, $C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}}$, приходящих из тензорной иерархии, мы ввели

$$\begin{aligned}
m_{MN} \quad &: \quad \mathcal{M}_{\mathcal{MN}} \to \mathcal{M}_{MNKL} = m_{MK}m_{NL} - m_{ML}m_{NK}, \\
A_\mu{}^{MN} \quad &: \quad A_\mu{}^{MN} = -A_\mu{}^{NM}, \\
B_{\mu\nu M} \quad &: \quad B_{\mu\nu M} = 2\epsilon_{MNKLP}B_{\mu\nu}{}^{NKLP} = 8\epsilon_{M\mathcal{MN}}B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{MN}}, \\
C_{\mu\nu\rho}{}^M \quad &: \quad C_{\mu\nu\rho}{}^M = -6\epsilon_{NKLPQ}C_{\mu\nu\rho}{}^{MN,KLPQ},
\end{aligned} \tag{1.26}$$

соответственно тензоры напряженности для переобозначенных полей выражаются через (1.16), (1.17)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN} \quad &: \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN} = -\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{NM}, \\
\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} \quad &: \quad \mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} = 8\epsilon_{M\mathcal{MN}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{MN}}, \\
\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^M \quad &: \quad \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^M = -6\epsilon_{NKLPQ}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{MN,KLPQ}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

До наложения условия проекции поля (1.25) зависят от 7 координат y^μ внешнего пространства и 10 координат $\mathbb{X}^{MN}$ внутреннего обобщенного пространства. $e_\mu^{\overline{\mu}}$ - репер внешнего пространства с весом $\lambda[e_\mu^{\overline{\mu}}] = \beta_4$ относительно обощенных диффеоморфизмов.

$$\delta_\Lambda e_\mu^{\overline{\mu}} = \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}e_\mu^{\overline{\mu}} + \frac{1}{10}e_\mu^{\overline{\mu}}\partial_{KL}\Lambda^{KL}. \tag{1.28}$$

Из требования, что обобщенная метрика $\mathcal{M}_{\mathcal{MN}}$, является ковариантным обобщенным 2-тензором с весом $\lambda[\mathcal{M}_{\mathcal{MN}}] = 0$ относительно внутренних обобщенных диффеоморфизмов, следует, что m_{MN} - обобщенная метрика ExFT, являющаяся набором скалярных полей с точки зрения $d = 7$ теории, имеет вес $\lambda[m_{MN}] = 0$ относительно обобщенных диффеоморфизмов

$$\mathcal{L}_\Lambda m_{MN} = \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}m_{MN} + (\partial_{MK}\Lambda^{LK})m_{LN} + (\partial_{NK}\Lambda^{LK})m_{ML} - \frac{2}{5}(\partial_{KL}\Lambda^{KL})m_{MN}. \tag{1.29}$$

Напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$, $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{M}$ и $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}$ преобразуются при обобщенных диффеоморфизмах как обощенный 2-тензор, вектор и ковектор соответственно

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN} &= \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN} - \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{KN}\partial_{KL}\Lambda^{ML} - \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\partial_{KL}\Lambda^{NL} + \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}\partial_{KL}\Lambda^{KL},\\
\delta_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{M} &= \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{M} - \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{K}\partial_{KL}\Lambda^{ML} + \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{M}\partial_{KL}\Lambda^{KL},\\
\delta_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} &= \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} + \mathcal{F}_{\mu\nu\rho K}\partial_{ML}\Lambda^{KL} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\partial_{KL}\Lambda^{KL}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Лагранжиан SL(5) ExFT [42]

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} = \hat{\mathcal{R}}[g_{(7)}] &\mp \frac{1}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu m_{MN}\mathcal{D}_\nu m^{MN} + e^{-1}\mathcal{L}_{sc}\\
&+ \frac{1}{3\cdot(16)^2}m^{MN}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N + e^{-1}\,\mathcal{L}_{top},
\end{aligned} \tag{1.31}$$

где $e = (\det e_\mu^{\overline{\mu}})$, $g_{\mu\nu} = e_\mu^{\overline{\mu}}e_\nu^{\overline{\nu}}\eta_{\overline{\mu\nu}}$, и скалярная часть дается выражением

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L}_{sc} = \pm\Bigg(&\frac{1}{8}\,\partial_{MN}m_{PQ}\,\partial_{KL}m^{PQ}\,m^{MK}m^{NL} + \frac{1}{2}\,\partial_{MN}m_{PQ}\,\partial_{KL}m^{MP}\,m^{NK}m^{LQ}\\
&+ \frac{1}{2}\,\partial_{MN}m^{LN}\,\partial_{KL}m^{MK} + \frac{1}{2}m^{MK}\partial_{MN}m^{NL}(g^{\mu\nu}\partial_{KL}g_{\mu\nu})\\
&+ \frac{1}{8}m^{MK}m^{NL}(g^{\mu\nu}\partial_{MN}g_{\mu\nu})(g^{\rho\sigma}\partial_{KL}g_{\rho\sigma}) + \frac{1}{8}m^{MK}m^{NL}\partial_{MN}g^{\mu\nu}\partial_{KL}g_{\mu\nu}\Bigg).
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь и везде далее верхний знак отвечает случаю, когда внешнее $d = 7$ пространство лоренцевой сигнатуры, а нижний знак - евклидовой сигнатуры (мы подразумеваем что общая сигнатура 11-ти мерного пространства лоренцева). Случай, когда времениподобное направление лежит во внутреннем пространстве ExFT (нижний знак), отвечает времениподобной U-дуальности [51, 52, 53]. Вне зависимости от выбора знака группой U-дуальности остается $SL(5)$, изменяется только локальная группа дуальности $\mathbf{K}$.

Заметим, что лагранжиан (1.31) не содержит кинетического члена $C_{\mu\nu\rho}{}^M$. Более того, $C_{\mu\nu\rho}{}^M$ входит в лагранжиан только через топологический член и $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho N}$. Варьируя лагранжиан по $C_{\mu\nu\rho}{}^M$, мы получим уравнение дуальности (1.5), (1.33) между $C_{\mu\nu\rho}{}^M$ и $B_{\mu\nu M}$, как мы этого и ожидали при рассмотрении редукции на Рисунке.3. Таким образом $C_{\mu\nu\rho}{}^M$ не является динамическим, поэтому мы не включили его в (1.25), и именно по этой причине тензорная иерархия $SL(5)$ прерывается на этом поле [42].

$$m^{MN}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N = \frac{1}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda\sigma\eta\delta}\mathcal{F}_{\lambda\sigma\eta\delta}{}^M. \tag{1.33}$$

После разбиения фундаментального индекса SL(5) на $M = 1, \dots, 4, 5 = (m, 5)$, компоненты обобщенной метрики могут быть параметризованы в следующем виде

$$
m_{MN} = h^{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} h^{-\frac{1}{2}} h_{mn} & -V_m \\ \\ -V_n & \pm h^{\frac{1}{2}}(1 \pm V_k V^k) \end{bmatrix}, \quad m^{MN} = h^{-\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} h^{\frac{1}{2}}(h^{mn} \pm V^m V^n) & \pm V^m \\ \\ \pm V_n & \pm h^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \quad (1.34)
$$

где $V^m = \frac{1}{3!}\varepsilon^{mnkl} C_{nkl}$ и $h = \det h_{mn}$. В Разделе 2 поля h_{mn} и C_{mnk} будут связаны с соответствующими компонентами обыкновенной метрики и 3-формы на $d = 4$ пространстве.

1.4 Деформации решений уравнений 11-ти мерной супергравитации

Вопрос, которым мы интересуемся, и который является основополагающим в нашем исследовании можно сформулировать следующим образом:

Возможно ли построить деформации решений 11-ти мерной супергравитации при помощи ExFT и будут ли они удовлетворять некоторому обобщению уравнения Янга-Бакстера, если потребовать, что деформированное решение остается решением, как это было сделано для 10-ти мерной супергравитации при помощи DFT (Раздел 1.1)?

Мы исследуем этот вопрос на примере SL(5) ExFT, для которой обобщенная метрика m_{MN} может быть параметризована двумя способами, аналогично тому как это было в случае DFT. 1-ый способ, так называемый C-фрейм ExFT, соответствует верхнетреугольному обобщенному реперу (1.34), параметризуемому полями (h_{mn}, C_{mnk}), и для этого случая уравнения исключительной теории поля будут совпадать с уравнениями 11-ти мерной супергравитации. 2-ой способ, C-Ω-фрейм ExFT, отвечает смешанному реперу (3.11), параметризуемому полями $(h_{mn}, C_{mnk}, \Omega^{mnk})$, уравнения для него - общие уравнения ExFT.

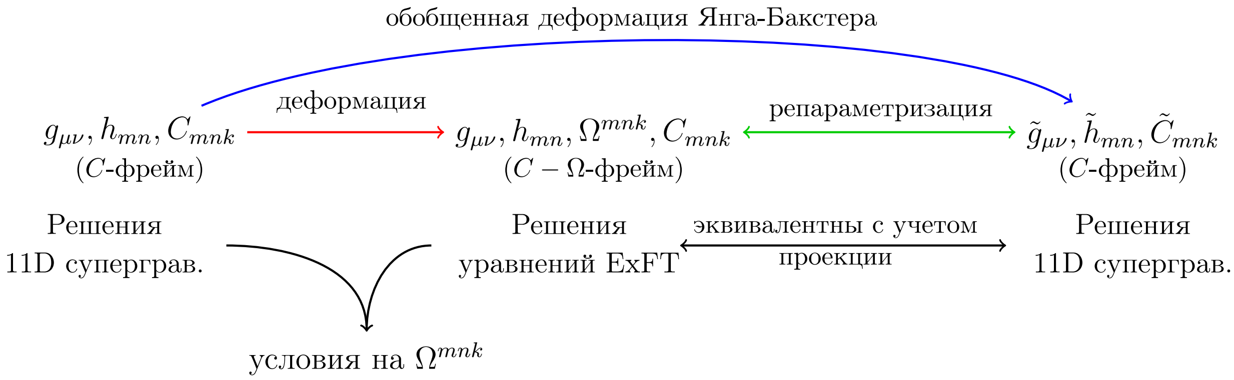

Рис. 4: Связь фона $(G_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk})$, решающего уравнения 11D супергравитации, и его деформации $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$. C-фрейм - 11D супергравитация, C-Ω-фрейм - ExFT. Обобщенная деформация Янга-Бакстера действует на решение супергравитации, и в данном случае интерпретируется, как композиция деформации с параметром Ω^{mnk} и открыто/замкнутого отображения. Требования выполнений уравнений супергравитации для деформированного фона накладывает условия на Ω^{mnk}.

Способ построения деформации схематически изображен на Рисунке.4. Для этого, мы отображаем решение 11-ти мерной супергравитации в решение ExFT, используя параметризацию в C-фрейме $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk})$. Затем, мы добавляем к нему в C-Ω-фрейме деформацию в виде параметра Ω^{mnk}. Тогда мы получаем набор полей $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk}, \Omega^{mnk})$, где первые три фиксированы, так как мы деформируем фиксированное решение. Теперь мы можем найти $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$ в C-фрейме, которые дают ту же самую обобщенную метрику, что и $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk}, \Omega^{mnk})$ в C-Ω-фрейме. Переход от $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk}, \Omega^{mnk})$ к $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$ мы будем называть обобщением открыто/закрытого отображения для ExFT, а переход от изначального решения $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk})$ к $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$ обобщенной деформацией Янга-Бакстера [54]. Наконец из требования, что $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$ также является решением 11-ти мерной супергравитации, мы получаем ограничения на параметр деформации Ω^{mnk}. Заметим, что уравнения 11-ти мерной супергравитации на $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{h}_{mn}, \tilde{C}_{mnk})$ эквивалентны уравнениям ExFT на $(g_{\mu\nu}, h_{mn}, C_{mnk}, \Omega^{mnk})$, поэтому условие на Ω^{mnk} можно искать из последних.

Данная работа организована следующим образом. В Разделе 2 мы сформулируем соответствие между полями ExFT и $7+4$ разбиения 11-ти мерной супергравитации. В Разделе 3 мы построим согласованную редукцию ExFT на пространствах вида $M_{11} = M_4 \times M_7$ с метрикой на M_7, не зависящей от координат на M_4. Мы сконструируем обобщенную деформацию Янга-Бакстера для решения супергравитации при помощи три-вектора Ω^{mnk} на M_4 и получим уравнения движения ExFT, выполнение которых эквивалентно тому, что деформированный фон также является решением супергравитации. В Разделе 4 мы применим формализм Раздела 3 для решения $AdS_4 \times \mathbb{S}^7$ и предъявим найденные нами новые деформированные решения. В Разделах 5,6 мы подеведем итоги и обсудим полученные результаты.

Основная часть данной работы соответствует опубликованной статье [55] в соавторстве с Э.Т. Мусаевым и И.В. Бахматовым.

2 Вложение 11-ти мерной супергравитации в SL(5) ExFT

Для того, чтобы построить соответствие между полями 11-ти мерной супергравитации и SL(5) ExFT, необходимо рассмотреть редукцию Калуцы-Клейна при $7+4$ разбиении, и организовать получающиеся поля в комбинации, инвариантные относительно обобщенной производной Ли теории SL(5). При выполнении данной процедуры мы следуем тем же самым шагам, что были сделаны при рассмотрении теории $E_{6(6)}$ [40], за исключением некоторых изменений из-за особенностей группы SL(5).

2.1 Действие 11-ти мерной супергравитации

Здесь мы приведем бозонную часть действия 11-ти мерной супергравитации

$$S_{11} = \int d^{11}x E\Big(\underbrace{R}_{I} \underbrace{-\frac{1}{48}F^{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\sigma}F_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\sigma}}_{II} \underbrace{+\frac{1}{(144)^2}E^{-1}\varepsilon^{\hat\mu_1\dots\hat\mu_{11}}F_{\hat\mu_1\dots\hat\mu_4}F_{\hat\mu_5\dots\hat\mu_8}C_{\hat\mu_9\hat\mu_{10}\hat\mu_{11}}}_{III}\Big), \tag{2.1}$$

где $E_{\hat\mu}^{\hat\alpha}$ репер, $\hat\mu,\hat\nu\dots$ искривленные, а $\hat\alpha,\hat\beta\dots$ плоские 11-ти мерные индексы (Приложение A), и

$$F_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} = 4\partial_{[\hat\mu}C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma]}. \tag{2.2}$$

Сответственно части действия (2.1) мы называем следующим образом: I — действие Эйнштейна-Гильберта, II — кинетический член для 3-форм, III — топологический член.

Действие (2.1) инвариантно относительно 11–ти мерных диффеоморфизмов и калибровочных преобразований $\delta C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} = 3\partial_{[\hat\nu}\Lambda_{\hat\rho\hat\sigma]}$. Заметим, что в отличие от [40] мы пользуемся стандартным действием супергравитации, которое получается из действия написанного в [40] заменой $C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} \to \frac{1}{2}C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma}$.

2.2 Действие Эйнштейна–Гильберта

Разбивая 11–ти мерные индексы на индексы внешнего (размерности $n=7$) и индексы внутреннего (размерности $d=4$) пространства, получим $\hat\mu = (\mu, m)$ для искривленных и $\hat\alpha = (\overline{\mu}, \overline{m})$ для плоских индексов (Приложение A). Теперь мы можем переписать репер

$$E_{\hat\mu}{}^{\hat\alpha} \;=\; \begin{pmatrix} \phi^\gamma e_\mu{}^{\overline{\mu}} & A_\mu{}^m\phi_m{}^{\overline{m}} \\ 0 & \phi_m{}^{\overline{m}} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $\phi = \det\phi_m{}^{\overline{m}}$. Выбор верхнетреугольного вида репера фиксирует калибровку локальной группы Лоренца. Соответственно обратный репер

$$E_{\hat\alpha}{}^{\hat\mu} \;=\; \begin{pmatrix} \phi^{-\gamma}e_{\overline{\mu}}{}^\mu & -\phi^{-\gamma}e_{\overline{\mu}}{}^\nu A_\nu{}^m \\ 0 & \phi_{\overline{m}}{}^m \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

здесь постоянная

$$\gamma \;=\; -\frac{1}{n-2}\,, \tag{2.5}$$

где n — размерность внешнего пространства, которая для нашего случая $n=7$.

Внутренняя часть 11-ти мерных диффеоморфизмов (мы разбиваем 11-ти мерные диффеоморфизм следующим образом $\xi^{\hat\mu} = (\xi^\mu, \Lambda^m)$)

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda e_\mu{}^{\overline{\mu}} \;&=\; \Lambda^m\partial_m e_\mu{}^{\overline{\mu}} - \gamma\,\partial_m\Lambda^m\, e_\mu{}^{\overline{\mu}}\,, \\ \delta_\Lambda\phi_m{}^{\overline{m}} \;&=\; \Lambda^n\partial_n\phi_m{}^{\overline{m}} + \partial_m\Lambda^n\,\phi_n{}^{\overline{m}}\,, \\ \delta_\Lambda\phi \;&=\; \Lambda^n\partial_n\phi + \partial_n\Lambda^n\,\phi\,, \\ \delta_\Lambda A_\mu{}^m \;&=\; \partial_\mu\Lambda^m - A_\mu{}^n\partial_n\Lambda^m + \Lambda^n\partial_n A_\mu{}^m\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

и в соответствии с (2.6) мы можем ввести ковариантные производные $D_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu{}^m}$

$$\begin{aligned} D_\mu e_\nu{}^{\overline{\mu}} &= \partial_\mu e_\nu{}^{\overline{\mu}} - A_\mu{}^m \partial_m e_\nu{}^{\overline{\mu}} + \gamma \partial_m A_\mu{}^m e_\nu{}^{\overline{\mu}} \,, \\ D_\mu \phi_m{}^{\overline{m}} &= \partial_\mu \phi_m{}^{\overline{m}} - A_\mu{}^n \partial_n \phi_m{}^{\overline{m}} - \partial_m A_\mu{}^n \phi_n{}^{\overline{m}} \,, \\ F_{\mu\nu}{}^m &= \partial_\mu A_\nu{}^m - \partial_\nu A_\mu{}^m - A_\mu{}^n \partial_n A_\nu{}^m + A_\nu{}^n \partial_n A_\mu{}^m \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Применяя разбиение (2.3) для действия Эйнштейна–Гильберпа (части действия 11–ти мерной супергравитации), и переписывая все через ковариантные объекты (2.7), получим

$$\begin{aligned} S_{\rm EH} = \int d^n x\, d^d y\, e \Big[& \widehat{R} - \frac{1}{4} \phi^{-2\gamma} \phi_{mn} F^{\mu\nu m} F_{\mu\nu}{}^n \\ & - \frac{1}{2} \phi^{mn} g^{\mu\nu} D_\mu \phi_m{}^{\overline{m}} D_\nu \phi_{n\overline{m}} - \gamma^2 (n-2) \phi^{-2} g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi \\ & - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi^{\overline{m}m} D_\mu \phi_m{}^{\overline{n}})(\phi_{\overline{n}}{}^n D_\nu \phi_{n\overline{m}}) + e^{-1} V_{\rm EH}(\phi, e) \Big] \,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

здесь $e = \det e_\mu{}^{\overline{\mu}}$, $g = \det g_{\mu\nu}$, $\phi_{mn} = \phi_{m\overline{m}} \phi_n{}^{\overline{m}}$, $g_{\mu\nu} = e_{\mu\overline{\mu}} e_\nu{}^{\overline{\mu}}$, действие Эйнштейна–Гильберта для внутренней части

$$\phi^{-2\gamma} e^{-1} V_{\rm EH}(h, e) = R(\phi) + \frac{1}{4} \phi^{mn} \left(D_m g^{\mu\nu} D_n g_{\mu\nu} + g^{-1} D_m g\, g^{-1} D_n g \right) \,. \tag{2.9}$$

где “модифицированный” тензор Римана

$$\widehat{R}_{\mu\nu}{}^{\overline{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}{}^{\overline{\mu\nu}} + F_{\mu\nu}{}^m e^{\overline{\mu}\rho} \partial_m e_\rho{}^{\overline{\nu}} \,, \tag{2.10}$$

который необходим для сохранения локальной SO(1, 6) лоренцевой инвариантности. Также, согласно преобразованиям (2.6), мы введем выражение, инвариантное относительно внутренних диффеоморфизмов

$$D_m g_{\mu\nu} = \partial_m g_{\mu\nu} - \frac{1}{5} (\Phi^{-1} \partial_m \Phi) g_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

где $\Phi = \det \phi_{mn}$.

После интегрирования по частям и подстановки $\gamma = -\frac{1}{5}$, потенциал $V_{\rm EH}$ может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{\frac{1}{5}} e^{-1} V_{\rm EH} = & \frac{1}{4} \phi^{kl} \partial_k \phi^{mn} \partial_l \phi_{mn} - \frac{1}{2} \phi^{kl} \partial_k \phi^{mn} \partial_m \phi_{ln} - \frac{1}{5} \partial_m \phi^{mn} \Phi^{-1} \partial_n \Phi - \frac{3}{100} \phi^{mn} (\Phi^{-1} \partial_m \Phi)(\Phi^{-1} \partial_n \Phi) \\ & + \frac{1}{4} \phi^{mn} \partial_m g^{\mu\nu} \partial_n g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_m \phi^{mn}\, g^{-1} \partial_n g + \frac{1}{4} \phi^{mn} (g^{-1} \partial_m g)(g^{-1} \partial_n g) \\ & - \frac{1}{10} \phi^{mn} (\Phi^{-1} \partial_m \Phi)(g^{-1} \partial_n g) \,; \end{aligned} \tag{2.12}$$

удобном для сравнения с SL(5) ExFT.

2.3 Кинетический член 3–форм

Используя редукцию Калуцы–Клейна, переопределим поля [40]

$$\begin{aligned} A_{mnk} &= C_{mnk} \,, \\ A_{\mu\, mn} &= C_{\mu mn} - A_\mu{}^k C_{kmn} \,, \\ A_{\mu\nu\, m} &= C_{\mu\nu m} - 2 A_{[\mu}{}^n C_{\nu]mn} + A_\mu{}^n A_\nu{}^k C_{mnk} \,, \\ A_{\mu\nu\rho} &= C_{\mu\nu\rho} - 3 A_{[\mu}{}^m C_{\nu\rho]m} + 3 A_{[\mu}{}^m A_\nu{}^n C_{\rho]mn} - A_\mu{}^m A_\nu{}^n A_\rho{}^k C_{mnk} \,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

новые поля преобразуются относительно переопределенных разбитых калибровочных преобразований $(\Lambda_{mn}, \Lambda_{\mu m}, \Lambda_{\mu\nu})$ следующим образом [40]

$$\begin{aligned}
\delta A_{mnk} &= 3\partial_{[m}\Lambda_{nk]} \ , \\
\delta A_{\mu\, mn} &= D_\mu \Lambda_{mn} - 2\partial_{[m|}\Lambda_{\mu|n]} \ , \\
\delta A_{\mu\nu\, m} &= 2D_{[\mu}\Lambda_{\nu]m} - F_{\mu\nu}{}^{n}\,\Lambda_{mn} + \partial_m \Lambda_{\mu\nu} \ , \\
\delta A_{\mu\nu\rho} &= 3D_{[\mu}\Lambda_{\nu\rho]} - 3F_{[\mu\nu}{}^{n}\,\Lambda_{\rho]n} \ ,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

здесь D_μ, как и ранее, ковариантная относительно внутренних диффеоморфизмов производная $D_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu^m}$.

При такой редукции кинетический член для 3–форм запишется как

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{3-form}} &= -\frac{1}{\mathbf{48}} E\, F^{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} F_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} = \\
&= -\frac{1}{\mathbf{48}}\phi^{n\gamma+1} e \Big(\phi^{-8\gamma} F^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\phi^{-6\gamma}\phi^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_{m}F_{\mu\nu\rho\, n} + 6\phi^{-4\gamma}\phi^{mn}\phi^{kl}F^{\mu\nu}{}_{mk}F_{\mu\nu\, nl} \\
&\qquad + 4\phi^{-2\gamma}\phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}F^{\mu}{}_{mkp}F_{\mu\, nlq} + \phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}\phi^{rs}F_{mkpr}F_{nlqs}\Big) = \\
&\overset{\gamma=-\frac{1}{5};\, n=7}{=} \ -\frac{1}{\mathbf{48}}\phi^{-\frac{2}{5}} e \Big(\phi^{\frac{8}{5}} F^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma} + 4\phi^{\frac{6}{5}}\phi^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_{m}F_{\mu\nu\rho\, n} + 6\phi^{\frac{4}{5}}\phi^{mn}\phi^{kl}F^{\mu\nu}{}_{mk}F_{\mu\nu\, nl} \\
&\qquad + 4\phi^{\frac{2}{5}}\phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}F^{\mu}{}_{mkp}F_{\mu\, nlq} + \phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}\phi^{rs}F_{mkpr}F_{nlqs}\Big)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Еще раз отметим, что наш коэффициент $-\frac{1}{\mathbf{48}}$ отличается от коэффициента $-\frac{1}{\mathbf{12}}$ в [40] из-за нашего выбора коэффициентов в (2.1), что сводится к замене $C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma} \to \frac{1}{2}C_{\hat\nu\hat\rho\hat\sigma}$. Тензоры напряженностей для переопределенных полей выражаются согласно процедуре редукции [40]

$$\begin{aligned}
F_{mnkl} &= 4\partial_{[m}A_{nkl]} \ , \\
F_{\mu\, nkl} &= D_\mu A_{nkl} - 3\partial_{[n}A_{|\mu|kl]} \ , \\
F_{\mu\nu\, mn} &= 2D_{[\mu}A_{\nu]mn} + F_{\mu\nu}{}^{k}A_{kmn} + 2\partial_{[m}A_{|\mu\nu|n]} \ , \\
F_{\mu\nu\rho\, m} &= 3D_{[\mu}A_{\nu\rho]m} + 3F_{[\mu\nu}{}^{n}A_{\rho]mn} - \partial_m A_{\mu\nu\rho} \ , \\
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4D_{[\mu}A_{\nu\rho\sigma]} + 6F_{[\mu\nu}{}^{m}A_{\rho\sigma]m} \ ,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

и являются ковариантными относительно разбитых калибровочных преобразований $(\Lambda_{mn}, \Lambda_{\mu m}, \Lambda_{\mu\nu})$ [40].

2.4 Построение вложения

В разбитом действии супергравитации члены, содержащие 2–формы $F_{\mu\nu}{}^{m}$ в части (2.8) и $F_{\mu\nu mn}$ в (2.15), могут быть скомбинированы следующим образом

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L}_{\text{kin}-2} &= -\frac{1}{4}\Phi^{\frac{1}{5}}F^{\mu\nu m}F_{\mu\nu}{}^{n}\phi_{mn} - \frac{1}{8}\Phi^{\frac{1}{5}}\phi^{mn}\phi^{kl}F^{\mu\nu}{}_{mk}F_{\mu\nu nl} \\
&= \mp\frac{1}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где верхний знак отвечает случаю, когда внешнее $d = 7$ пространство лоренцевой сигнатуры, а нижний знак — евклидовой сигнатуре (мы подразумеваем что общая сигнатура 11–ти мерного пространства лоренцева), индексы $M, N... = 1, ..., 5$ (Приложение A), и мы определили обобщенную метрику следующим образом

$$m_{MN} = \phi^{\frac{1}{5}}\begin{bmatrix} \phi^{-1}\phi_{mn} & -V_m \\ -V_n & \pm\phi(1 \pm V_k V^k) \end{bmatrix}, \qquad m^{MN} = \phi^{-\frac{1}{5}}\begin{bmatrix} \phi(\phi^{mn} \pm V^m V^n) & \pm V^m \\ \pm V^n & \pm\phi^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

где $V^m = 1/3!\,\varepsilon^{mnkl}C_{nkl}$.

Ковариантные напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$ определены как

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{5m} = F_{\mu\nu}{}^m \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{mn} = -\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}F_{\mu\nu kl} + 2h^{\frac{1}{2}}V^{[m}F_{\mu\nu}{}^{n]}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Последняя строчка может быть переписана в более удобной форме $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{mn} = -\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}(F_{\mu\nu kl} - C_{klp}F_{\mu\nu}{}^p)$.

Наконец, мы можем привести полное действие $D = 11$ супергравитации при редукции $7+4$ и соответствующем фиксации калибровки локальной группы Лоренца

$$\begin{aligned} S_{11} \;=\; \int d^7x\, d^4y\, e\, \Big[\, & \widehat{R} \mp \frac{1}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL} - \frac{1}{48}\phi^{\frac{6}{5}}F^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{12}\phi^{\frac{4}{5}}\phi^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_mF_{\mu\nu\rho n} \\ & - \frac{1}{2}\phi^{mn}D^\mu\phi_m{}^{\overline{m}}\,D_\mu\phi_{n\overline{m}} - \frac{1}{5}\phi^{-2}D^\mu\phi\, D_\mu\phi \\ & - \frac{1}{2}(\phi^{m\overline{m}}D^\mu\phi_m{}^{\overline{n}})(\phi_{\overline{n}}{}^nD_\mu\phi_{n\overline{m}}) - \frac{1}{12}\phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}F^\mu{}_{mkp}F_{\mu\, nlq} \\ & + e^{-1}V_{EH}(\phi, e) - \frac{1}{48}\phi^{-\frac{2}{5}}F_{mnkl}F^{mnkl} + e^{-1}\mathcal{L}_{\text{top}}\Big]\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Нас интересует вложение $7+4$ супергравитации в SL(5) ExFT. Для его построения нам необходим лагранжиан SL(5) ExFT (1.31), который мы приведем здесь еще раз [42]

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L} = \hat{\mathcal{R}}[g_{(7)}] \mp \frac{1}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu m_{MN}\mathcal{D}_\nu m^{MN} + e^{-1}\mathcal{L}_{sc} \\ + \frac{1}{3\cdot(16)^2}m^{MN}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N + e^{-1}\,\mathcal{L}_{top}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Выбирая для (2.21) выражения (2.18), (2.19) в качестве параметризации m_{MN} и $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$, мы можем проверить, что обобщенные диффеоморфизмы (1.28), (1.29), (1.30) с параметрами $(\Lambda^{5m}, \Lambda^{mn})$ для $e_\mu^{\overline{\mu}}$, m_{MN} и $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$ с выбором $\partial_{mn}\bullet = 0$ в качестве решения уравнения проекции (1.24) сводятся к преобразованиям полей $(e_\mu^{\overline{\mu}}, \phi_{mn}, C_{mnk}, A_\mu{}^m, A_{\mu kl})$ совпадающих с описанными выше внутренними диффеоморфизмами (2.6) и калибровочными преобразованиями (2.14) в супергравитации. В процессе проверки мы используем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda^{mn} &= \mp\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}\Lambda_{kl}, \\ \Lambda_{mn} &= +\frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}\Lambda^{kl}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь знаки в 1-ой и 2-ой строке отличаются в согласии с

$$\varepsilon^{i_1\ldots i_q j_1\ldots j_{(n-q)}}\varepsilon_{i_1\ldots i_q k_1\ldots k_{(n-q)}} = sgn[\phi_{mn}]q!(n-q)!\delta^{[j_1}_{k_1}\ldots\delta^{j_{n-q}]}_{k_{n-q}}. \tag{2.23}$$

Заметим, что $\epsilon^{mnkl} = \phi\;\varepsilon^{mnkl}$ и $\epsilon_{1234} = +1$, $\epsilon^{1234} = -1$. Также мы пользуемся выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{mn} &= \mp\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}\mathcal{F}_{\mu\nu kl}, \\ \mathcal{F}_{\mu\nu mn} &= +\frac{1}{2}\epsilon_{mnkl}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{kl}, \\ A_\mu{}^{mn} &= \mp\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}A_{\mu mn}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

Далее, подставляя выбранную параметризацию полей ExFT в лагранжиан (2.21), мы можем найти соответствие между частями лагранжиана (2.21) ExFT и лагранжиана (2.20) $7+4$ супергравитации. Таким образом мы приходим к соответствию между полями параметризующими SL(5) ExFT и полями $7+4$ супергравитации (Таблица.4) и соответствию между частями лагранжианов ExFT и $7+4$ супергравитации (Таблица.5).

Таблица 4: Соответствие между полями параметризующими SL(5) ExFT и полями $7+4$ супергравитации (последняя строка выделена бордовым, так как явное построение соответствия этих частей остается открытым вопросом).

SL(5) ExFT	$7+4$ супергравитация
$e_\mu^{\overline{\mu}}, g_{\mu\nu}$	$e_\mu^{\overline{\mu}}, g_{\mu\nu}$
ϕ_{mn}	ϕ_{mn}
C_{mnk}	C_{mnk}
$\pm A_{\mu nk}$	$A_{\mu nk}$
$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$	$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}$
$4\partial_{[m}C_{nkp]}$	F_{mnkp}
$\mathcal{D}_\mu C_{mnk} = D_\mu C_{mnk} \mp 3\partial_{[m\|}A_{\mu\|nk]}$	$F_{\mu\, mnk}$
$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}$	$F_{\mu\nu\rho\sigma}, F_{\mu\nu\rho\, n}$

Таблица 5: Соответствие между частями лагранжианов SL(5) ExFT и 7+4 супергравитации (последние две строки выделены бордовым, так как построение соответствия этих частей остается открытым вопросом).

SL(5) ExFT	$7+4$ супергравитация
$e\hat{\mathcal{R}}[g_{(7)}]$	$e\widehat{R}$
$\mp\frac{e}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL}$	$\mp\frac{e}{8}m_{MN}m_{KL}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MK}\mathcal{F}^{\mu\nu NL}$
$\frac{e}{4}g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu m_{MN}\mathcal{D}_\nu m^{MN}$	$-\frac{e}{2}\phi^{mn}D^\mu\phi_m{}^{\overline{m}}\, D_\mu\phi_{n\overline{m}} - \frac{e}{5}\phi^{-2}D^\mu\phi\, D_\mu\phi$ $-\frac{e}{2}(\phi^{m\overline{m}}D^\mu\phi_m{}^{\overline{n}})(\phi_{\overline{n}}{}^n D_\mu\phi_{n\overline{m}}) - \frac{e}{12}\phi^{mn}\phi^{kl}\phi^{pq}F^\mu{}_{mkp}F_{\mu\, nlq}$
$\mathcal{L}_{sc}$	$V_{EH}(\phi,e) - \frac{e}{48}\phi^{-\frac{2}{5}}F_{mnkl}F^{mnkl}$
$\mathcal{L}_{top}$	$\mathcal{L}_{top}$
$\frac{e}{3\cdot(16)^2}m^{MN}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N$	$-\frac{e}{48}\phi^{\frac{6}{5}}F^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{e}{12}\phi^{\frac{4}{5}}\phi^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_m F_{\mu\nu\rho\, n}$

Заметим, что в вычислениях мы также использовали связь между обобщенной ковариантной производной и производной ковариантной относительно внутренних диффеоморфизмов обычной супергравитации

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu{}^{\mathcal{M}}} = \underbrace{\partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu{}^{5m}}}_{D_\mu} - \mathcal{L}_{A_\mu{}^{mn}}. \tag{2.25}$$

3 Уравнения движения для редукции SL(5) ExFT

3.1 Редукция SL(5) ExFT

Общая процедура построения деформированного фона супергравитации в ExFT/DFT формализме основана на переходе между геометрическим и негеометрическим фреймом, параметризующим одну и ту же обобщенную метрику, и интерпретации негеометрического три/два-вектора в качестве параметра деформации, а не фундаментального поля [20, 54]. В таком подходе тензор деформации может быть составлен только из векторов Киллинга "внутренней" части фона, в терминах ExFT.

Для простоты, далее мы будем рассматривать только такие решения, метрика которых имеет блочно-диагональный вид, то есть $M_{11} = M_4 \times M_7$, где внутренняя метрика h_{mn} не зависит от внешних координат y^μ. Это позволяет существенно упростить уравнения движения путем редукции теории в чисто скалярную обобщенную геометрию SL(5), аналогично [32, 43], с сохранением геометрии внешнего пространства. Таким образом мы редуцируем уравнения движения полной SL(5) ExFT на случай

$$
\begin{aligned}
&g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(y^\mu, x^m), \quad && m_{MN} = m_{MN}(x^m),\\
&A_\mu{}^{MN} = 0, && B_{\mu\nu\, m} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Более того, обладая структурой полей теории (3.1), мы можем использовать ее уже на уровне лагранжиана, после чего в лагранжиане ExFT остается только член $d = 7$ Эйнштейна-Гильберта и скалярный потенциал обобщенной метрики

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{R}[g_{(7)}] - \bigg(&\frac{1}{8}\,\partial_{MN} m_{PQ}\,\partial_{KL} m^{PQ}\, m^{MK} m^{NL} + \frac{1}{2} m^{MK}\partial_{MN} m^{NL}(g^{\mu\nu}\partial_{KL} g_{\mu\nu})\\
&+ \frac{1}{2}\,\partial_{MN} m^{LN}\,\partial_{KL} m^{MK} + \frac{1}{2}\,\partial_{MN} m_{PQ}\,\partial_{KL} m^{MP}\, m^{NK} m^{LQ}\\
&+ \frac{1}{8} m^{MK} m^{NL}(g^{\mu\nu}\partial_{MN} g_{\mu\nu})(g^{\rho\sigma}\partial_{KL} g_{\rho\sigma}) + \frac{1}{8} m^{MK} m^{NL}\partial_{MN} g^{\mu\nu}\partial_{KL} g_{\mu\nu}\bigg),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $\mathcal{R}[g_{(7)}]$ скаляр Риччи для метрики $g_{\mu\nu}$. Важно отметить, что такая редукция, зависящая от фона, основана на сферическом анзаце (3.1), и не обеспечивает полной согласованной редукции теории. Тем не менее, любое решение вида (3.1) ExFT, соттветствует решению $d = 11$ супергравитации, и после три-векторной деформации оно сохраняет вид (3.1) (но уже с новой обобщенной и внешней метрикой), так как три-векторные деформации составленные из векторов Киллинга обобщенной метрки не зависят от внешних координат y^μ. Заметим, что мы произвели редукцию на уровне лагранжиана, но структура членов взаимодействий (3.1) такова, что это эквивалентно редукции на уровне уравнений движения.

Далее мы будем рассматривать случай, когда деформация приводит к перешкалированию 7–мерной части метрики на скалярный множитель, зависящий от внутренних координат x^m. Для $d = 7$ метрики до деформации мы будем использовать анзац $g_{\mu\nu}(y^\mu, x^m) = e^{-2\phi(x^m)} h^{\frac{1}{5}} \bar{g}_{\mu\nu}(y^\mu)$, что позволяет избавиться от зависимости от x^m в $\phi(x^m)$ путем правильного перешкалирования обобщенной метрики (выше $h = \det(h_{mn})$). Для того, чтобы добиться этого, определим перешкалированные поля следующим образом

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= e^{-2\phi} h^{\frac{1}{5}} \bar{g}_{\mu\nu},\\
m_{MN} &= e^{-\phi} h^{\frac{1}{10}} M_{MN}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Это позволяет переписать лагранжиан $\mathcal{L} = e\hat{\mathcal{R}}[g_{(7)}] + \mathcal{L}_{sc}$ в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \bar{e}\, M^{-1}\Big(&\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] - \frac{1}{8}\, M^{KL}M^{MN}\partial_{KM}M_{PQ}\,\partial_{LN}M^{PQ} - \frac{1}{2}\,\partial_{NK}M^{MN}\,\partial_{ML}M^{KL}\\ &+ \frac{1}{2}\, M^{KL}M^{MN}\partial_{MK}M^{PQ}\,\partial_{PL}M_{NQ} + M^{KL}M^{MN}\partial_{KP}M_{MN}\,\partial_{LQ}M^{PQ}\\ &- \frac{15}{24}\, M^{KL}M^{MN}M^{PQ}M^{RS}\partial_{MP}M_{KL}\,\partial_{NQ}M_{RS}\Big)\,,\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $M = \det M_{MN} = e^{5\phi}h^{-1/2}$ и $\bar{e} = (\det \bar{g}_{\mu\nu})^{1/2}$. Для перешкалирования (3.3) репер в $d = 11$ имеет следующий вид (сравните с (2.3))

$$E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} e^{-\phi}\bar{e}_\mu{}^{\overline{\mu}} & A_\mu{}^m h_m{}^{\overline{m}} \\ 0 & h_m{}^{\overline{m}} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

а обобщенная метрика (сравните с (2.18))

$$M_{MN} = e^{\phi}\begin{bmatrix} |h|^{-\frac{1}{2}}h_{mn} & -V_n \\ -V_m & \pm|h|^{\frac{1}{2}}(1 \pm V_k V^k) \end{bmatrix}, \quad M^{MN} = e^{-\phi}\begin{bmatrix} |h|^{\frac{1}{2}}(h^{mn} \pm V^m V^n) & \pm V_n \\ \pm V_m & \pm|h|^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

где $V^m = \frac{1}{3!}\,\varepsilon^{mnkl}C_{nkl}$ и $h = \det h_{mn}$. Подставляя все это в (3.4) мы получаем лагранжиан

$$\bar{e}^{-1}h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L} = e^{-5\phi}\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] + e^{-7\phi}\left(\mathcal{R}[h_{(4)}] + 42h^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi \mp \frac{1}{2}\nabla_m V^m \nabla_n V^n\right). \tag{3.7}$$

Заметим, что в случае $\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] = 0$, ковариантный лагранжиан (3.4) воспроизводит $\mathrm{SL}(5)\times\mathbb{R}^+$ лагранжиан из [43] с точностью до полных производных.

3.2 Обобщенная деформация Янга–Бакстера

Перешкалированная метрика M_{MN} (3.6) может быть записана при помощи обобщенного репера, $M_{MN} = \mathcal{E}_M{}^A\eta_{AB}\mathcal{E}_N{}^B$, с использованием

$$\mathcal{E}_M{}^A = e^{\frac{\phi}{2}}\begin{bmatrix} |g|^{-1/4}g_m{}^a & |g|^{1/4}v^a \\ 0 & |g|^{1/4} \end{bmatrix}, \quad \eta_{AB} = \begin{bmatrix} \eta_{ab} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

где $g_m{}^a$ репер метрики g_{mn} и $g = \det g_{mn}$.

Представление через реперы оказывается наиболее удбным для определения деформации путем обобщения β–сдвига в DFT, который мы назовем Ω–сдвиг:

$$\mathcal{E}_M{}^A \longrightarrow O[\Omega]_M{}^N\mathcal{E}_N{}^B, \tag{3.9}$$

с матрицей $O[\Omega]$

$$O[\Omega] = \begin{bmatrix} \delta_m{}^n & 0 \\ \frac{1}{3!}\epsilon_{mpqr}\Omega^{pqr} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

где ϵ_{mnkl} эпсилон символ и Ω^{mnk} тензорные компоненты три-вектора деформации $\Omega = \frac{1}{3!}\rho^{\alpha\beta\gamma}\, k_\alpha \wedge k_\beta \wedge k_\gamma$. Таким образом определенная деформация является независимой от фрейма и позволяет определить деформацию для решений с флаксами.

Рассмотрим изначальное решение состоящее из внутренней метрики g_{mn}, калибровочной 3-формы записанной через $v^m = \frac{1}{3!}\,\varepsilon^{mnkl}c_{nkl}$ и 7×7 блок 11-мерной метрики $g_{\mu\nu} = e^{-2\phi(x)}\bar{g}_{\mu\nu}(y)$. Деформация (3.9) поворачивает обобщенный репер на $O[\Omega]$. Обобщенная метрика становится зависимой от Ω; тем не менее, мы можем переписать новую метрику используя выражение (3.6), но с новыми, деформированными полями G_{mn}, V^m и $G_{\mu\nu} = e^{-2\Phi(x)}\bar{g}_{\mu\nu}(y)$ (напомним, что мы ограничились деформациями, которые изменяют внешнюю метрику на фактор зависящий от x^m). Явно это может быть записано как

$$
\begin{aligned}
M_{MN} &= e^{\phi}\begin{bmatrix} |g|^{-1/2}(g_{mn} \pm (1\pm v^2)W_mW_n - 2v_{(m}W_{n)}) & -v_n \pm (1\pm v^2)W_n \\ \\ -v_m \pm (1\pm v^2)W_m & \pm|g|^{1/2}(1\pm v^2) \end{bmatrix} \\
&= e^{\Phi}\begin{bmatrix} |G|^{-1/2}G_{mn} & -V_m \\ \\ -V_n & \pm|G|^{1/2}(1\pm V^2) \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

где $W_m = \frac{1}{3!}\,\varepsilon_{mnkl}\,\Omega^{nkl}$. Первая матрица сверху — это результат умножения (3.9), в то время как вторая матрица составлена из деформированных полей. Равенство этих двух записей для одной обобщенной метрики определяет деформацию в терминах полей $d = 11$ супергравитации $(g_{mn}, g_{\mu\nu}, c_{mnk}) \longrightarrow (G_{mn}, G_{\mu\nu}, C_{mnk})$. Так как основное преобразование (3.9) по существу является сменой фрейма, то удобно называть два приведенных выше представления обобщенной метрики как C–фрейм и $(C-\Omega)$–фрейм соответственно, в зависимости от того, какие поля появляются в обобщенной метрике.

Для построения явных соотношений между $d = 11$ полями, мы следуем процедуре, описанной в [54] и начинаем с приравнивания детерминантов обобщенной метрики в двух фреймах (3.11) и получаем

$$
e^{5\Phi}|G|^{-\frac{1}{2}} = e^{5\phi}|g|^{-\frac{1}{2}},
\tag{3.12}
$$

где $G = \det G_{mn}$. Далее, приравнивая обобщенные метрики поблочно

$$
e^{\Phi}|G|^{-\frac{1}{2}}G_{mn} = e^{\phi}|g|^{-\frac{1}{2}}\left(g_{mn} \pm (1\pm v^2)W_mW_n - 2v_{(m}W_{n)}\right),
\tag{3.13a}
$$

$$
e^{\Phi}V_m = e^{\phi}\Big(v_m \pm (1\pm v^2)W_m\Big).
\tag{3.13b}
$$

Используя детерминант первой строки и алгебраическое тождество

$$
\det\left(\delta_m{}^n \pm (1\pm v^2)W_mW^n - v_mW^n - W_mv^n\right) = 1 \pm W_mW^m - 2W_mv^m + \left(W_mv^m\right)^2,
\tag{3.14}
$$

мы можем определить

$$
K^{-1} = e^{-6(\Phi-\phi)} = 1 \pm W_mW^m - 2W_mv^m + \left(W_mv^m\right)^2.
\tag{3.15}
$$

Это равенство определяет правило преобразования $e^{\Phi} = K^{\frac{1}{6}}e^{\phi}$ для поля ϕ и таким образом для внешней метрики. Если рассматривать K как функцию параметра деформации W_m, уравнения (3.13) выражают деформированные поля в терминах изначальной метрики g_{mn}, калибровочного поля v^m и тензора деформации W_m. Все вместе, правила построения деформации могут быть записаны в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= K^{-\frac{1}{3}} g_{\mu\nu}, \qquad (e^{\Phi} = K^{\frac{1}{6}} e^{\phi}),\\
G_{mn} &= K^{\frac{2}{3}} \left(g_{mn} \pm (1 \pm v^2) W_m W_n - 2 v_{(m} W_{n)} \right),\\
C^{mnk} &= K^{-1} \Big(c^{mnk} + (1 \pm \frac{1}{3!} c^2) \Omega^{mnk} \Big),
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

мы будем называть деформацию, построенную таким образом, обобщенной деформацией Янга–Бакстера.

Описанная выше процедура построения деформации схематически изображена на Рисунке 5.

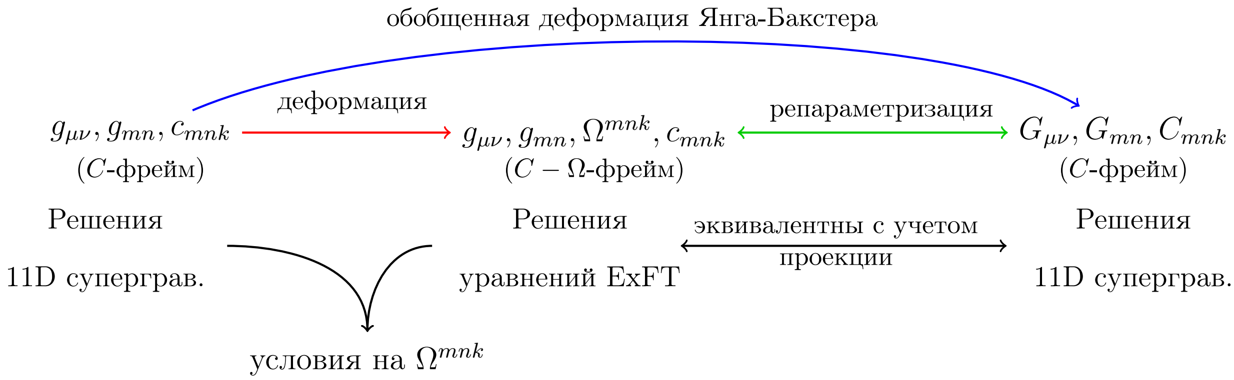

Рис. 5: Связь фона $(g_{\mu\nu}, g_{mn}, c_{mnk})$, решающего уравнения 11D супергравитации, и его деформации $(G_{\mu\nu}, G_{mn}, C_{mnk})$. C-фрейм - 11D супергравитация, C-Ω-фрейм - ExFT. Обобщенная деформация Янга-Бакстера действует на решение супергравитации, и в данном случае интерпретируется, как композиция деформации с параметром Ω^{mnk} и открыто/замкнутого отображения. Требования выполнений уравнений супергравитации для деформированного фона накладывает условия на Ω^{mnk}.

Заметим, что индексы C_{mnk} поднимаются деформированной метрикой G_{mn}, в то время, как индексы c_{mnk} поднимаются изначальной метрикой g_{mn}. Также стоит напомнить, что внешний $G_{\mu\nu}$ и внутренний G_{mn} блоки полной $d = 11$ определены следующим интервалом

$$
ds^2 = G_{\mu\nu}(y,x) dy^{\mu} dy^{\nu} + G_{mn}(x) dx^m dx^n, \tag{3.17}
$$

внешняя метрика имеет вид $G_{\mu\nu}(y,x) = e^{-2\Phi(x)} \bar{g}_{\mu\nu}(y)$ для изначальной $\bar{g}_{\mu\nu}$ которая не зависит от внутренних координат.

Правила построения деформации (3.16) являются обобщением подхода, описанного в [54, 43], и также воспроизводит полученные ранее результаты в [56, 57]. В контексте последних (3.16) может рассматриваться, как переопределение полей при переходе из открытого в закрытый фрейм для мембран в M-теории.

3.3 Уравнения движения

Рассмотрим теперь динамические уравнения на тензор деформации W_m, получающиеся из требования того, что изначальный и деформированный фоны являются решениями уравнений движения полной $d = 11$ супергравитации, или, что то же самое, решениями редуцированной теории.

По техническим причинам мы рассмотрим уравнения, определяющие деформации решения $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, в C–фрейме, то есть используя второй вид метрики (3.11). Поэтому, уравнения на тензор деформации W_m будут неявными в таком случае. Мы берем лагранжиан редуцированной SL(5) ExFT в C–фрейме (3.7)

$$\bar{e}^{-1}h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L} = e^{-5\phi}\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] + e^{-7\phi}\left(\mathcal{R}[h_{(4)}] + 42h^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi + \frac{1}{2}\nabla_m V^m \nabla_n V^n\right), \tag{3.18}$$

где знак выбран в соответствии с сигнатурой $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$.

Из него получаем уравнения движения на динамические поля ϕ, h_{mn} и V_m

$$\begin{aligned}
\delta\phi: \quad & \frac{5}{7}e^{2\phi}\,\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] + \mathcal{R}[h_{(4)}] + 12\,\nabla_m\nabla_n\phi\; h^{mn} - 42\,\nabla_m\phi\,\nabla_n\phi\, h^{mn} + \frac{1}{2}\,(\nabla V)^2 = 0,\\
\delta V^m: \quad & \partial_m(\nabla V) - 7\,(\nabla V)\partial_m\phi = 0,\\
\delta h^{mn}: \quad & \mathcal{R}_{mn}[h_{(4)}] - 7\,\partial_m\phi\,\partial_n\phi\; + 7\,\nabla_m\nabla_n\phi\\
& + h_{mn}\left(-\frac{1}{2}e^{2\phi}\mathcal{R}[\bar{g}_{(7)}] - \frac{1}{2}\,\mathcal{R}[h_{(4)}] + 28\,\partial_k\phi\,\partial_l\phi\, h^{kl} - 7\,\nabla_k\nabla_l\phi\, h^{kl} + \frac{1}{4}\,(\nabla V)^2\right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Такой подход оказывается намного более простым для дальнейших вычислений, чем работа с обычными уравнениями 11–ти мерной супергравитации. Внешнее пространство зафиксировано и является 7–сферой с метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$ с точностью до фактора $e^{-2\phi}$. Любое решение супергравитации вида (3.1), до или после деформации, должно решать эти уравнения.

Для вывода явных уравнений на тензор деформации для решения $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, необходимо работать в смешанном $(C - \Omega)$–фрейме, используя обобщенную метрику в виде (3.11) в лагранжиане (3.4). Это дает описание 11-ти мерной супергравитации одновременно в терминах C_{mnk} и Ω^{mnk}, хотя Ω^{mnk} является нединамическим и параметризует деформации. Так как вид обобщенной метрики (3.11) является громоздким и сложным, получение явных уравнений на деформацию таким способом оказывается технически сложным и поэтому будет оставлено за рамками этой работы. Явное построение такой формулировки для DFT и ExFT является открытым вопросом.

4 Три–векторные деформации фона $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$

В качестве приложения формализма, развитого выше, рассмотрим деформации пространства $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, являющегося решением 11–ти мерной супергравитации. Мы будем изучать деформации соответствующие $\Omega \sim P \wedge P \wedge M$ и $D \wedge P \wedge P$. Поля изначального 11–ти мерного решения могут быть переписаны:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{4}\mathrm{d}s^2(\mathrm{AdS}_4) + R^2 d\Omega^2_{(7)}, \quad F_4 = \frac{3}{8R}\mathrm{vol}_{\mathrm{AdS}_4}, \tag{4.1}$$

с единичной метрикой на 7-ми мерной сфере. Мы рассматриваем AdS_4 в качестве "внутреннего" пространства SL(5) ExFT. Обозначая координаты AdS_4 как $x^m = (x^0, x^1, x^2, z)$, можно записать метрику в привычном виде:

$$ds^2(\mathrm{AdS}_4) = \frac{R^2}{z^2}\left[-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dz)^2\right]. \tag{4.2}$$

Тогда единственная ненулевая компонента флакса и соответствующая 3–форма калибровочного потенциала запишутся:

$$F_{012z} = -\frac{3R^3}{8z^4}, \quad c_{012} \quad = -\frac{R^3}{8z^3}. \tag{4.3}$$

Нас интересуют обобщенные янг–бакстеровские три–векторные деформации:

$$\Omega = \frac{1}{3!}\rho^{\alpha\beta\gamma}k_\alpha \wedge k_\beta \wedge k_\gamma, \tag{4.4}$$

где k_α вектора Киллинга изначального решения, в нашем случае $AdS_4 \times \mathbb{S}^7$. Как было показано в пункте 3.2, матрица деформации $O[\Omega]$ не зависит от выбора фрейма, что говорит о том, что мы можем использовать вектора Киллинга AdS_4 в C–фрейме[1]. Поэтому, мы будем использовать вектора Киллинга AdS_4 в виде:

$$\begin{aligned} P_a &= \partial_a, & K_a &= x^2\partial_a + 2x_a D, \\ D &= -x^m\partial_m, & M_{ab} &= x_a\partial_b - x_b\partial_a, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $a, b = 0, 1, 2$ и $m, n = 0, 1, 2, z$, и мы воспользовались определением $x^2 = \eta_{mn}x^m x^n$ и $x_a = \eta_{ab}x^b$ (подробне об обозначениях смотри в Приложении.A).

Для систематического построения явных примеров деформаций $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, мы рассматриваем такие комбинации векторов Киллинга, что в результате Ω имеет полиномиальное выражение степени $0, 1$, и так далее, по координатам AdS_4. Применяя правило преобразования (3.16), мы получаем деформированные метрики $G_{\mu\nu}, G_{mn}$ и 3–формы C_{mnk} из изначальных недеформированных полей $g_{mn}, g_{\mu\nu}, c_{mnk}$ и тензора деформации W_m, определяемого выбранным видом Ω^{mnk}. Для проверки того, что получившийся в результате деформации фон является решением 11–ти мерной супергравитации, мы подставляем этот деформированный фон, переписанный в терминах полей Φ, G_{mn}, V^m, в уравнения движения (3.19) редуцированной ExFT. Так как деформация действует на $\mathbb{S}^7$ только изменением префактора $e^{-2\phi}$, использование редуцированных уравнений оказывается технически намного более простым, чем проверка уравнений $d = 11$ теории.

[1] Для того, чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться подходом, основанным на обобщенных векторах Киллинга изначального недеформированного решения в духе [58].

4.1 $P \wedge P \wedge P$

Начнем с три-векторной деформации 0–ой степени по координатам, она отвечает тривиальной абелевой $P \wedge P \wedge P$ деформации, определяемой как

$$\Omega = \frac{1}{3!}\,\rho^{\alpha\beta\gamma} k_\alpha \wedge k_\beta \wedge k_\gamma = 4\eta\, P_0 \wedge P_1 \wedge P_2. \tag{4.6}$$

Тензор деформации и префактор K для нее

$$W = -\frac{\eta}{4}\frac{R^4}{z^4}dz, \quad K = \left(1 + \eta\frac{R^3}{z^3}\right)^{-1}. \tag{4.7}$$

Следуя описанной выше процедуре, мы находим деформированный фон

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{4z^2}\left(1+\eta\frac{R^3}{z^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2\right] + R^2\left(1+\eta\frac{R^3}{z^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4z^2}\,dz^2 + d\Omega^2_{(7)}\right), \\ F &= -\frac{3}{8}\frac{R^3}{z^4}\left(1+\eta\frac{R^3}{z^3}\right)^{-2} dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dz, \end{aligned} \tag{4.8}$$

который является решением уравнений (3.19) и поэтому и уравнений $d = 11$ супергравитации.

Для $P \wedge P \wedge P$ деформированного решения Q-флакс $Q_m{}^{nkl} = \partial_m \Omega^{nkl}$ является бесследовым $Q_m{}^{mnk} = 0$, поэтому решение может быть согласованно редуцировано в решение 10-ти мерной теории типа IIA. Фактически, $P \wedge P \wedge P$ абелева деформация в том смысле, что существует генератор, коммутирующий с оставшимися двумя. В данном случае в качестве такого генератора можно взять любой из P_a, например P_2. Это означает, что деформация (4.8) может рассматриваться, как следующая последовательность действий: 1) размерная редукция изначального $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$ в теорию типа IIA вдоль x^2, 2) TsT деформация с би–вектором β, таким образом, что $\Omega = \partial_2 \wedge \beta$:

$$\beta = 4\eta\, \partial_0 \wedge \partial_1, \tag{4.9}$$

3) поднятие обратно в $d = 11$. Как и ожидалось, это отражает тот факт, что $P \wedge P \wedge P$ деформация просто отвечает 11–ти мерному обобщению TsT [59, 60].

4.2 $P \wedge P \wedge M$

Этот пример деформации Ω является полиномом 1–ой степени по x^a и отвечает неабелевой деформации. Используя коэффициенты со следующими симметриями $\rho^{ab,cd} = \rho^{[ab],[cd]}$, мы запишем Ω в виде

$$\Omega = \frac{1}{4}\,\rho^{ab,cd} P_a \wedge P_b \wedge M_{cd} = \frac{4}{R^3}\,\rho_a x^a\, \partial_0 \wedge \partial_1 \wedge \partial_2, \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{R^3}{4}(\rho^{02,01} - \rho^{01,02}), \\ \rho_1 &= \frac{R^3}{4}(\rho^{01,12} - \rho^{12,01}), \\ \rho_2 &= \frac{R^3}{4}(\rho^{02,12} - \rho^{12,02}), \end{aligned} \tag{4.11}$$

эти численные коэффициенты мы ввели для удобства и простоты записи. Как легко видеть, нет ни одного генератора который коммутировал бы со всеми остальными, что означает, что деформация неабелева. Тензор деформации выглядит следующим образом

$$W = -\frac{R}{4z^4}\,\rho_a x^a\, dz, \quad K = \frac{z^3}{z^3 - \rho_a x^a}, \tag{4.12}$$

и в итоге деформированный фон записывается как

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{4}\left(z^3-\rho_a x^a\right)^{-\frac{2}{3}}\left[-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2\right]+\frac{R^2}{z}\left(z^3-\rho_a x^a\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4z^2}dz^2+d\Omega^2_{(7)}\right), \\ F &= -\frac{3R}{8}\left(\frac{Rz}{z^3-\rho_a x^a}\right)^2 dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dz. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Используя (3.19), мы можем убедиться, что построенная таким образом деформирмация дает снова решение 11–ти мерной супергравитации для произвольных значений констант ρ_a. В противоположность предыдущему Примеру 4.1($P\wedge P\wedge P$), Q-флакс имеет ненулевой след

$$2\partial_{[m}W_{n]}dx^m\wedge dx^n = -\frac{R^3}{4z^4}\rho_a dx^a\wedge dz \neq 0. \tag{4.14}$$

При редукции из ExFT записанной в Ω–фрейме в β–супергравитацию, ненулевой след ${Q_m}^{mkl}$ будет генерировать ненулевой след Q–флакса β–супергравитации. Последний, как известно из [61], отвечает вектору I обобщенной супергравитации. Таким образом редуцированный фон должен быть решением не обычной, а обобщенной супергравитации.

4.3 $D\wedge P\wedge P$

Другой пример три–векторной деформации первого порядка по x^m — это деформация составленная из одного генератора дилатации D и генераторов импульса. Для конформной алгебры AdS_4 существует три возможных пары P_a, P_b. Запишем произвольный три-вектор $D\wedge P\wedge P$ следующим образом

$$\Omega = \frac{2}{R^3}\,\rho_a\epsilon^{abc}\,D\wedge P_b\wedge P_c = \frac{4}{R^3}\,\rho_a x^a\,\partial_0\wedge\partial_1\wedge\partial_2 - \frac{2}{R^3}\,z\,\rho_a\epsilon^{abc}\,\partial_b\wedge\partial_c\wedge\partial_z, \tag{4.15}$$

где ρ_a отвечает трем независимым компонентам ρ-матрицы. Используя такую параметризацию для Ω, мы можем выразить тензор деформации и префактор

$$W = \frac{R}{4z^3}\,\rho_a\left(dx^a - x^a\,\frac{dz}{z}\right),\quad K = \left(1+\frac{\rho_a x^a}{z^3}-\frac{\rho^2}{4z^4}\right)^{-1}, \tag{4.16}$$

где мы воспользовались следующим определением $\rho^2=\rho_a\rho_b\eta^{ab}$. Таким образом деформированный фон имеет следующий вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2}{4}\left(z^3+\rho_a x^a-\frac{\rho^2}{4z}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+\left(1+\frac{\rho_a x^a}{z^3}\right)dz^2-\frac{1}{z^2}\rho_a dx^a dz\right] \\ &\quad+\frac{R^2}{z}\left(z^3+\rho_a x^a-\frac{\rho^2}{4z}\right)^{\frac{1}{3}}d\Omega^2_{(7)}, \\ F &= -\frac{3R^3z^2}{8}\left(1+\frac{\rho^2}{12z^4}\right)\left(z^3+\rho_a x^a-\frac{\rho^2}{4z}\right)^{-2}dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dz. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Путем проверки (3.19) или уравнений $d=11$ супергравитации мы можем убедиться в том, что такой фон является решением при условии, что параметры ρ_a образуют нулевой вектор, а именно

$$\rho^2 = -\rho_0^2+\rho_1^2+\rho_2^2 = 0. \tag{4.18}$$

Это уравнение напоминает деформацию Янга–Бакстера в 10–ти измерениях с параметром $\Theta = \tau^a M_{ab} \wedge P^b$, которая приводила к аналогичному требованию τ — светоподобный вектор [19]. Механизм появления условия (4.18) абсолютно аналогичен тому, как появляется уравнение Янга-Бакстера в $d = 10$ супергравитации. После простых алгебраических преобразований фактор ρ^2 выделяется общим множителем из всех уравнений движения (3.19). Можно предположить, что условие (4.18) является простым примером обобщенного уравнения Янга–Бакстера, примененного к три–вектору (4.15).

Аналогично случаю $P \wedge P \wedge M$, этот фон является примером деформации с нулевым R–флаксом, но с ненулевым следом Q–флакса. Выражение для последнего

$$2\partial_{[m}W_{n]}dx^m \wedge dx^n = -\frac{R}{z^4}\rho_a dx^a \wedge dz \neq 0. \tag{4.19}$$

Применяя рассуждения аналогичные Пункту 4.2, мы приходим к выводу, что фон, деформированный таким образом, не может быть редуцирован в решение обычной $d = 10$ супергравитации. Более того, так как три вектор Ω неабелев, то $P \wedge P \wedge M$ и $D \wedge P \wedge P$ деформации не могут быть представлены в форме $\Omega = \partial_* \wedge \beta$. Таким образом, обе представленные деформации являются чисто 11–ти мерными деформациями и не могут бать получены в 10-ти мерном случае.

Важным вопросом остается то, какую часть суперсимметрии сохраняют три-векторные деформации. Заметим, что лишь половина спиноров Киллинга пространства AdS инвариантна относительно производной Ли [62, 63] по отношению к сдвигам, $\mathcal{L}_{P_i}\epsilon = 0$. Мы ожидаем, что по этой причине $P \wedge P \wedge P$ и $P \wedge P \wedge M$ деформированные решения, представленные нами, будут сохранять только половину суперсимметрий. Кроме того, дилатации нарушают все спиноры Киллинга AdS$_4$, $\mathcal{L}_D\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon$, что предположительно говорит о том, что $D \wedge P \wedge P$ деформированное решение нарушает все суперсимметрии. Сохранение суперсимметрий в случае два–векторных деформаций было объектом недавних исследований [64, 65, 66], в которых было построено выражение для спиноров Киллинга после деформации в терминах два-векторного параметра Θ. Обощение этого подхода на три-векторные деформации остается интересной задачей для дальнейшего исследования.

4.4 $D \wedge K \wedge K$

Внешний автоморфизм конформной алгебры

$$P_a \longleftrightarrow K_a, \quad D \longleftrightarrow -D \tag{4.20}$$

может быть реализован геометрически — путем инверсии, которая является изометрией пространства AdS

$$x^a \longrightarrow \frac{x^a}{x^2 + z^2}, \quad z \longrightarrow \frac{z}{x^2 + z^2}. \tag{4.21}$$

Применяя данное отображение к $D \wedge P \wedge P$-деформированному фону (4.17), мы получим фон с деформацией $\Omega \sim D \wedge K \wedge K$. Можно предположить, что из–за геометрической симметрии, описанной выше, полученный $D \wedge K \wedge K$-деформированный фон также будет решением. Отметим, что в данном случае три–векторы деформаций связаны соотношением,

$$D \wedge K_a \wedge K_b = (x^2 + z^2)^2\, D \wedge P_a \wedge P_b. \tag{4.22}$$

Однако прямая проверка показывает, что уже второе уравнение в (3.19), требующее $\nabla_m V^m e^{-7\phi}$ = const, не выполняется для $D \wedge K \wedge K$–деформированного фона. Такой нетривиальный результат требует детального рассмотрения, для чего необходимо рассматривать уравнения в смешанном $(C - \Omega)$–фрейме.

4.5 Деформации 2–ого порядка по x^a

Следуя описанной выше процедуре, также были рассмотрены деформации 2-ого порядка по x^a, а именно $P \wedge P \wedge K$, $P \wedge M \wedge M$, $P \wedge D \wedge M$, которые не привели к решениям супергравитации.

5 Заключение

В данной работе мы построили вложение 7+4 супергравитации в SL(5) ExFT. Далее мы рассмотрели редукцию SL(5) ExFT для описания фонов вида $M_4 \times M_7$ и сконструировали для нее обобщенную деформацию Янга–Бакстера. Затем, этот формализм был применен к решению 11-ти мерной супергравитации $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, что обобщает результат [54] на случай неабелевых деформаций, и предъявили две новые неабелевы неунимодулярные три-векторные деформации $\Omega \sim P \wedge P \wedge M$ и $\Omega \sim D \wedge P \wedge P$ (где D, P_a, M_{ab} генераторы симметрий AdS_4), приводящие к новым решениям супергравитации. Обе деформации неабелевы в том смысле, что их три-вектор не может быть записан в виде $\Omega = \partial_* \wedge \beta$, где ∂_* коммутирует со всеми β. Деформированные решения не могут быть получены путем редукции в 10 измерений, два-векторной деформации и поднятия обратно в $d = 11$, так как нет явного направления вдоль которого можно было бы осуществить редукцию [60].

6 *Обсуждение

Описанная в работе процедура может быть использована для дальнейшего изучения неабелевых деформаций $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, а также деформаций сферы в $\mathrm{AdS}_7 \times \mathbb{S}^4$. Отметим, что алгебра изометрий сферы может сильно ограничить деформации. Действительно, все обнаруженные деформации решений $d = 10$ супергравитации либо абелевы, либо так называемого жорданова типа. Последнее означает, что генераторы, выбранные для построения два–векторной деформации, принадлежат брелевской подалгебре полной алгебры изометрий. Поэтому три векторные деформации $D \wedge P \wedge P$ и $M \wedge P \wedge P$, обсуждаемые в этой работе, могут быть отнесены к три-векторным деформациям обобщенного жорданова типа. Вопрос, который нас интригует: *Отвечают ли такие деформации решениям некоторого обобщенного уравнения Янга-Бакстера?* На основании имеющихся примеров для $d = 10$ и $d = 11$ и из анализа уравнений движения, мы ожидаем, что такие уравнения на деформации должны быть квадратичными по ρ^{abc}. Путем правильного выбора базиса в алгебре, такое уравнение в общем виде может быть записано в форме $\rho^I \rho^J \kappa_{IJ} = 0$, где κ_{IJ} некоторый инвариантный тензор и I, J мультииндексы, отвечающие выбранному базису. В приведенных нами примерах, борелевская подалгебра состоит из генераторов P_0, P_1, P_2 с группой симметрии $SO(1,2)$ и инвариантный тензор — это просто метрика Минковского η_{ab}. Это может служить мотивацией появления уравнения (4.18). Для $\mathrm{SO}(d+1)$, являющейся группой симметрий $\mathbb{S}^d$ с евклидовой метрикой δ_{IJ} в качестве инвариантного тензора, мы ожидаем уравнения вида $\sum(\rho^I)^2 = 0$, имеющие лишь тривиальные решения, что уже было описано в [54], где были найдены нетривиальные неабелевы два–векторные деформации плоского Евклидова пространства.

Одной из мотиваций построения конкретных примеров неабелевых три–векторных деформаций была проверка на них предполагаемых обобщенных уравнений Янга–Бакстера, одно из которых было описано в [54] и еще одно было построено нами (Приложение B.2) по аналогии с построением классического уравнения Янга–Бакстера (Приложение B.1). Которое, напомним, оказалось уравнением на параметр деформации в $d = 10$ (Введение 1.1), что было доказано в [19] при помощи формализма DFT и β–супергравитации. Это же условие получается из требования обнуления R–флакса. В [54] обнуление R–флакса $R^{m,nklp} = \Omega^{mq[n}\partial_q \Omega^{klp]}$ в ExFT было предложено в качестве условия на три–векторные деформации, генерирующие новые решения. С использованием три–киллингового анзаца для Ω (4.4), условие $R = 0$ переходит в

$$6\rho^{\alpha\beta[\gamma}\rho^{\delta\epsilon|\zeta|}f_{\alpha\zeta}{}^{\eta]} + \rho^{[\gamma\delta\epsilon}\rho^{\eta]\alpha\zeta}f_{\alpha\zeta}{}^{\beta} = 0. \tag{6.1}$$

Явная проверка показывает, что для $P \wedge P \wedge M$ и $D \wedge P \wedge P$ деформаций R–флакс исчезает.

Однако, как минимум для $D \wedge P \wedge P$ этого не достаточно для того, чтобы деформированное решение было решением уравнений движения $d = 11$ супергравитации, следовательно требуется более сильное условие на $\rho^{\alpha\beta\gamma}$ (4.18).

Другим кандидатом в уравнения на деформации было уравнение Френкеля-Мура-Замолодчикова, построенное нами в удобном для нас виде (B.10) в Приложении B.2. Особенностью данного уравнения является появление в нем антикоммутаторов генераторов алгебры симметрий, что затрудняет работу с ним в общем виде, в отличие от классических уравнений Янга–Бакстера. Более того, явная проверка уравнения (B.10) для $P \wedge P \wedge M$ и $D \wedge P \wedge P$ показала, что оно не выполняется.

Основываясь на обобщении пуассон-лиевой T-дуальности до U-дуальности в [67, 68] было получено алгебраическое условие на $\rho^{\alpha\beta\gamma}$ и высказано предположение, что оно является достаточным для того, чтобы деформированное решение было решением супергравитации. Представленные нами неабелевы деформации принадлежат неунимодулярному классу, что означает $\partial_m \Omega^{mnk} \neq 0$, поэтому соответствующие $\rho^{\alpha\beta\gamma}$ не могут решать уравнения, предложенные в работе [67], так как последняя предполгает унимодулярность. Поэтому естественно ожидать, что алгебраические условия на три векторные компоненты $\rho^{\alpha\beta\gamma}$, такие как (4.18), должны учитывать неунимодулярность. Исключительная дринфельдовская алгебра, построенная в [69] включает в себя неунимодулярные члены и может привести к правильному обобщению уравнений Янга–Бакстера. Отметим, что в то время как в случае $d = 10$ и унимодулярные, и неунимодуряные деформации удовлетворяют одному общему классическому уравнению Янга–Бакстера, в M–теории это по всей видимости нарушается. Более того, условие обнуления R–флакса, равносильное классическому уравнению Янга–Бакстера в $d = 10$, оказывается лишь частью уравнений, полученных в [67].

Таким образом, поиск алгебраического уравнения на $\rho^{\alpha\beta\gamma}$, обобщающего классические уравнения Янга–Бакстера, является интересным направлением для дальнейшего исследования. С алгебраической точки зрения естественно ожидать, что классические уравнения Янга–Бакстера, описывающие рассеяние частиц в $1 + 1$ измерениях, должны стать уравнением тетраэдра, описывающим рассеяние струн в $d = 1 + 2$ [70, 71]. В зависимости от соглашений, уравнения тетраэдра могут быть записаны как уравнение Замолодчикова или Френкеля–Мура. Вывод квази–классических уравнения тетраэдра в форме, не зависящей от представления, и сравнение их с уравнениями [67] является открытой проблемой.

Обнуление же R–флакса является более алгебраически очевидным. Следуя [72, 73], мы замечаем, что рассмотрение динамики M2–браны приводит к появлению параметра некоммутативности, описываемого три–вектором Ω^{mnk}, и 3–скобки Намбу–Пуассона

$$\{x^m, x^n, x^k\} = \Omega^{mnk}. \tag{6.2}$$

Фундаментальное тождество для такой скобки записывается как

$$\begin{aligned}\{\{x^i, x^j, x^k\}, x^l, x^m\} - \{\{x^i, x^l, x^m\}, x^j, x^k\}& \\ - \{x^i, \{x^j, x^l, x^m\}, x^k\} - \{x^i, x^j, \{x^k, x^l, x^m\}\} &= 0,\end{aligned} \tag{6.3}$$

что совпадает с условием замкнутости исключительной дринфельдовской алгебры [69], и условием обнуления R–флакса в SL(5) ExFT. Используя $W_m = \frac{1}{3!}\varepsilon_{mnkl}\Omega^{nkl}$, фундаментальное тождество оказывается пропорционально $\varepsilon^{mnkl} W_{[n}\partial_k W_{l]} = 0$, что буквально дает $R^{m,ijkl}\varepsilon_{ijkl} = 0$. Из этого наблюдения и имеющихся примеров можно предположить, что все три–векторные деформации M–теории должны иметь нулевой R–флакс.

В этой работе мы обсуждали деформации решений $d = 11$ супергравитации. Другой интересный вопрос — рассмотреть эти деформации с голографической точки зрения. Теория, голографически дуальная M–теории на фоне $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7/\mathbb{Z}_2$, это суперконформная теория ABJM [74], некоторые из деформаций которой должны отвечать представленным нами деформациям со стороны гравитации. Абелева деформация $P \wedge P \wedge P$, рассмотренная нами, это три–векторный аналог деформации Малдасены-Руссо $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ [75]. На языке теории поля она представляется, как некоммутативная калибровочная теория, умножение в которой может быть получено из бранной интерпретации [76], или из рассмотрения дринфельдовского твиста для структуры алгебры Хопфа соответствющей тензорной алгебры, как в [77]. В общем, для любой три–векторной деформации вдоль изометрий AdS_4 следует ожидать, что в теории ABJM появятся некоммутативные структуры, определяемые стандартным произведением — звездой Мояла [78]. Более интересны неабелевы деформации $D \wedge P \wedge P$ и $M \wedge P \wedge P$, которые могут рассматриваться, как три–векторные обобщения жордановых деформаций Янга–Бакстера, как обуждалось анее. Для того чтобы понять, чему соответствуют эти деформации со стороны калибровочной теории, необходимо расширить подход, описанный в [77], на случай так называемого "исключительного дринфельдовского твиста", который определяет твист матрицы ρ^{abc} такой, что уравнения тетраэдра будут выполнены. Нам не известно о существовании таких структур и рассматривались ли они когда-либо в математической литературе.

В качестве последнего замечания отметим, что в отличие от [20], в текущей работе мы не вывели явных уравнений на тензор деформации Ω^{mnk} из ExFT, и работали в C-фрейме. Явное уравнение на Ω кажется наиболее удобным и оптимальным для поиска алгебраических условий на параметр деформации $\rho^{\alpha\beta\gamma}$. С целью написания такого уравнения была предпринята попытка написать теорию в Ω–ковариантной форме (Приложение Г), аналогично тому как для $d = 10$ была написана β–супергравитация. При построении такой формы возникают технические трудности, требующие введения в развитый в Приложении Г формализм дополнительных структур, вроде негеометрического потенциала A_μ^{MN}. В качестве альтернативы, для получения явных уравнений на тензор деформации Ω^{mnk}, можно рассмотреть полную формулировку теории в смешанном $(C - \Omega)$–фрейме. Работа над этими проблемами ведется в настоящее время и их обсуждение мы оставим для дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю Мусаеву Эдварду Таваккуловичу и Бахматову Илье Владимировичу.

A Используемые обозначения и соглашения

В данной работе мы используем следующие обозначения и соглашения [42, 55]:

$$
\begin{array}{ll}
\hat{\mu}, \hat{\nu}, = 1 \dots 11 & \text{одиннадцатимерные, искривленные;} \\
\hat{\alpha}, \hat{\beta}, = 1 \dots 11 & \text{одиннадцатимерные, плоские;} \\
\mu, \nu, \rho, \dots = 1 \dots 7 & \text{семь внешних направлений, искривленных;} \\
\overline{\mu}, \overline{\nu}, \overline{\rho}, \dots = 1 \dots 7 & \text{семь внешних направлений, плоских;} \\
m, n, k, l, \dots = 1, \dots, 4 & \text{четыре внутренних направления, искривленных;} \\
\overline{m}, \overline{n}, \overline{k}, \overline{l}, \dots = 1, \dots, 4 & \text{четыре внутренних направления, плоских;} \\
M, N, K, L, \dots = 1, \dots, 5 & \text{фундаментальные индексы ExFT } (\mathbf{5}\ \mathrm{SL}(5))\text{, искривленные;} \\
A, B, C, D, \dots = 1, \dots, 5 & \text{фундаментальные индексы ExFT } (\mathbf{5}\ \mathrm{SL}(5))\text{, плоские;} \\
\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \dots = 1, \dots, 10 & \text{индексы обобщенного пространства ExFT } (\mathbf{10}\ \mathrm{SL}(5))\text{;} \\
\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, N & \text{индексы нумерующие вектора Киллинга;} \\
a, b, c, d, \dots = 0, \dots, 2 & \text{первые три направления } \mathrm{AdS}_4 \text{ в Пуанкаре патче.}
\end{array} \tag{A.1}
$$

Обобщенное пространство SL(5) ExFT параметризуется координатами $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$. Однако на практике оказывается более удобным записывать представления через фундаментальные **5** индексы SL(5) $\mathbb{X}^{MN} = -\mathbb{X}^{NM}$. Правила перехода от индексов представления **10** к антисимметричной паре индексов представления **5** осуществляется по следующим правилам:

$$
\begin{aligned}
T^{\mathcal{M}} &\to T^{MN}, \qquad \text{для любого тензора,} \\
U^{\mathcal{M}} V_{\mathcal{M}} &\to \frac{1}{2} U^{MN} V_{MN}, \\
\delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}} &\to 2\delta^{MN}_{KL}, \qquad \text{только для символа Кронекера.}
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

Здесь во второй строчке введен множитель $1/2$ для того, чтобы не учитывать одинаковые компоненты дважды. Для символа Кронекера в третьей строчке введена дополнительная двойка, чтобы по вышеописанным правилам $\delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}(2\delta^{MN}_{MN}) = \delta^{MN}_{MN} = 10$, как это и должно быть.

Полностью антисимметричный тензор в n измерениях определяется как:

$$
\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = g^{1/2} \epsilon_{i_1 \dots i_n}, \qquad \epsilon_{1 \dots n} = 1. \tag{A.3}
$$

Тензор кривизны определяется как:

$$
\begin{aligned}
[\nabla_m, \nabla_n] V^k &= R_{mn}{}^k{}_l V^l, \\
R_{mn}{}^k{}_l &= \partial_m \Gamma_{nl}{}^k - \partial_n \Gamma_{ml}{}^k + \Gamma_{mq}{}^k \Gamma_{nl}{}^q - \Gamma^k_{nq} \Gamma^q_{ml}, \\
R_{mn} &= R_{km}{}^k{}_n.
\end{aligned} \tag{A.4}
$$

В наших обозначениях нетривиальные коммутаторы алгебры AdS:

$$
\begin{aligned}
[D, P_a] &= P_a, & [D, K_a] &= -K_a, \\
[M_{ab}, P_c] &= -2\eta_{c[a} P_{b]}, & [M_{ab}, K_c] &= -2\eta_{c[a} K_{b]}, \\
[P_a, K_b] &= 2M_{ab} + 2\eta_{ab} D, & [M_{ab}, M_{cd}] &= -2\eta_{c[a} M_{b]d} + 2\eta_{d[a} M_{b]c}.
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

Что может быть переписано через коммутационные соотношения для алгебры so(2,3) при помощи переобозначений:

$$
\begin{aligned}
J_{ab} &= i M_{ab}, & J_{0*} &= i D, \\
J_{*a} &= \frac{i}{2}(P_a - K_a), & J_{0a} &= \frac{i}{2}(P_a + K_a).
\end{aligned} \tag{A.6}
$$

Б Алгебра SL(5)

Здесь мы приведем основные сведения об алгебре SL(5), как это было сделано в [42]. Генераторы группы SL(5) в фундаментальном представлении и представлении **10**

$$\begin{aligned}(t^I_J)^M_N &= \delta^M_J\delta^I_N + \frac{1}{5}\delta^M_N\delta^I_J,\\ (t^I_J)^{MN}{}_{KL} &= 4(t^I_J)^{[M}_{[K}\delta^{N]}_{L]}.\end{aligned} \tag{Б.1}$$

Они являются бесследовыми и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[t^M_N, t^K_L] = \delta^M_L t^K_N - \delta^K_N t^M_L. \tag{Б.2}$$

С использованием соглашений Приложения А

$$(t^I_J t^K_L)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}} = (t^I_J)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{K}}(t^K_L)^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2}(t^I_J)^{\mathcal{M}}{}_{PQ}(t^K_L)^{PQ}{}_{\mathcal{N}}. \tag{Б.3}$$

Проектор на представление **10** SL(5)

$$\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{3}(t^I_J)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}(t^J_I)^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}}, \tag{Б.4}$$

где $t^I_J t^J_I$ свернуты через символ Кронекера.

Проектор обладает свойством

$$\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}}\mathbb{P}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{4}\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{KL}{}_{IJ}\mathbb{P}^{IJ}{}_{KL}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}} = \mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}}, \tag{Б.5}$$

что говорит о правильном выборе коэффициента в (Б.4) и дает верное соотношение

$$\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{M}} = \frac{1}{4}\mathbb{P}^{MN}{}_{KL}{}^{KL}{}_{MN} = 24 = dim(adj), \tag{Б.6}$$

Прямая проверка показывает, что Y-тензор для SL(5), полученный в [36], выражается через проектор

$$\epsilon^{M\mathcal{M}\mathcal{K}}\epsilon_{M\mathcal{N}\mathcal{L}} = Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -3\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}} + \frac{1}{5}\delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{N}}\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}} + \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{N}}, \tag{Б.7}$$

где $\epsilon^{M\mathcal{M}\mathcal{K}}$ обозначает 5-мерный абсолютно антисимметричный тензор ϵ^{MNKLP}.

В обозначениях Приложения А (Б.7) может быть переписано как

$$\epsilon^{TMNKL}\epsilon_{TPQRS} = -3\mathbb{P}^{MN}{}_{PQ}{}^{KL}{}_{RS} + \frac{4}{5}\delta^{MN}_{PQ}\delta^{KL}_{RS} + 4\delta^{MN}_{RS}\delta^{KL}_{PQ}. \tag{Б.8}$$

B Уравнения интергрируемости

Используемые в данном разделе индексы $\alpha, \beta, \gamma, ...$ являются индексами нумерующими генераторы некоторой алгебры. В применении к деформациям супергравитации они становятся индексами, нумерующими вектора Киллинга.

B.1 Уравнения Янга-Бакстера

Рассмотрим квантовое уравнение Янга-Бакстера (уравнения треугольника) [79, 80]

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{B.1}$$

R_{ij} - эндоморфизм на $V \otimes V \otimes V$, где V - некоторое пространство (R_{12} преобразует 1-ое, 2-ое, и не затрагивает 3-е V, остальные R_{ij} аналогично).

Из уравнения (B.1) получается классическое уравнение Янга-Бакстера (B.3), путем подстановки в него разложения (B.2) и рассмотрения первого порядка по ϵ

$$R_{ij} = \mathbb{1} + \epsilon\, r_{ij} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{B.2}$$

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \tag{B.3}$$

$r_{12} = r^{\alpha\beta} \cdot e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \mathbb{1}$ ($r^{\alpha\beta}$ полностью антисимметричны, для остальных $r_{...}$ выражение аналогично) элемент алгебры $A = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Рассмотрим для примера один из коммутаторов (остальные получаются аналогично)

$$[r_{12}, r_{13}] = r^{\alpha_1\beta_1} r^{\alpha_1\beta_1} \cdot [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] \otimes e_{\beta_1} \otimes e_{\beta_2}. \tag{B.4}$$

Используя (B.9) и алгебру ($[e_\alpha, e_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma$) мы получаем из (B.3)

$$r^{\alpha_1[\beta_1|} r^{\alpha_2|\beta_2} f_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\gamma]} = 0, \tag{B.5}$$

которое появляется в качестве условия на параметр деформации $\beta^{mn} = r^{\alpha\beta} k_\alpha^m k_\beta^n$ в 10-ти мерной супергравитации (1.4), для того чтобы деформированное решение оставалось решением.

B.2 Уравнения Френкеля-Мура-Замолодчикова

Теперь попробуем построить обобщение (B.5), ожидаемое в качестве условия на параметр деформации $\Omega^{mnk} = r^{\alpha\beta\gamma} k_\alpha^m k_\beta^n k_\gamma^k$ в 11-ти мерной супергравитации (4.4).

Обобщением (B.1) является уравнение Френкеля-Мура-Замолодчикова (уравнение тетраэдра) [81]

$$R_{123}R_{124}R_{134}R_{234} = R_{234}R_{134}R_{124}R_{123}. \tag{B.6}$$

R_{ijk} - эндоморфизм на $V \otimes V \otimes V \otimes V$, где V - некоторое пространство (R_{123} преобразует 1-ое, 2-ое и 3-е V, и не затрагивает 4-ое V, остальные R_{ijk} аналогично).

Мы можем рассмотреть классический предел

$$R_{ijk} = \mathbb{1} + \epsilon\, r_{ijk} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{B.7}$$

Первый нетривиальный порядок (B.6)

$$\epsilon^2 \cdot | \qquad [r_{123}, r_{124}] + [r_{123}, r_{134}] + [r_{123}, r_{234}] + [r_{124}, r_{134}] + [r_{124}, r_{234}] + [r_{134}, r_{234}] = 0. \tag{B.8}$$

$r_{123} = r^{\alpha\beta\gamma} \cdot e_\alpha \otimes e_\beta \otimes e_\gamma \otimes \mathbb{1}$ ($r^{\alpha\beta\gamma}$ полностью антисимметричны, для остальных $r_{\dots}$ выражение аналогично) элемент алгебры $A = \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Рассмотрим для примера один из коммутаторов (остальные получаются аналогично)

$$\begin{aligned}
[r_{123}, r_{124}] = r^{\alpha_1\beta_1\gamma_1} r^{\alpha\beta\gamma} \cdot (e_{\alpha_1} e_\alpha \otimes e_{\beta_1} e_\beta - e_\alpha e_{\alpha_1} \otimes e_\beta e_{\beta_1}) \otimes e_{\gamma_1} \otimes e_\gamma = \\
= \frac{1}{2} r^{\alpha_1\beta_1\gamma_1} r^{\alpha\beta\gamma} \cdot ([e_{\alpha_1}, e_\alpha] \otimes \{e_{\beta_1}, e_\beta\} + \{e_\alpha, e_{\alpha_1}\} \otimes [e_{\beta_1}, e_\beta]) \otimes e_{\gamma_1} \otimes e_\gamma.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Используя (B.9) и алгебру ($[e_\alpha, e_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma e_\gamma$) мы получаем из (B.8)

$$\begin{aligned}
&\{e_{\alpha_1}, e_\alpha\} \otimes e_{\gamma_1} \otimes e_\delta \otimes e_\gamma \cdot (r^{\alpha_1\beta_1[\delta|} r^{\alpha\beta|\gamma|} f_{\beta_1\beta}{}^{|\gamma_1]}) + \\
&e_{\delta_1} \otimes \{e_{\alpha_1}, e_\alpha\} \otimes e_\delta \otimes e_\gamma \cdot (r^{\alpha_1\beta_1\delta} r^{\alpha\beta\gamma} f_{\beta_1\beta}{}^{\delta_1} + r^{\alpha_1\beta_1\delta_1} r^{\alpha\beta\gamma} f_{\beta_1\beta}{}^{\delta} - r^{\alpha_1\beta_1\delta_1} r^{\alpha\beta\delta} f_{\beta_1\beta}{}^{\gamma}) + \\
&e_{\delta_1} \otimes e_{\gamma_1} \otimes \{e_{\alpha_1}, e_\alpha\} \otimes e_\gamma \cdot (-r^{\alpha_1\beta_1\gamma_1} r^{\alpha\beta\gamma} f_{\beta_1\beta}{}^{\delta_1} + r^{\alpha_1\beta_1\delta_1} r^{\alpha\beta\gamma} f_{\beta_1\beta}{}^{\gamma_1} + r^{\alpha_1\beta_1\delta_1} r^{\alpha\beta\gamma_1} f_{\beta_1\beta}{}^{\gamma}) + \\
&e_{\delta_1} \otimes e_{\gamma_1} \otimes e_\delta \otimes \{e_{\alpha_1}, e_\alpha\} \cdot (r^{\alpha_1\beta_1[\gamma_1|} r^{\alpha\beta|\delta|} f_{\beta_1\beta}{}^{|\delta_1]}) = 0.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

(B.10) являются буквальным обобщением (B.5). В отличие от (B.5), уравнения (B.10) содержат антикоммутаторы генераторов алгебры, которые в общем случае не принадлежат ей. Данное обстоятельство не позволяет работать с этими уравнениями, также, как это было сделано для (B.5).

Тем не менее, уравнения (B.10) могут быть проверены на конкретных примерах деформаций, построенных в Разделе 4, которые, как мы выяснили, решают уравнения 11-ти мерной супергравитации. Прямая проверка показывает, что уравнения (B.10) не выполняются для этих примеров, что говорит о том, что они не являются общими уравнениями на параметр деформации.

Г Ковариантная формулировка ExFT в Ω–фрейме

Здесь мы приведем частичное построение $\Omega-$супергравитации (на скалярном уровне), аналогично тому как была построена β-супергравитация [21], и обозначим возникающие проблемы при построении тензорной теории.

Г.1 Ковариантная производная для скаляров

Рассмотри обобщенную метрику

$$m_{MN} = |\tilde{h}|^{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} |\tilde{h}|^{-\frac{1}{2}}(\tilde{h}_{mn} \pm W_m W_n) & \mp W_m \\ \\ \mp W_n & \pm|\tilde{h}|^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, \tag{Г.1}$$

преобразующуюся при обобщенных диффеоморфизмах, как

$$\delta_{\Lambda^{KL}} m_{MN} = \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL} m_{MN} + (\partial_{MK}\Lambda^{LK})m_{LN} + (\partial_{NK}\Lambda^{LK})m_{ML} - \frac{2}{5}(\partial_{KL}\Lambda^{KL})m_{MN}. \tag{Г.2}$$

При преобразованиях $\Lambda^{5n} = \Lambda^n$ ее компоненты изменяются как

$$\delta_{\Lambda^k} m_{55} = \Lambda^k\partial_k m_{55} + (\partial_k\Lambda^k)m_{55} + (\partial_k\Lambda^k)m_{55} - \frac{4}{5}(\partial_k\Lambda^k)m_{55} = \Lambda^k\partial_k m_{55} + \frac{6}{5}m_{55}\partial_k\Lambda^k. \tag{Г.3}$$

$$m_{55} = \pm|\tilde{h}|^{\frac{3}{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta_{\Lambda^k}|\tilde{h}| = \Lambda^k\partial_k|\tilde{h}| + 2|\tilde{h}|\partial_k\Lambda^k. \tag{Г.4}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\Lambda^{5l}} m_{5n} = \Lambda^{5l}\partial_{5l} m_{5n} + (\partial_{5k}\Lambda^{5k})m_{5n} + (\partial_{n5}\Lambda^{l5})m_{5l} - \frac{4}{5}(\partial_{5l}\Lambda^{5l})m_{5n} + (\partial_{nk}\Lambda^{5k})m_{55} = \\ = \Lambda^l\partial_l m_{5n} + (\partial_n\Lambda^l)m_{5l} + \frac{1}{5}(\partial_l\Lambda^l)m_{5n} + (\partial_{nk}\Lambda^k)m_{55},\end{aligned} \tag{Г.5}$$

$$m_{55} = \pm|\tilde{h}|^{\frac{3}{5}},\ m_{5n} = \mp|\tilde{h}|^{\frac{1}{10}}W_n,\ \mathcal{L}_{\Lambda^k}|\tilde{h}| = \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad \delta_{\Lambda^k}W_n = \Lambda^k\partial_k W_n + W_l\partial_n\Lambda^l - |\tilde{h}|^{\frac{1}{2}}\partial_{nk}\Lambda^k. \tag{Г.6}$$

Расммотрим скаляр Φ

$$\delta_{\Lambda^k}\Phi = \Lambda^k\partial_k\Phi, \tag{Г.7}$$

таким образом, его производная $\partial_{mn}\Phi$ преобразуется следующим способом

$$\delta_{\Lambda^k}\partial_{mn}\Phi = \Lambda^k\partial_k\partial_{mn}\Phi + (\partial_k\Phi)\partial_{mn}\Lambda^k. \tag{Г.8}$$

Запишем условие проекции и следствия из него, которые пригодятся нам в дальнейшем

$$\epsilon^{PMNKL}\partial_{MN}\otimes\partial_{KL} = 0, \tag{Г.9}$$

$$\partial_k A\partial_{mn}B = -2\partial_{[m}A\partial_{n]k}B - 2\partial_{k[m}A\partial_{n]}B - \partial_{mn}A\partial_k B, \tag{Г.10}$$

подставляя (Г.10) в (Г.8) получим

$$\delta_{\Lambda^k}\partial_{mn}\Phi = \underbrace{\Lambda^k\partial_k\partial_{mn}\Phi + \partial_{mk}\Phi\partial_n\Lambda^k + \partial_{kn}\Phi\partial_m\Lambda^k - \partial_{mn}\Phi\partial_k\Lambda^k}_{\mathcal{L}_{\Lambda^k}\partial_{mn}\Phi} - 2\partial_{[m}\Phi\partial_{n]k}\Lambda^k. \tag{Г.11}$$

Теперь определим производную

$$\partial^{mn} = \pm\frac{1}{2}\epsilon^{mnkl}\partial_{kl}. \tag{Г.12}$$

Используя ее мы можем написать еще одно полезное следствие уравнения проекции (Г.9)

$$\partial_k A \partial^{kn} B = -\partial^{kn} A \partial_k B. \tag{Г.13}$$

Применяя (Г.10), (Г.13), (Г.11) и закон преобразования

$$\delta_{\Lambda^k}\epsilon^{mnkl} = 0 \tag{Г.14}$$

мы получим

$$\delta_{\Lambda^k}\partial^{mn}\Phi = \underbrace{\Lambda^k\partial_k\partial^{mn}\Phi - \partial^{mk}\Phi\partial_k\Lambda^n - \partial^{kn}\Phi\partial_k\Lambda^m}_{\mathcal{L}_{\Lambda^k}\partial^{mn}\Phi} + 3(\partial_p\Phi)\partial^{[mn}\Lambda^{p]}. \tag{Г.15}$$

Подставляя в (Г.6) выражение для W_n

$$W_n = \frac{1}{6}|\tilde{h}|^{\frac{1}{2}}\epsilon_{mnkl}\Omega^{nkl}, \tag{Г.16}$$

с использованием (Г.4), (Г.10), (Г.13), (Г.14), а также $\varepsilon^{i_1\dots i_q j_1\dots j_{(n-q)}}\varepsilon_{i_1\dots i_q k_1\dots k_{(n-q)}} = sgn[\tilde{h}_{mn}]q!(n-q)!\delta^{[j_1}_{k_1}\dots\delta^{j_{n-q}]}_{k_{n-q}}$ и свойства $[mnklp]=0$ (так как индексы пробегают всего 4 значения), мы найдем

$$\delta_{\Lambda^k}\Omega^{mnk} = \underbrace{\Lambda^k\partial_k\Omega^{mnk} - \Omega^{pnk}\partial_p\Lambda^m - \Omega^{mpk}\partial_p\Lambda^n - \Omega^{mnp}\partial_p\Lambda^k}_{\mathcal{L}_{\Lambda^k}\Omega^{mnk}} - 3\partial^{[mn}\Lambda^{k]}. \tag{Г.17}$$

Наконец мы можем определить новую ковариантную производную (ковариантную для скаляров)

$$D^{mn} = \partial^{mn} + \Omega^{mnk}\partial_k, \tag{Г.18}$$

такую, что

$$\delta_{\Lambda^k}D^{mn}\Phi = \mathcal{L}_{\Lambda^k}D\partial^{mn}\Phi. \tag{Г.19}$$

Г.2 Q- и R-флаксы

Используя явное выражение для новой ковариантной производной (Г.18), мы можем найти:

$$[D^{mn}, D^{kl}] = R^{[m,n]klq}\partial_q - R^{[k,l]mnq}\partial_q - Q_p{}^{mn[k}D^{l]p} + Q_p{}^{kl[m}D^{n]p}, \tag{Г.20}$$

где мы определили $Q-$ и $R-$флаксы, как

$$\begin{aligned} R^{m,nklq} &= 4D^{m,[n}\Omega^{klq]} \\ Q_q{}^{klm} &= \partial_q\Omega^{klm}. \end{aligned} \tag{Г.21}$$

Из определения (Г.21) и (Г.17), с использованием уравнения проекции и его следствий (Г.9), (Г.10), (Г.13), и $[mnklp]=0$, можно получить формулы для преобразований $Q-$ и $R-$флаксов

$$\begin{aligned} \Delta_{\Lambda^k}R^{m,nklq} &= (\delta_{\Lambda^p} - \mathcal{L}_{\Lambda^p})R^{m,nklq} = 0, \\ \Delta_{\Lambda^k}Q_q{}^{klm} &= (\delta_{\Lambda^p} - \mathcal{L}_{\Lambda^p})Q_q{}^{klm} = 3D^{[kn}\partial_q L^{m]}. \end{aligned} \tag{Г.22}$$

Здесь производная Ли $Q-$ и $R-$флаксов - стандартные производные Ли, без весовых членов. Отметим, что из (Г.22) следует, что R-флакс преобразуется как тензор.

Г.3 Ковариантная производная для тензорных полей

Теперь мы хотим построить ковариантную производную для тензорных полей. Определим ковариантную производную для вектора, как

$$\nabla^{mn}V^k = D^{mn}V^k - \Gamma^{mn}{}_p{}^k V^p = D^{mn}V^k + \tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k V^p - \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^{mn}{}_q{}^q V^k, \tag{Г.23}$$

$$\Gamma^{mn}{}_p{}^k = -\tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^{mn}{}_q{}^q \delta^k_p, \tag{Г.24}$$

обобщение на случай тензоров стандартное.

Требуя, что (Г.23) преобразуется как тензор (с весом $\frac{1}{2}$), и используя (Г.17), а также то, что V^m преобразуется как вектор с весом $\frac{1}{2}$ (что обясняет вес $\frac{1}{2}$ для (Г.23)):

$$\delta_{\Lambda^{KL}}V^M = \frac{1}{2}\Lambda^{KL}\partial_{KL}V^M + \frac{1}{4}V^M\partial_{KL}\Lambda^{KL} + V^P\partial_{NP}\Lambda^{MN}, \tag{Г.25}$$

$$\delta_{\Lambda^p}V^k = \Lambda^p\partial_p V^k - V^p\partial_p\Lambda^k + \frac{1}{2}V^k\partial_p\Lambda^p, \tag{Г.26}$$

мы получаем, что $\Gamma^{mn}{}_p{}^k$ должно преобразовываться как

$$\Delta_{\Lambda^k}\Gamma^{mn}{}_p{}^k = (\delta_{\Lambda^p} - \mathcal{L}_{\Lambda^p})\Gamma^{mn}{}_p{}^k = -D^{mn}\partial_p L^k + \frac{1}{2}D^{mn}\partial_l L^l \delta^k_p, \tag{Г.27}$$

$$\Delta_{\Lambda^k}\tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k = (\delta_{\Lambda^p} - \mathcal{L}_{\Lambda^p})\Gamma^{mn}{}_p{}^k = D^{mn}\partial_p L^k, \tag{Г.28}$$

где в производной Ли для $\Gamma^{mn}{}_p{}^k$ нет веса. Отсюда также можно увидеть закон преобразования для $\mathcal{T}$-флакса (следа связности)

$$\mathcal{T}^{n,k} = \tilde{\Gamma}^{mn}{}_m{}^k, \tag{Г.29}$$

$$\Delta_{\Lambda^k}\mathcal{T}^{n,k} = (\delta_{\Lambda^p} - \mathcal{L}_{\Lambda^p})\mathcal{T}^{n,k} = \frac{1}{2}D^{mn}\partial_m L^k = 0, \tag{Г.30}$$

Для получения явного вида $\tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k$ мы используем уравнение

$$\nabla^{mn}\tilde{h}^{kl} = 0, \tag{Г.31}$$

из которого мы находим множество решений $\tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k$ с неопределенными коэффициентами. Для определения неизвестных коэффициентов мы требуем от полученной $\tilde{\Gamma}^{mn}{}_p{}^k$ закона преобразования (Г.28). Такого набора коээфициентов не находится, и по этой причине дальнейшее построение ковариантной теории становится невозможным

Мы предполагаем, что возникшие проблемы могут быть решены путем дополнительной добавки негеометрического потенциал A^{MN}_μ в ковариантную производную, что требует отдельного исследования.

Список литературы

[1] Iosif Bena, Joseph Polchinski, and Radu Roiban. Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring. *Phys. Rev.*, D69:046002, 2004. arXiv:hep-th/0305116, doi:10.1103/PhysRevD.69.046002.

[2] Ctirad Klimcik. Yang-Baxter sigma models and dS/AdS T duality. *JHEP*, 12:051, 2002. arXiv:hep-th/0210095, doi:10.1088/1126-6708/2002/12/051.

[3] Ctirad Klimcik. On integrability of the Yang-Baxter sigma-model. *J. Math. Phys.*, 50:043508, 2009. arXiv:0802.3518, doi:10.1063/1.3116242.

[4] Francois Delduc, Marc Magro, and Benoit Vicedo. On classical q-deformations of integrable sigma-models. *JHEP*, 11:192, 2013. arXiv:1308.3581, doi:10.1007/JHEP11(2013)192.

[5] Francois Delduc, Marc Magro, and Benoit Vicedo. An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action. *Phys. Rev. Lett.*, 112(5):051601, 2014. arXiv:1309.5850, doi:10.1103/PhysRevLett.112.051601.

[6] Gleb Arutyunov, Riccardo Borsato, and Sergey Frolov. S-matrix for strings on η-deformed AdS5 x S5. *JHEP*, 04:002, 2014. arXiv:1312.3542, doi:10.1007/JHEP04(2014)002.

[7] Gleb Arutyunov, Riccardo Borsato, and Sergey Frolov. Puzzles of η-deformed $\mathrm{AdS}_5\times \mathrm{S}^5$. *JHEP*, 12:049, 2015. arXiv:1507.04239, doi:10.1007/JHEP12(2015)049.

[8] G. Arutyunov, S. Frolov, B. Hoare, R. Roiban, and A. A. Tseytlin. Scale invariance of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring, T-duality and modified type II equations. *Nucl. Phys.*, B903:262–303, 2016. arXiv:1511.05795, doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.12.012.

[9] B. Hoare and A. A. Tseytlin. Type IIB supergravity solution for the T-dual of the η-deformed $\mathrm{AdS}_5\times \mathrm{S}^5$ superstring. *JHEP*, 10:060, 2015. arXiv:1508.01150, doi:10.1007/JHEP10(2015)060.

[10] B. Hoare and A. A. Tseytlin. On integrable deformations of superstring sigma models related to $AdS_n \times S^n$ supercosets. *Nucl. Phys.*, B897:448–478, 2015. arXiv:1504.07213, doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.06.001.

[11] Yuho Sakatani, Shozo Uehara, and Kentaroh Yoshida. Generalized gravity from modified DFT. *JHEP*, 04:123, 2017. arXiv:1611.05856, doi:10.1007/JHEP04(2017)123.

[12] Jun-ichi Sakamoto, Yuho Sakatani, and Kentaroh Yoshida. Weyl invariance for generalized supergravity backgrounds from the doubled formalism. *PTEP*, 2017(5):053B07, 2017. arXiv:1703.09213, doi:10.1093/ptep/ptx067.

[13] Jun-ichi Sakamoto. *Integrable deformations of string sigma models and generalized supergravity.* PhD thesis, Kyoto U., 2019. arXiv:1904.12827.

[14] L. Wulff and A. A. Tseytlin. Kappa-symmetry of superstring sigma model and generalized 10d supergravity equations. *JHEP*, 06:174, 2016. arXiv:1605.04884, doi:10.1007/JHEP06(2016)174.

[15] T. Araujo, I. Bakhmatov, E. Ó Colgáin, J. Sakamoto, M. M. Sheikh-Jabbari, and K. Yoshida. Yang-Baxter σ-models, conformal twists, and noncommutative Yang-Mills theory. *Phys. Rev.*, D95(10):105006, 2017. arXiv:1702.02861, doi:10.1103/PhysRevD.95.105006.

[16] Thiago Araujo, Ilya Bakhmatov, Eoin Ó Colgáin, Jun-ichi Sakamoto, Mohammad M. Sheikh-Jabbari, and Kentaroh Yoshida. Conformal twists, Yang–Baxter σ-models, holographic noncommutativity. *J. Phys.*, A51(23):235401, 2018. arXiv:1705.02063, doi:10.1088/1751-8121/aac195.

[17] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999. arXiv:hep-th/9908142, doi:10.1088/1126-6708/1999/09/032.

[18] I. Bakhmatov, Ö. Kelekci, E. Ó Colgáin, and M. M. Sheikh-Jabbari. Classical Yang-Baxter Equation from Supergravity. *Phys. Rev.*, D98(2):021901, 2018. arXiv:1710.06784, doi:10.1103/PhysRevD.98.021901.

[19] I. Bakhmatov, E. Ó Colgáin, M. M. Sheikh-Jabbari, and H. Yavartanoo. Yang-Baxter Deformations Beyond Coset Spaces (a slick way to do TsT). *JHEP*, 06:161, 2018. arXiv:1803.07498, doi:10.1007/JHEP06(2018)161.

[20] Ilya Bakhmatov and Edvard T. Musaev. Classical Yang-Baxter equation from β-supergravity. *JHEP*, 01:140, 2019. arXiv:1811.09056, doi:10.1007/JHEP01(2019)140.

[21] David Andriot and André Betz. β-supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework. *JHEP*, 12:083, 2013. arXiv:1306.4381, doi:10.1007/JHEP12(2013)083.

[22] Edward Witten. String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 443(1):85 – 126, 1995. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500158O, doi:https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00158-O.

[23] N.A. Obers and B. Pioline. U-duality and m-theory. *Physics Reports*, 318(4):113 – 225, 1999. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157399000046, doi:https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00004-6.

[24] P. K. Townsend. Four lectures on M theory. In *High energy physics and cosmology. Proceedings, Summer School, Trieste, Italy, June 10-July 26, 1996*, pages 385–438, 1996. arXiv:hep-th/9612121.

[25] E. Cremmer, B. Julia, and Joel Scherk. Supergravity Theory in Eleven-Dimensions. *Phys. Lett. B*, 76:409–412, 1978. doi:10.1016/0370-2693(78)90894-8.

[26] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, and C.N. Pope. Dualisation of dualities. *Nuclear Physics B*, 523(1):73 – 144, 1998. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398001369, doi:https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00136-9.

[27] E. Cremmer, B. Julia, H. Lü, and C.N. Pope. Dualisation of dualities ii: twisted self-duality of doubled fields and superdualities. *Nuclear Physics B*, 535(1):242 – 292, 1998. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321398005525, doi:https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00552-5.

[28] C.N. Pope. Lectures: Kaluza-Klein Theory. http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf. URL: http://people.physics.tamu.edu/pope/.

[29] Y. Tanii. $N = 8$ Supergravity in Six-dimensions. *Phys. Lett. B*, 145:197–200, 1984. doi:10.1016/0370-2693(84)90337-X.

[30] B. de Wit and H. Nicolai. $d = 11$ Supergravity With Local SU(8) Invariance. *Nucl. Phys. B*, 274:363–400, 1986. doi:10.1016/0550-3213(86)90290-7.

[31] Edvard T. Musaev. U-Dualities in Type II and M-Theory: A Covariant Approach. *Symmetry*, 11(8):993, 2019. doi:10.3390/sym11080993.

[32] David S. Berman and Malcolm J. Perry. Generalized Geometry and M theory. *JHEP*, 06:074, 2011. arXiv:1008.1763, doi:10.1007/JHEP06(2011)074.

[33] David S. Berman, Hadi Godazgar, Mahdi Godazgar, and Malcolm J. Perry. The Local symmetries of M-theory and their formulation in generalised geometry. *JHEP*, 01:012, 2012. arXiv:1110.3930, doi:10.1007/JHEP01(2012)012.

[34] David S. Berman, Hadi Godazgar, Malcolm J. Perry, and Peter West. Duality Invariant Actions and Generalised Geometry. *JHEP*, 02:108, 2012. arXiv:1111.0459, doi:10.1007/JHEP02(2012)108.

[35] David S. Berman, Edvard T. Musaev, Daniel C. Thompson, and Daniel C. Thompson. Duality Invariant M-theory: Gauged supergravities and Scherk-Schwarz reductions. *JHEP*, 10:174, 2012. arXiv:1208.0020, doi:10.1007/JHEP10(2012)174.

[36] David S. Berman, Martin Cederwall, Axel Kleinschmidt, and Daniel C. Thompson. The gauge structure of generalised diffeomorphisms. *JHEP*, 01:064, 2013. arXiv:1208.5884, doi:10.1007/JHEP01(2013)064.

[37] David S. Berman and Daniel C. Thompson. Duality Symmetric String and M-Theory. *Phys. Rept.*, 566:1–60, 2014. arXiv:1306.2643, doi:10.1016/j.physrep.2014.11.007.

[38] Olaf Hohm, Dieter Lüst, and Barton Zwiebach. The Spacetime of Double Field Theory: Review, Remarks, and Outlook. *Fortsch. Phys.*, 61:926–966, 2013. arXiv:1309.2977, doi:10.1002/prop.201300024.

[39] Gerardo Aldazabal, Diego Marques, and Carmen Nunez. Double Field Theory: A Pedagogical Review. *Class. Quant. Grav.*, 30:163001, 2013. arXiv:1305.1907, doi:10.1088/0264-9381/30/16/163001.

[40] Olaf Hohm and Henning Samtleben. Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB. *Phys. Rev. D*, 89(6):066016, 2014. arXiv:1312.0614, doi:10.1103/PhysRevD.89.066016.

[41] Aidar Abzalov, Ilya Bakhmatov, and Edvard T. Musaev. Exceptional field theory: $SO(5,5)$. *JHEP*, 06:088, 2015. arXiv:1504.01523, doi:10.1007/JHEP06(2015)088.

[42] Edvard T. Musaev. Exceptional field theory: $SL(5)$. *JHEP*, 02:012, 2016. arXiv:1512.02163, doi:10.1007/JHEP02(2016)012.

[43] Chris D. A. Blair and Emanuel Malek. Geometry and fluxes of SL(5) exceptional field theory. *JHEP*, 03:144, 2015. arXiv:1412.0635, doi:10.1007/JHEP03(2015)144.

[44] Olaf Hohm and Henning Samtleben. Exceptional field theory. II. $E_{7(7)}$. *Phys. Rev. D*, 89:066017, 2014. arXiv:1312.4542, doi:10.1103/PhysRevD.89.066017.

[45] Hadi Godazgar, Mahdi Godazgar, Olaf Hohm, Hermann Nicolai, and Henning Samtleben. Supersymmetric $E_{7(7)}$ Exceptional Field Theory. *JHEP*, 09:044, 2014. arXiv:1406.3235, doi:10.1007/JHEP09(2014)044.

[46] Daniel Butter, Henning Samtleben, and Ergin Sezgin. $E_{7(7)}$ Exceptional Field Theory in Superspace. *JHEP*, 01:087, 2019. arXiv:1811.00038, doi:10.1007/JHEP01(2019)087.

[47] Olaf Hohm and Henning Samtleben. Exceptional field theory. III. $E_{8(8)}$. *Phys. Rev. D*, 90:066002, 2014. arXiv:1406.3348, doi:10.1103/PhysRevD.90.066002.

[48] Arnaud Baguet and Henning Samtleben. $E_{8(8)}$ Exceptional Field Theory: Geometry, Fermions and Supersymmetry. *JHEP*, 09:168, 2016. arXiv:1607.03119, doi:10.1007/JHEP09(2016)168.

[49] Guillaume Bossard, Franz Ciceri, Gianluca Inverso, Axel Kleinschmidt, and Henning Samtleben. E_9 exceptional field theory. Part I. The potential. *JHEP*, 03:089, 2019. arXiv:1811.04088, doi:10.1007/JHEP03(2019)089.

[50] Emanuel Malek. U-duality in three and four dimensions. *Int. J. Mod. Phys. A*, 32(27):1750169, 2017. arXiv:1205.6403, doi:10.1142/S0217751X1750169X.

[51] C.M. Hull. Timelike T duality, de Sitter space, large N gauge theories and topological field theory. *JHEP*, 07:021, 1998. arXiv:hep-th/9806146, doi:10.1088/1126-6708/1998/07/021.

[52] C.M. Hull. Duality and the signature of space-time. *JHEP*, 11:017, 1998. arXiv:hep-th/9807127, doi:10.1088/1126-6708/1998/11/017.

[53] Emanuel Malek. Timelike U-dualities in Generalised Geometry. *JHEP*, 11:185, 2013. arXiv:1301.0543, doi:10.1007/JHEP11(2013)185.

[54] Ilya Bakhmatov, Nihat Sadik Deger, Edvard T. Musaev, Eoin Ó. Colgáin, and Mohammad M. Sheikh-Jabbari. Tri-vector deformations in $d = 11$ supergravity. *JHEP*, 08:126, 2019. arXiv:1906.09052, doi:10.1007/JHEP08(2019)126.

[55] Ilya Bakhmatov, Kirill Gubarev, and Edvard T. Musaev. Non-abelian tri-vector deformations in $d = 11$ supergravity. *JHEP*, 05:113, 2 2020. arXiv:2002.01915, doi:10.1007/JHEP05(2020)113.

[56] E. Bergshoeff, D. S. Berman, J. P. van der Schaar, and P. Sundell. A Noncommutative M theory five-brane. *Nucl. Phys.*, B590:173–197, 2000. arXiv:hep-th/0005026, doi:10.1016/S0550-3213(00)00476-4.

[57] David S. Berman, Martin Cederwall, Ulf Gran, Henric Larsson, Mikkel Nielsen, Bengt E.W. Nilsson, and Per Sundell. Deformation independent open brane metrics and generalized theta parameters. *JHEP*, 02:012, 2002. arXiv:hep-th/0109107, doi:10.1088/1126-6708/2002/02/012.

[58] Jun-Ichi Sakamoto and Yuho Sakatani. Local β-deformations and Yang-Baxter sigma model. *JHEP*, 06:147, 2018. arXiv:1803.05903, doi:10.1007/JHEP06(2018)147.

[59] Aybike Çatal-Özer and Nihat Sadik Deger. Beta, Dipole and Noncommutative Deformations of M-theory Backgrounds with One or More Parameters. *Class. Quant. Grav.*, 26:245015, 2009. arXiv:0904.0629, doi:10.1088/0264-9381/26/24/245015.

[60] Nihat Sadik Deger and Ali Kaya. Deformations of Cosmological Solutions of D=11 Supergravity. *Phys. Rev.*, D84:046005, 2011. arXiv:1104.4019, doi:10.1103/PhysRevD.84.046005.

[61] T. Araujo, E. Ó Colgáin, J. Sakamoto, M. M. Sheikh-Jabbari, and K. Yoshida. I in generalized supergravity. *Eur. Phys. J.*, C77(11):739, 2017. arXiv:1708.03163, doi:10.1140/epjc/s10052-017-5316-5.

[62] Yvette Kosmann. Dérivées de Lie des spineurs. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 91:317–395, 1971. doi:10.1007/BF02428822.

[63] Jose Miguel Figueroa-O'Farrill. On the supersymmetries of Anti-de Sitter vacua. *Class. Quant. Grav.*, 16:2043–2055, 1999. arXiv:hep-th/9902066, doi:10.1088/0264-9381/16/6/330.

[64] Domenico Orlando, Susanne Reffert, Yuta Sekiguchi, and Kentaroh Yoshida. Killing spinors from classical r-matrices. *J. Phys. A*, 51(39):395401, 2018. arXiv:1805.00948, doi:10.1088/1751-8121/aad8c2.

[65] Domenico Orlando, Susanne Reffert, Yuta Sekiguchi, and Kentaroh Yoshida. SUSY and the bi-vector. *Phys. Scripta*, 94(9):095001, 2019. arXiv:1811.11764, doi:10.1088/1402-4896/ab1ab9.

[66] Domenico Orlando, Susanne Reffert, Jun-ichi Sakamoto, Yuta Sekiguchi, and Kentaroh Yoshida. Yang-Baxter deformations and generalized supergravity - A short summary. 12 2019. arXiv:1912.02553.

[67] Yuho Sakatani. U-duality extension of Drinfel'd double. *PTEP*, 2020(2):023B08, 2020. arXiv:1911.06320, doi:10.1093/ptep/ptz172.

[68] Yuho Sakatani and Shozo Uehara. Non-Abelian U-duality for membrane. 2020. arXiv:2001.09983.

[69] Emanuel Malek and Daniel C. Thompson. Poisson-Lie U-duality in Exceptional Field Theory. *JHEP*, 04:058, 2020. arXiv:1911.07833, doi:10.1007/JHEP04(2020)058.

[70] A. B. Zamolodchikov. Tetrahedron equations and the relativistic s-matrix of straight-strings in $2+1$-dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 79(4):489–505, 1981. URL: https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103909139.

[71] Igor Frenkel and Gregory Moore. Simplex equations and their solutions. *Comm. Math. Phys.*, 138(2):259–271, 1991. URL: https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1104202944.

[72] Jonathan Bagger and Neil Lambert. Modeling Multiple M2's. *Phys. Rev.*, D75:045020, 2007. arXiv:hep-th/0611108, doi:10.1103/PhysRevD.75.045020.

[73] Jonathan Bagger and Neil Lambert. Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes. *Phys. Rev.*, D77:065008, 2008. arXiv:0711.0955, doi:10.1103/PhysRevD.77.065008.

[74] Ofer Aharony, Oren Bergman, Daniel Louis Jafferis, and Juan Maldacena. N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals. *JHEP*, 0810:091, 2008. arXiv:0806.1218, doi:10.1088/1126-6708/2008/10/091.

[75] Juan Martin Maldacena and Jorge G. Russo. Large N limit of noncommutative gauge theories. *JHEP*, 09:025, 1999. arXiv:hep-th/9908134, doi:10.1088/1126-6708/1999/09/025.

[76] Emiliano Imeroni. On deformed gauge theories and their string/M-theory duals. *JHEP*, 0810:026, 2008. arXiv:0808.1271, doi:10.1088/1126-6708/2008/10/026.

[77] Stijn J. van Tongeren. Yang–Baxter deformations, AdS/CFT, and twist-noncommutative gauge theory. *Nucl. Phys.*, B904:148–175, 2016. arXiv:1506.01023, doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.01.012.

[78] Carmelo P. Martin, Josip Trampetic, and Jiangyang You. Quantum noncommutative ABJM theory: first steps. *JHEP*, 04:070, 2018. arXiv:1711.09664, doi:10.1007/JHEP04(2018)070.

[79] E. K. Sklyanin P. P. Kulish. Solutions of the Yang-Baxter equation. *Journal of Soviet Mathematics*, 1982. doi:10.1007/BF01091463.

[80] Drinfel'd V. G. Belavin, A. A. Solutions of the classical Yang - Baxter equation for simple Lie algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 1982. doi:10.1007/BF01081585.

[81] Vladimir V. Bazhanov and Sergey M. Sergeev. Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups. *J. Phys. A*, 39:3295–3310, 2006. arXiv:hep-th/0509181, doi:10.1088/0305-4470/39/13/009.