

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки/специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и  
физика (магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Проблемы теоретической физики

## **Квантовая механика, суммирование по графам и критические явления, голографическое соответствие**

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Кочергин Даниил Сергеевич

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н. Горский Александр Сергеевич

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Квантовая механика в терминах <math>\beta</math>-ансамбля</b>	<b>4</b>
<b>2 Суммирование по графам</b>	<b>6</b>
2.1 Случай супердеревьев . . . . .	6
2.2 Дерево Эрмита . . . . .	8
2.3 Счет путей для дерева Эрмита . . . . .	10
<b>3 Представление Вигнера для графов</b>	<b>12</b>
3.1 Матрицы перехода для квантового осциллятора в представлении Вигнера .	12
3.2 Связь элементов графа Лагерра и дерева Эрмита . . . . .	13
3.3 Вид графа Лагерра . . . . .	15
3.4 Счет путей для графа Лагерра . . . . .	16
<b>4 Дополнительные физические модели</b>	<b>17</b>
<b>Заключение</b>	<b>20</b>
<b>Литература</b>	<b>21</b>

# Введение

Связь квантовой механики с проблемой блужданий по графам впервые была представлена в контексте локализации многих тел [1]. В этой работе волновая функция многочастичной системы с парным электрон-электрон взаимодействием аппроксимируется суммой по путям одной частицы, двигающейся по решетке Бете. Решетка Бете имитирует пространство Фока, в котором узел играл роль определенного состояния, а связь между узлами означает ненулевой матричный элемент оператора взаимодействия. Являясь приближительной, данная модель позволяет сделать важные выводы о локализации многочастичных систем [2]. Для лучшего полного понимания данного соответствия необходимо рассмотреть более простые модели. Основная часть данной работы рассматривает квантовую механику и ее представление в виде графов на примере гармонического осциллятора.

Существует другая важная особенность данного подхода. Известно, что статистическая сумма может быть выведена через интеграл по путям в координатном или фазовом пространстве или же может быть представлена в виде взвешенной суммы по гильбертовому пространству собственных векторов в энергетическом представлении. Волновую функцию, так же как и статистическую сумму, можно записать через путевой интеграл. Аналогично этому существует возможность получить волновую функцию через сумму по путям в гильбертовом пространстве. Для этого необходимо точно описать возможные пути в пространстве Гильберта. Простейшим примером для этой задачи может являться гармонический осциллятор.

# 1 Квантовая механика в терминах $\beta$ -ансамбля

Рассмотрение квантовых систем с точки зрения графов необходимо начать с со-  
 связи между моделью  $\beta$ -ансамбля, случайными матрицами и квантовой механикой [3, 4].  
 Соответствие между статистической механикой в СФТ и квантовой теорией было впервые  
 установлено в работах [5, 6] для обобщенного ангармонического осциллятора. Связь между  
 двумя теориями проявляется с одной стороны из спектрального детерминанта уравнения  
 Шредингера, а с другой стороны из  $Q$ -операторов в СФТ с конформным зарядом  $c < 1$ .  
 Помимо квантовой механики модель  $\beta$ -ансамбль позволяет описать в различных пределах  
 другие теории, такие как квантовая геометрия или же предел Некрасова-Шаташвили [7]  
 для усовершенствованных топологических струн.

Для выведения квантовой механики из  $\beta$ -ансамбля необходимо начать со статиче-  
 ской суммы ансамбля с  $N$  собственных значений матрицы  $M$ :

$$Z_c(N, \beta, g_s) = \int_{\mathcal{C}} [d\lambda] \Delta(\lambda)^{2\beta} e^{-\frac{\beta}{g_s} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i)}, \quad (1)$$

где  $\Delta(\lambda)$  – детерминант Вандермонда,  $\Delta(\lambda) = \prod_{i < j}^N (\lambda_i - \lambda_j)$ ,  $\mathcal{C}$  – путь интегрирования  
 в комплексной плоскости,  $\beta$  – положительное число.  $N$  – собственными значениями и  
 потенциалом  $W(\lambda)$ . Средней значение оператора оператора определяется как

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \int_{\mathcal{C}} [d\lambda] \Delta(\lambda)^{2\beta} e^{-\frac{\beta}{g_s} \sum_{i=1}^N W(\lambda_i)}, \quad (2)$$

Чтобы получить волновую функцию необходимо рассмотреть следующий оператор браны  
 $\psi(x) = \prod_{i=1}^N (\lambda_i - x)^\beta = \det(M - x)^\beta$ . Его коррелятор определяется следующим образом:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{\beta}{g_s} W(x)} \frac{\langle \psi(x) \rangle}{\langle 1 \rangle}. \quad (3)$$

В пределе, соответствующем квантовой механике ( $N \rightarrow \infty$ , таких что  $\mathcal{N} = \beta N =$   
 $\text{const}$ ), данный коррелятор выполняет роль волновой функции в уравнении Шредингера

$$\hbar^2 \Psi''(x) = ((W'(x))^2 - f(x)), \quad (4)$$

где

$$f = \hbar(W''(x) + 2c(x) + d(x)), \quad (5)$$

$$c = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta N \frac{W'(x) - W'(0)}{x}, \quad d = \hbar \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \hat{D} \ln \langle 1 \rangle. \quad (6)$$

В это случае энергия квантовомеханической системы определяется следующим образом:

$$E = \hbar(W''(0) + 2c(0) + f(0)). \quad (7)$$

Для гауссового потенциала  $W(x) = \frac{1}{2}x^2$  уравнение Шредингера приобретает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Psi''(x) + \frac{x^2}{2}\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (8)$$

а его энергия равна

$$E = \hbar\left(\frac{1}{2} + \lim_{\beta \rightarrow 0}(\beta N)\right). \quad (9)$$

Стоит отметить что в случае гармонического потенциала, распределение случайных значений принимает вид эрмитового ансамбля [8], а сама случайная матрица может быть записана в тридиагональном виде. Используя тригональную матрицу, можно записать волновую функцию и без перехода к пределу больших  $N$ . Для осциллятора оператор  $\hat{X}$  в пространстве Фока имеет вид тридиагональной матрицы  $n \times n$ , что дает полиномы Эрмита

$$H_n \propto \det_{n \times n}(\hat{X} - x). \quad (10)$$

Аналогично обозначенному выше QM/CFT соответствию, связь между теориями происходит благодаря спектральному детерминанту. Однако, усредненный спектральный детерминант  $\beta$ -ансамбля соответствует представлению волновой функции, через спектральный определитель оператора в пространстве Фока. Это подводит нас к задаче определения вида путей в пространстве Гильберта.

## 2 Суммирование по графам

### 2.1 Случай супердеревьев

Отличительной чертой суммирования путей по неоднородным графам является, то что разветвление графа не постоянно. Поэтому приходится отличать проблему расчета путей (path counting, PC) и статистику случайных блуждания (random walk, RW). Разница между двумя подходами заключается в том, как происходит нормировка простейшего шага. Для случайных блужданий вероятность прохождения из узла по одному из путей одинакова. В проблеме случайных блужданий вес всех путей одинаков и равен единице, независимо от число разветвления на данной вершине [9]. Если граф имеет постоянное ветвление статистическая сумма PC и вероятность распределения RW отличаются только на глобальную нормализующую константу и соответствующие средние значение неразличимы.

Для нахождения статистической суммы для произвольного графа  $\mathcal{G}$  с матрицей связности  $\mathcal{A}$  нужно рассмотреть число возможных путей из одной вершин графа в другую. Матричный элемент перехода из одной вершины в другую имеет вид

$$\langle i|\mathcal{A}|j\rangle \quad (11)$$

Полное число путей прошедших расстояние  $k$  за  $N$  шагов начиная из  $i$ -ого узла имеет следующим образом:

$$Z_N^{(i)}(k) = \sum_{j:k=dist(i,j)} \langle i|\mathcal{A}^N|j\rangle \quad (12)$$

Задача расчета путей упрощается в случае деревоподобного графа. Деревом называется граф, в котором пути блуждания частицы по нему не создают циклы. В дополнение к этому возьмем дерево, в котором присутствуют дополнительные симметрии. Существует корневой узел, из которого выходят  $p_0$  ветвей. Из образовавшихся  $p_0$  узлов выходят по  $p_1 + 1$  ветвей и т.д. Таким образом, дерево разделяется на уровни на равных число разветвлений, каждый уровень обозначим номером  $k$ . Если каждое последующее число разветвление меньше или равно предыдущему ( $p_k \geq p_{k+1}$ ), то получаем конечный граф с числом уровней  $K$ . Такое дерево называется решеткой Бете. Согласно [10] набор собственных значений матрицы связности может представлен как набор собственных значений тридиагональной матрицы  $A$  размерностью  $K \times K$  и ее подматриц. Матричные элементы

данной матрицы имеют вид

$$\begin{cases} a_{k,k} = 0 \\ a_{K,K-1} = a_{K-1,K} = \sqrt{p_0} \\ a_{k,k-1} = a_{k-1,k} = \sqrt{p_i} \quad (k = 2, \dots, K-1) \end{cases} \quad (13)$$

В данной главе рассматривается проблема подсчета путей для симметричных конечных супердеревьев [11],  $\mathcal{T}^+$  и  $\mathcal{T}^-$ , с  $K$  уровнями. Степень разветвления непостоянна, но линейно зависит от текущего уровня  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ ). Для восходящего дерева  $\mathcal{T}^+$  разветвление параметризуется следующим образом:

$$p_k = \begin{cases} p_0 & \text{при } k = 0, \\ 1 + a. & \text{при } k \geq 1, a \geq 0, \end{cases} \quad (14)$$

для нисходящего  $\mathcal{T}^-$ :

$$p_k = \begin{cases} p_0 & \text{при } k = 0, \\ p_0 - ak & \text{при } k \geq 1, a \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Скорость ветвления  $a$  – постоянная неотрицательная целочисленная константа,  $p_0$  обозначает ветвление корня дерева при  $k = 0$ . Деревья  $\mathcal{T}^\pm$  соответствует конечному пределу симметричного пространства Римана с непостоянной отрицательной кривизной.

Для супердеревьев  $\mathcal{T}^\pm$  статистическая сумма  $Z_N(k)$  дает следующие рекуррентное соотношение:

$$\begin{cases} Z_{N=0} = \delta_{k,0} \\ Z_{N+1}(k) = Z_N(k+1) & k = 0 \\ Z_{N+1}(k) = p_{k-1}Z_N(k-1) + Z_N(k+1) & 1 \leq k \leq K-2 \\ Z_{N+1}(k) = p_{k-1}Z_N(k-1) & k = K-1 \end{cases} \quad (16)$$

Данное рекуррентное соотношение можно переписать в матричной форме. Для этого необходимо построить вектор размерности  $K$ ,  $Z_N = (Z_N(0), Z_N(2), \dots, Z_N(K-1))^T$ . Тогда эволюция  $Z_N$  по  $N$ :

$$Z_{N+1} = \hat{T}Z_N, \quad (17)$$

где

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_{N=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Далее матрица  $\hat{T}$  диагонализуется. Характеристический полином,  $P_k(\lambda) = \det(\hat{T} - \lambda\hat{I})$ , матрицы  $\hat{T}$  размерностью  $k \times k$  удовлетворяет рекуррентному соотношению.

$$\begin{cases} P_1 = -\lambda \\ P_2 = \lambda^2 - p_0 \\ P_k = -\lambda P_{k-1} - p_k P_{k-2} \quad 3 \leq k \leq K. \end{cases} \quad (19)$$

В случае восходящего дерева при  $p_0 = 1$ ,  $a = 1$  и нисходящего дерева  $\mathcal{T}^-$  при  $a = 1$  и  $p_0 = K - 1$  рекуррентные соотношения (19) дают полиномы Эрмита  $H_k$ .

Так же стоит отметить, эквивалентность матриц перехода (18) и матриц, полученных из нахождения собственных значений матрицы связности (13). Это обосновано тем, что во все основные формулы будет входить определитель от этих матриц.

## 2.2 Дерево Эрмита

Из-за того что матрицы перехода обоих деревьев дают одно и то же решение, для выбора правильного вида дерева, относящегося к модели квантового гармонического осциллятора, необходимо рассмотреть их матрицы связности. Вначале рассмотрим матрицу связности  $\mathcal{A}$  нисходящего дерева  $\mathcal{T}^-$ :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & \dots \\ C_1^T & 0 & C_2 & 0 & \dots \\ 0 & C_2^T & 0 & C_3 & \dots \\ 0 & 0 & C_3^T & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (20)$$

где  $C_i$  - это матрицы  $n_i \times n_{i+1}$  ( $n_k$  обозначает общее число вершин на уровне  $k$ ). В качестве примера может выступать дерево с четырьмя уровнями, тогда матрица будет иметь



следующие  $C_i$ :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Используя теорему из [10] можно найти факторизацию по характеристическим полиномам матрицы связности (20) для эрмитового полинома. Для этого применяется метод Гаусса к матрице  $(\lambda I - \mathcal{A})$ . Что дает

$$\begin{pmatrix} \beta_1 I & C_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta_2 I & C_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_3 I & C_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda = \frac{H_1}{H_0} \\ \beta_2 &= \lambda - \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{\beta_1} = \frac{\lambda H_1 - H_0}{H_1} = \frac{H_2}{H_1} \\ \beta_3 &= \lambda - \frac{n_2}{n_3} \frac{1}{\beta_2} = \frac{\lambda H_2 - H_1}{H_2} = \frac{H_3}{H_2} \\ &\dots \\ \beta_k &= \lambda - \frac{n_{k-1}}{n_k} \frac{1}{\beta_{k-1}} = \frac{H_k}{H_{k-1}} \end{aligned} \quad (23)$$

В таком случае спектр дерева определяется следующим образом:

$$\det(\lambda I - \mathcal{A}) = H_k(\lambda) \prod_i H_i^{n_i - n_{i+1}}(\lambda). \quad (24)$$

Изученное нисходящее дерево  $\mathcal{T}^-$  из работы [11] дает разложение спектрального детерминанта по полиномам Эрмита. Применение этого метода для восходящего дерева  $\mathcal{T}^+$  не даст разложение по полиномам Эрмита. Нисходящее дерево имеет смысл называть деревом Эрмита. Оно является примером решетки Бете. Дерево Эрмита дает вид гильбертового пространства для гармонического осциллятора в координатном представлении. Его вид представлен на рис. 2.2.

Как известно собственные функции оператора уничтожения для квантового осциллятора дают систему когерентных состояний. Разложение по когерентным состояниям

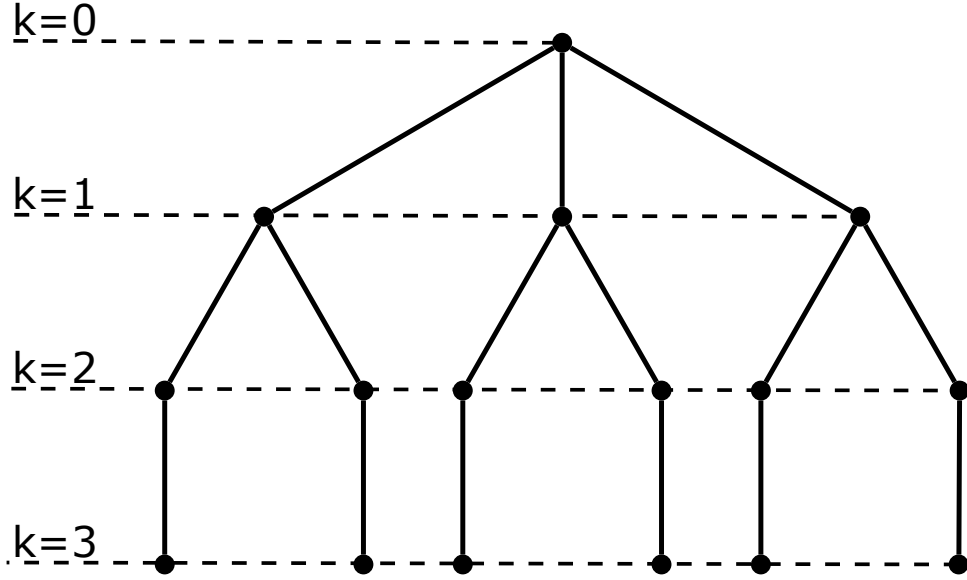


Рис. 1: Дерево Эрмита для (21). Уровни  $k$  соответствуют параметризации (15) с  $p_0 = 3$  и  $a = 1$ .

делает систему сверхполной. Система будет считаться полной, если число когерентных состояний таково, что площадь, выделенная на каждое когерентное состояние в фазовом пространстве, будет равна  $\pi$  [12]. Эволюция полной системы дает подсказку к Комплексити, построенного из когерентных состояний. Для этого используем метод подсчета возможных переходов системы [13] в другие состояния. Однако, в отличие от случая когда Комплексити построено из кубитов, нам необходимо для перехода на следующий уровень изменить число одно когерентных состояний. Если мы возьмем  $n$ -е состояние, то для переход к  $(n - 1)$ , нужно убрать одно когерентное состояние, чтобы система осталась полной. Это можно сделать  $n$  способами. Тогда система перейдет в  $(n - 1)$ . Следующий шаг похож на предыдущий. Для перехода в  $(n - 2)$ -е состояние. Нужно убрать одно состояние, и для этого есть  $(n - 1)$  возможных способов. Эту процедуру можно повторять до того как система перейдет в основное состояние. Построение графа возможных событий таким способом дает нисходящее дерево или дерево Эрмита.

### 2.3 Счет путей для дерева Эрмита

Для установления связи между спектром полиномов  $H_k$  и расчетом путей на дереве Эрмита рассматривается производящая функция следующего вида

$$\mathcal{Z}(s, k) = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N(k) s^N \quad Z_N(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{Z}(s, k) s^{-N-1} ds \quad (25)$$

Для нисходящего дерева  $\mathcal{T}^-$  [11] при  $a = 1$  и  $p_0 = K - 1$  подстановка (16) в (25)

дает

$$\begin{cases} s^{-1}\mathcal{Z}^-(s, k) = (K - k)\mathcal{Z}^-(s, k - 1) + \mathcal{Z}^-(s, k + 1) & \text{для } 1 \leq k \leq K - 2, \\ s^{-1}\mathcal{Z}^-(s, K - 1) = \mathcal{Z}^-(s, K - 2). \end{cases} \quad (26)$$

Наиболее важным является расчет канонической статистической суммы  $\mathcal{Z}^-(s, k = 0) = \mathcal{Z}_K^-(s)$ . Она дает траектории начавшиеся и закончившиеся в корневой вершине. Каждый шаг происходит с весом  $s^{-1}$ .

$$\mathcal{Z}_K^-(s) = \frac{H_{K-1}(s^{-1})}{sH_K(s^{-1})}. \quad (27)$$

Координата в физическом пространстве играет роль обратного веса простейшего шага в гильбертовом пространстве по дереву Эрмита.

Из (23) можно увидеть, что спектр графа  $\mathcal{T}^-$  раскладывается по каноническим статистическим функциям его подграфов, которые начинаются с различных вершин и также имеет вид ниспадающих деревьев. Это позволяет переписать соотношение (24) в виде

$$\det(\mathcal{A} - \lambda I) = \lambda^N \prod_k \frac{1}{\mathcal{Z}_k^-(\lambda^{-1})^{n_k}}. \quad (28)$$

### 3 Представление Вигнера для графов

В предыдущей главе рассматривался квантовый гармонический осциллятор в координатном представлении. Однако, как и в классической механике систему можно описать используя фазовое пространство [14]. Этот способ рассмотрения квантовомеханической системы называется представлением Вигнера. Целью данного раздела было нахождение графа соответствующего функции Вигнера (аналог волновой функции для фазового пространства).

Стационарное уравнение в фазовом пространстве выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}(x, p) \star F(x, p) = EF(x, p) = F \star \mathcal{H}, \quad (29)$$

где  $\mathcal{H}$  – гамильтониан системы,  $F$  – функция Вигнера.  $\star$  обозначает Мoyalовское произведение:

$$f \star g = f\left(x + \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{1}{2}i\hbar\overrightarrow{\partial}_x\right)g(x, p) = f(x, p)g\left(x - \frac{1}{2}i\hbar\overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{1}{2}i\hbar\overleftarrow{\partial}_x\right). \quad (30)$$

Решением уравнением (29) для гармонического осциллятора является

$$F_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} L_n\left(\frac{x^2 + p^2}{\hbar/2}\right) e^{-(x^2 + p^2)/\hbar} \quad (31)$$

Таким образом система должна соответствовать графу, для которого характеристические полиномы от матрицы перехода – это полиномы Лагерра  $L_n$ .

#### 3.1 Матрицы перехода для квантового осциллятора в представлении Вигнера

Для определения структуры графа вначале необходимо найти вид матрицы перехода  $\hat{T}^L$  со спектральным определителем в виде полиномов Лагерра, а далее найти такую матрицу связности факторизация характеристического полинома которой давала полиномы Лагерра.

Возьмем параметризацию нисходящего дерева  $\mathcal{T}^-$  (15). В таком случае, полином Лагерра можно задать как произведение матрицы и ее же транспонированной:

$$\hat{L} = \hat{B}\hat{B}^T, \quad (32)$$

где

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{p_0} & \sqrt{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{p_1} & \sqrt{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{p_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} p_0 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_0 & p_0 + p_1 & p_1 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & p_1 + p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-2} + p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$P_n(\lambda) = \det(\hat{L} - \lambda \hat{I}) \quad (35)$$

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{n!} P_n(\lambda) \quad (36)$$

Если следовать обозначениям и определения величин из обзора [14], то для фазового пространства  $\lambda = 2 \frac{x^2 + p^2}{\hbar}$ .

Имеет место быть равенство:  $\det(\hat{L} - \lambda \hat{I}) = \det(\hat{T} - \lambda \hat{I})$ , где матрица  $\hat{T}$  имеет вид

$$\hat{T}^L = \begin{pmatrix} p_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_0^2 & p_0 + p_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & p_1^2 & p_1 + p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-2} + p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Из вида (37) можно предположить вид графа. Помимо квадратичного увеличения числа вершин на каждом уровне, из-за ненулевой главной диагонали, мы могут появиться петли.

### 3.2 Связь элементов графа Лагерра и дерева Эрмита

Из чисто математических соображения получили формулу для связи Лагеррова дерева и Эрмитова дерева:

$$(T^L)_{mn} = \frac{1}{2} \left( (T_x^H)_{mn}^2 - (T_p^H)_{mn}^2 + (T_x^H)_{ml} (T_x^H)_{ln} + (T_p^H)_{ml} (T_p^H)_{ln} \right), \quad (38)$$

где

$$T_x^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad T_p^H = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ip_0 & 0 & -i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ip_1 & 0 & -i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & ip_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Матрица  $T_x^H$  – естественно появляется из описания координатного представления.  $T_p^H$  – вспомогательная матрица перехода, соответствующая импульсному пространству. Необходимость ее введения объясняется тем, что представление Вигнера включается в себя равнозначно координату и импульс.

Физическую верность формулы (38) можно увидеть из основного уравнения Вигнера (29). Расписанное звездное произведение для квадратичного потенциала имеет вид

$$\mathcal{H} \star F = \left( \frac{1}{2}(p - \frac{i}{2}\hbar\partial_x)^2 + \frac{1}{2}(x + \frac{i}{2}\hbar\partial_p)^2 \right) F = EF, \quad (40)$$

$$F \star \mathcal{H} = \left( \frac{1}{2}(p + \frac{i}{2}\hbar\partial_x)^2 + \frac{1}{2}(x - \frac{i}{2}\hbar\partial_p)^2 \right) F = EF. \quad (41)$$

Полусумма последних двух выражений (40) и (41):

$$\frac{1}{2}(\mathcal{H} \star F + F \star \mathcal{H}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\hbar^2}{4}\partial_x^2 - \frac{\hbar^2}{4}\partial_p^2 + x^2 + p^2 \right) F = EF. \quad (42)$$

Получили похожую структура, что и в (38). Для удобства в дальнейшем будем считать  $\hbar = 1$ .

Матричные элементы дерева Лагерра можно получить с помощью формулы

$$I_{mn} = 2(x^2 + p^2)_{mn} = 2 \int F_m^*(x^2 + p^2)F_n dx dp. \quad (43)$$

Рассмотрим слагаемое с  $x^2$ . Для этого представим функцию Вигнера через волновые функции в  $x$ -представление:

$$F_n = \int \psi_n^*(x + y)\psi_n(x - y)e^{2ipy} dy. \quad (44)$$

Отсюда получим для слагаемого с  $x^2$ :

$$\int F_m^* x^2 F_n dx dp = \int \psi_m(x + z)\psi_n^*(x - z)e^{-2ipz} x^2 \psi_n^*(x + y)\psi_n(x - y)e^{2ipy} dy dz dx dp. \quad (45)$$

Интегрирование по  $dp$  дает  $\delta(2y - 2z)$ . После интегрирования по  $dz$  получаем следующее выражение:

$$\int \psi_m(x + y)\psi_n^*(x - y)x^2 \psi_n^*(x + y)\psi_n(x - y) dy dx, \quad (46)$$

Делая замену  $u = x + y$  и  $v = x - y$ , получим

$$\begin{aligned}
& \int \psi_m(u) \psi_n^*(v) (u+v)^2 \psi_n^*(u) \psi_n(v) du dv = \\
& = \frac{1}{8} \int \psi_m(u) u^2 \psi_n^*(u) du + \frac{1}{8} \int \psi_n^*(v) v^2 \psi_n(v) dv + \\
& \quad + \frac{1}{4} \int \psi_m(u) u \psi_n^*(u) du \int \psi_n^*(v) v \psi_n(v) dv = \\
& = \frac{1}{8} (u^2)_{mn}^* + \frac{1}{8} (v^2)_{mn} + \frac{1}{4} u_{mn}^* v_{mn} = \frac{1}{4} \sum_l x_{ml} x_{ln} + \frac{1}{4} x_{mn} x_{mn}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Получили такую же структуру для  $T_x$ , что и в (38). Если учесть двойку перед  $x^2$  в (43), то должен получается правильный коэффициент.

Аналогичные вычисления нужно проделать для слагаемого с  $p^2$  в (43). Из исключением того, что функция Вигнера выражается через импульсное представление. Кроме того, нужно учитывать, что матрица для импульса, в отличие от матрицы для координаты, комплексная. Этот факт объясняет асимметрию знаков координатной и импульсной части (38).

Таким образом, правильная формула для связи матриц перехода графов в различных представлениях должна имеет вид

$$\begin{aligned}
(T^L)_{mn} &= \frac{1}{2} ((T_x^H)_{mn} (T_x^H)_{mn}^* + (T_p^H)_{mn} (T_p^H)_{mn}^*) + \\
& + \frac{1}{4} ((T_x^H)_{ml} (T_x^H)_{ln} + (T_x^H)_{ml}^* (T_x^H)_{ln}^* + (T_p^H)_{ml} (T_p^H)_{ln} + (T_p^H)_{ml}^* (T_p^H)_{ln}^*).
\end{aligned} \tag{48}$$

### 3.3 Вид графа Лагерра

Используя теоремы из статьи [10], определяется вид матрицы связности для графа Лагерра:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1I & D_1 & 0 & 0 & \dots \\ D_1^T & 3I & D_2 & 0 & \dots \\ 0 & D_2^T & 7I & D_3 & \dots \\ 0 & 0 & D_3^T & 9I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{49}$$

где  $D_i$  – матрица  $n_i^2 \times n_{i+1}^2$ , имеющая аналогичную структуру матрицам  $C_i$ . Характеристический полином матрицы связности имеет вид

$$\det(\lambda I - \mathcal{B}) = L_k(\lambda) \prod_i L_i^{n_i^2 - n_{i+1}^2}(\lambda). \tag{50}$$

Из вида (49) можно установить, что число вершин на уровне становится квадратично больше чем в эрмитовом графе, появляется петли на каждой вершине, их число соответствует числу, расположенному на главной диагонали матрицы (37).

### 3.4 Счет путей для графа Лагерра

Зная структуру графа, соответствующего полиномам Лагерра, можно найти статистическую сумму. Начиная движение из корня графа и используя матрицу перехода (37), получим следующие значения для числа путей:

$$\begin{cases} Z_{N=0} = \delta_{k,0} \\ Z_{N+1}(k) = (2K+1)Z_N(k) + Z_N(k+1) & k=0 \\ Z_{N+1}(k) = (K-k)^2Z_N(k-1) + (2(K-k)+1)Z_N(k) + Z_N(k+1) & 1 \leq k \leq K-2 \\ Z_{N+1}(k) = (K-k)^2Z_N(k-1) + (2(K-k)+1)Z_N(k) & k=K-1 \end{cases} \quad (51)$$

Воспользовавшись преобразованием (25) для числа путей графа Лагерра (51) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (s^{-1} - (2(K-k)+1))\mathcal{Z}^L(s, k) = (K-k)^2\mathcal{Z}^L(s, k-1) + \mathcal{Z}^L(s, k+1) & \text{для } 1 \leq k \leq K-2, \\ (s^{-1} - 1)\mathcal{Z}^L(s, K-1) = \mathcal{Z}^L(s, K-2). \end{cases} \quad (52)$$

Отсюда можно найти каноническую статистическую сумму  $\mathcal{Z}^L(s, k=0) = \mathcal{Z}_K^L(s)$  для графа Лагерра:

$$\mathcal{Z}_K^L(s) = \frac{L_{K-1}(s^{-1})}{sL_K(s^{-1})}. \quad (53)$$

Это позволяет переписать соотношение (50) в виде

$$\det(\lambda I - \mathcal{B}) = \lambda^N \prod_k \frac{1}{\mathcal{Z}_k^L(\lambda^{-1})^{n_k^2}}. \quad (54)$$

В случае представления Вигнера обратный вес элементарного шага по графу равен действию  $s^{-1} = I = 2(x^2 + p^2)$  в переменных действие-угол  $(I, \phi)$ .



## 4 Дополнительные физические модели

В данном разделе рассматриваются другие физические модели, для которых можно полностью или частично привести в соответствие дерево, с помощью ортогональных полиномов.

Полезно будет расширить матрицу перехода на случай обобщенных полиномов Лагерра, которые встречаются, например, при решении волнового уравнения на радиальную часть для атома водорода.

$$\hat{T}_\alpha^L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-2} + p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}, \quad (55)$$

Характеристический полином имеет вид

$$L_n^\alpha(\lambda) = \frac{1}{n!} \det(\hat{T}_\alpha^L - \lambda \hat{I}). \quad (56)$$

Следующие два графа (рис. 2), в отличие от дерева Эрмита и графа Лагерра, могут быть бесконечным.

Вначале рассмотрим граф, представляющий бесконечную линию (рис. 2а)). Корень может быть выбран в произвольном узле. Матрица перехода такого графа

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Спектр  $P_n = \det_{n \times n}(T - \lambda I)$  такого графа генерирует отношения

$$\begin{aligned} P_1 &= -\lambda = 2\left(\frac{-\lambda}{2}\right) = 2x = 2T_1, \\ P_2 &= \lambda^2 - 2 = 2\left(2\frac{\lambda^2}{4} - 1\right) = 2(2x^2 - 1) = 2T_2, \\ P_3 &= -\lambda P_2 - P_1 = -\lambda^3 + 3\lambda = 2\left(4\left(\frac{-\lambda}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-\lambda}{2}\right)\right) = 2(4x^3 - 3x) = 2T_3, \dots \\ P_n &= 2T_n, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $T_n$  - полиномы Чебышева первого рода. Полиномы Чебышева первого рода появляются при решении уравнения следующего вида

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \quad (59)$$

Его можно переписать в виде

$$(1 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2)^{1/2} \frac{dy}{dx} \right) + n^2y = 0. \quad (60)$$

Сделав замену  $x = \cos \theta$ , получается уравнение вращения в плоскости:

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0. \quad (61)$$

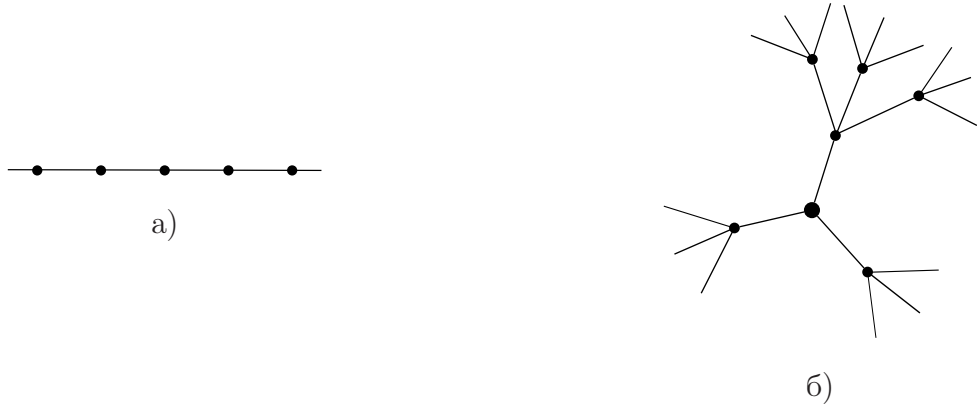


Рис. 2: Вид деревьев, дающих полиномы Чебышева: а) первого рода, б) второго рода (параметр  $a = 3$  из (62)).

Последний интересующий нас граф имеет матрицу перехода, где на боковой диагонали одинаковое число разветвлений (рис. 2б)). Валентность всех узлов кроме корня будет одинакова. Матрица перехода будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Спектральный определитель  $P_n = \det_{n \times n}(U - \lambda I)$  дает рекуррентное отношение:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\lambda = 2\sqrt{a} \left( \frac{-\lambda}{2\sqrt{a}} \right) = \sqrt{a}(2x) = a^{1/2}U_1, \\ P_2 &= \lambda^2 - a = a \left( 4 \left( \frac{\lambda^2}{4a} \right) - 1 \right) = a(4x^2 - 1) = aU_2, \\ P_3 &= -\lambda P_2 - aP_1 = a^{3/2}U_3, \\ &\dots \\ P_n &= -\lambda P_{n-1} - aP_{n-2} = a^{n/2}U_n. \end{aligned} \quad (63)$$

Спектр данного графа дает полиномы Чебышева второго рода  $U_n$ . Они являются решением следующего дифференциального уравнения:

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n + 2)y = 0. \quad (64)$$

Его можно переписать в следующей форме:

$$\frac{1}{(1 - x^2)^{1/2}} \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2)^{3/2} \frac{dy}{dx} \right) + n(n + 2)y = 0. \quad (65)$$

Если сделать замену  $x = \cos \theta$ , то получим

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin^2 \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + n(n + 2)y = 0. \quad (66)$$

Слагаемое с производной эквивалентно слагаемому, у оператора Лапласа для угла, входящего в параметризацию всех координат, в четырехмерии.

## Заклучение

В результате проделанной работы было многосторонне исследована одна из простейших систем, модель квантового гармонического осциллятора, для которой можно явно описать связь между волновой функцией и суммированием по графам. Определены виды дерева Эрмита и графа Лагерра, что позволяет описать пути в пространстве Гильберта для координатного представления и представления Вигнера. Найдена каноническая статическая сумма для графа Лагерра, а также ее связь со спектром графа. В дополнение найдены матрицы перехода, связанные различными ортогональными полиномами, встречающимися в физике.

## Список литературы

- [1] B.L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev, L.S. Levitov, Quasiparticle Lifetime in a Finite System: A Nonperturbative Approach, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2803 (1997) [arXiv:cond-mat/9609132].
- [2] D.M. Basko, I.L. Aleiner, B.L. Altshuler, Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states, *Annals of Physics* **321**, 1126 (2006) [arXiv:cond-mat/0506617].
- [3] D. Krefl, Non-perturbative quantum geometry, *Journal of High Energy Physics* **2014**, 84 (2014) [arXiv:1311.0584].
- [4] D. Krefl, Non-perturbative quantum geometry II, *Journal of High Energy Physics* **2014**, 118 (2014) [arXiv:1410.7116].
- [5] P. Dorey, R. Tateo, Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz and nonlinear integral equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **32**, 38 (1999) [arXiv:hep-th/9812211].
- [6] V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov, A.B. Zamolodchikov, Spectral Determinants for Schrödinger Equation and Q-Operators of Conformal Field Theory, *Journal of Statistical Physics* **102**, 567 (2001) [arXiv:hep-th/9812247].
- [7] M. Aganagic, M. C. N. Cheng, R. Dijkgraaf, D. Krefl, C. Vafa Quantum Geometry of Refined Topological Strings, *Journal of High Energy Physics* **1211**, 019 (2012) [arXiv:1105.0630].
- [8] I. Dumitriu, A. Edelman, Matrix models for beta ensembles, *Journal of Mathematical Physics* **43**, 5830 (2002) [arXiv:math-ph/0206043].
- [9] S.K. Nechaev, M.V. Tamm, O.V. Valba, Path counting on simple graphs: from escape to localization, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2017**, 053301 (2017) [arXiv:1611.08880].
- [10] O. Rojo, R. Soto, The spectra of the adjacency matrix and Laplacian matrix for some balanced trees, *Linear algebra and its applications* **403**, 97 (2005),
- [11] A.S. Gorsky, S.K. Nechaev, A.F. Valov, On statistical models on super trees, *JHEP* **2018**, 123 (2018) [arXiv:1801.03067].

- [12] А. М. Переломов, Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения, УФН **123**, 23 (1977).
- [13] L. Susskind, Three Lectures on Complexity and Black Holes, (2018) [arXiv:1810.11563].
- [14] T.L. Curtright, C.K. Zachos, Quantum Mechanics in Phase Space, Asia Pacific Physics Newsletter **01**, 37 (2012) [arXiv:1104.5269v2].