Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)

Направленность (профиль) подготовки: Проблемы теоретической физики

Функция Вигнера киральных полей и поляризационный транспорт

(магистерская диссертация)

Студент:
Миткин Павел Георгиевич

Научные руководители:
Захаров Валентин Иванович,
д-р физ.-мат. наук, проф.
Садофьев Андрей Владимирович,
к. физ.-мат. наук

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Хорошо известно, в системах киральных фермионных частиц могут проявляться транспортные эффекты, тесно связанные с аномалиями в квантовой теории поля (КТП). Эти киральные эффекты могут существенно влиять на динамику различных систем: от кварк-глюонной плазмы (КГП) в экспериментах по столкновению тяжелых ионов до Вейлевских и Дираковских полуметаллов, и поэтому они до сих пор привлекают значительное внимание в литературе, см., например, обзоры [1, 2]. Недавно было замечено, что некоторые киральные эффекты можно обобщить на системы фотонов и других безмассовых частиц (или квазичастиц) со спином $s > \frac{1}{2}$, см. работы [3, 4]. В частности, было показано, что во вращающемся фотонном газе проявляется киральный вихревой эффект (CVE) для фотонов - разделение круговых поляризаций вдоль угловой скорости вращения [4, 5, 6, 7]. Это приводит к генерации плотности тока магнитной спиральности, что в свою очередь связано с поправками в фермионный CVE [8, 9] и, кроме того, может влиять на динамику микроскопических и макроскопических спиральностей в киральных средах, приводя к новому классу нестабильностей [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].
Киральные эффекты во внешних электромагнитных полях можно явно связать с аксиальной аномалией. Вопрос микроскопического происхождения киральных вихревых эффектов, особенно температурной части, более сложный, и все еще активно обсуждается, см. обзоры [1, 2] и ссылки в них. Действительно, вихревые эффекты проявляются даже в отсутствие электромагнитных полей, когда аксиальная аномалия выключена. Более того, температурная часть CVE в фермионном аксиальном токе остается даже в пределе нулевого заряда фермионов по электромагнитным полям. В литературе существуют точки зрения, что эта часть вихревого эффекта происходит из смешанной гравитационной аномалиии [23, 24] или глобальной гравитационной аномалии [8, 9], но окончательного согласия по этим гипотезам не достигнуто [4, 7, 25, 26, 27]. Тем не менее, если связь между термальной частью CVE и смешанной гравитационной аномалии существует [4, 28], то можно ожидать, что и фотонный CVE следует из аксиальной аномалии для фотонов в гравитационном поле [29, 30, 31, 32].
Одним из подходов, который позволяет связать CVE для разных спинов, является киральная кинетическая теория (CKT). В этом подходе аномальный киральный транспорт фермионов происходит из топологической фазы Берри, которая также связана с аномалией [33]. CKT может быть получена в рамках разных методов: из классического действия [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40], из worldline формализма [41, 42, 43], и с помощью функции Вигнера [36, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54].
В этой работе мы продолжаем исследование вихревых эффектов в формализме функции Вигнера. Несмотря на активную деятельность в этой области, основное внимание в литературе в рамках этого подхода уделяется фермионным степеням свободы. Эта работа стремится заполнить этот пробел. После общего обзора киральной кинетической теории в секции 2 и построения функции Вигнера для фермионов в секции 3 мы обращаемся к выводу функции Вигнера для вращающегося

фотонного газа в секции 4. В отличие от типичного подхода, состоящего в построении калибровочно-инвариантной функции Вигнера, построенной из тензоров напряженности, мы работаем с более простой "наивной" функцией Вигнера, и получаем ее для определенного класса калибровок, параметризованного единичным вектором n^μ. Оказывается, что в нашем подходе этот вектор естественным образом играет роль фрейм-вектора в СКТ [38, 39]. Для того, чтобы полностью фиксировать все свободные члены, мы используем, кроме уравнений движения, требование калибровочной инвариантности и явные результаты для конкретных наблюдаемых в КТП.

В качестве приложения построенного формализма мы вычисляем отклик на вращение для так называемых токов суперзилчей - бесконечного набора объектов, которые в контексте кирального транспорта в фотонном газе стали обсуждаться совсем недавно [28, 55], и которые предлагаются в качестве локальной калибровочно-инвариантной альтернативы обычному току спиральности $K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu F_{\alpha\beta}$. Заряд этих токов считает спиральность фотонов, взвешенную с какой-то степенью энергии, и в свободной теории сохраняется. Мы покажем, что в происхождение вихревого эффекта в этих токах (ZVE) в СКТ обязано фазе Берри в полной аналогией с CVE. Это позволяет сделать предположение, что если CVE связан с гравитационной аномалией, то аналогичная связь должна иметь место и для ZVE, то есть, сохранение суперзилча должно аномально нарушаться во внешнем гравитационном поле. Наконец, возможность обобщения СКТ на системы частиц произвольного спина указывает, что аналогичные токи можно построить, например, и для фермионов. Мы предлагаем вариант построения фермионных зилчей и с помощью функции Вигнера вычисляем вихревой отклик и для них, тем самым указывая на новый класс киральных эффектов. Все эти объекты могут оказаться полезны в изучении нестабильностей в киральной плазме и вкладов как фермионных, так и калибровочных полей в спиновую поляризацию адронов. Мы также надеемся, что дальнейшее изучение этих объектов поможет прояснить связь вихревых эффектов с аномалиями.

По результатам работы готовятся две публикации, одна из которых доступна в виде препринта [56].

Везде далее мы используем "преимущественно-отрицательную" сигнатуру метрики и нормировку $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$ для символа Леви-Чивиты.

2 Киральная кинетическая теория

Прежде чем переходить к формализму функции Вигнера, обратимся к традиционной ковариантной формулировке киральной кинетической теории, которая может быть найдена в [39], и кратко обсудим вопросы, связанные с лоренц-инвариантностью этой теории. В [39] рассматривается фермионный случай, но он может быть прямо обобщен на общий случай безмассовых частиц с произвольным (ненулевым) спином [3].

Для безмассовых частиц разложение полного углового момента на орбитальную и спиновую часть

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \Sigma^{\mu\nu} \tag{1}$$

становится плохо определенным из-за свободы в определении спиновой части $\Sigma^{\mu\nu}$. Для того, чтобы зафиксировать эту неопределенность, мы можем завести фрейм-вектор n^μ, такой, что $n^2 = 1$ и $(n \cdot p) \neq 0$, и потребовать, чтобы выполнялось условие

$$p_\mu \Sigma^{\mu\nu} = n_\mu \Sigma^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

так что спин тензор $\Sigma^{\mu\nu}$ имеет только пространственные компоненты в системе покоя n. Это условие полностью фиксирует $\Sigma^{\mu\nu}$ в виде:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \Sigma_n^{\mu\nu} = \lambda\, \hbar\, \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho n_\sigma}{p \cdot n}\,, \tag{3}$$

где λ - спиральность частицы (± 1 для фотонов и $\pm\frac{1}{2}$ для фермионов). Здесь и везде далее мы будем сохранять степени $\hbar$, участвующие в квази-классическом разложении, но положим $c = k_B = 1$.

Физические величины не должны зависеть от выбора системы отсчета, которая определеяется фрейм-вектором n^μ. Это приводит к тому, что при смене n^μ необходимо менять определение координаты x для того, чтобы полный угловой момент оставался неизменным. Этот эффект известен как сайд-джамп [57, 38, 58, 39] – дополнительный сдвиг координат порядка $\mathcal{O}(\hbar)$ безмассовой частицы при смене системы отсчета. В свою очередь, такой сдвиг приводит к тому, что функция распределения f перестает быть лоренц-скаляром и начинает зависеть от системы отсчета, так что наивное определение плотности тока $p^\mu f$ перестает быть лоренц-вектором, и его необходимо модифицировать компенсирующей добавкой того же порядка $\mathcal{O}(\hbar)$. Как было предложено в работе [39], модифицированный ток выглядит как:

$$j^\mu = p^\mu f + \Sigma_n^{\mu\nu} \partial_\nu f \tag{4}$$

В равновесии система частиц описывается функцией линейной комбинации интегралов движения $f(g)$, где $g = \beta_\mu p^\mu + \frac{1}{2} S_n^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu}$ в декартовых координатах. Здесь β^μ - это температурный 4-вектор, удовлетворяющий $T^2 \beta^\mu \beta_\mu = 1$ и фиксирующий определение 4-скорости элемента системы $u^\mu = T\beta^\mu$, а $\Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \beta^\nu - \partial^\nu \beta^\mu\right)$ - это термальный тензор завихренности, см. [39]. Такой равновесный ток действительно оказывается n-независимым и, используя тождество Шутена, в ведущем порядке по $\hbar$ мы получаем

$$j^\mu = p^\mu f(\beta_\nu p^\nu) - \frac{1}{2} \lambda\, \hbar\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \Omega_{\rho\sigma} f'(\beta \cdot p) + \mathcal{O}\left(\hbar^2\right)\,, \tag{5}$$

где функция распределения для газа частиц в зависимости от статистики есть

$$f(\beta \cdot p) = \theta(\beta \cdot p) f_{B,F}(\beta \cdot p) + \theta(-\beta \cdot p) f_{B,F}(-\beta \cdot p) \tag{6}$$

Для вычисления ожидания какой-либо физической величины в кинетической теории мы должны вычислить интеграл по фазовому пространству одночастичной плотности этой величины

$$\mathcal{O}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \, \delta(p^2) \; o(x,p) \, . \tag{7}$$

Плотность $o(x,p)$, вообще говоря, для каждой величины должна подбираться отдельно.

3 Функция Вигнера для фермионов

Формализм функции Вигнера для построения квантовой кинетической теории в последнее время привлекает большое внимание, см. работы [36, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Подход с функцией Вигнера позволяет описывать системы вне равновесия и особенно удобен для изучения спиновой поляризации в системах с вращением и внешними электромагнитными полями. Недавно появились работы, в которых предложено описание и во внешних гравитационных полях [50]. В этой секции, следуя классическим работам, указанным выше, мы кратко изложим общие принципы формализма на примере фермионной функции Вигнера, выпишем ее общий вид в порядке $\mathcal{O}(\hbar)$ и применим для вычисления нового вихревого эффекта в токах фермионного зилча.

3.1 Определение и общие уравнения

Функция Вигнера была предложена впервые в 1932 году как квантовый аналог функции распределения, позволяющий вычислять средние операторов как интеграл по фазовому пространству от величины, ставящейся в соответствие этому оператору. В отличие от классической функции распределения, функция Вигнера не везде положительно определена и может сильно осцилировать, особенно вне массовой поверхности, поэтому интерпретация ее в качестве настоящего распределения вероятности невозможна, и она скорее представляет инструмент для вычисления статистических данных для различных квантовых систем. Отчасти поэтому существуют различные определения функции Вигнера как для нерелятивистских, так и для релятивистских систем. Мы будем придерживаться уже ставшего стандартным подхода, полное педагогическое изложение которого можно найти в учебниках [59, 60].

Определим сначала ковариантный оператор Вигнера:

$$\hat{W}(x,p)=\int\frac{d^4y}{(2\pi\hbar)^4}e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\bar{\psi}\left(x+\frac{1}{2}y\right)\otimes\psi\left(x-\frac{1}{2}y\right) \tag{8}$$

и ковариантную функцию Вигнера как его квантово-статистическое среднее:

$$W(x,p)=\langle:\hat{W}(x,p):\rangle=\mathrm{Tr}\left\{\rho\,:\hat{W}(x,p):\right\} \tag{9}$$

где ρ - матрица плотности системы, определяющая ее состояние. $W(x,p)$ - матрица в спинорных индексах, явная запись дает:

$$\hat{W}_{ab}(x,p)=\int\frac{d^4y}{(2\pi\hbar)^4}e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\bar{\psi}_b\left(x+\frac{1}{2}y\right)\psi_a\left(x-\frac{1}{2}y\right) \tag{10}$$

Отметим, что в случае рассмотрения фермионов во внешнем или динамическом электромагнитном поле определение (9) небходимо модифицировать, вставив между полевыми операторами калибровочный линк [44, 46, 50]. В этой работе мы рассматриваем вихревые эффекты, поэтому этот случай опускаем. Отметим также отдельно, что в определении (9), вообще говоря, есть свобода рассматривать нормально-упорядоченную функцию Вигнера или нет. На протяжении всей работы мы будем рассматривать нормально упорядоченный вариант, если это не будет оговорено отдельно.

Функция (9) позволяет вычислить ожидание любого одночастичного оператора как интеграл по фазовому пространству (оговоримся, что это утверждение буквально верно для невзаимодействующих динамически полей). Так, например, для ожидания векторного тока имеем:

$$\langle:J^\mu(x):\rangle=\langle:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi:\rangle=\int\delta^4p\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu W(x,p) \tag{11}$$

где tr обозначает след по спинорным и по внутренним индексам, если они есть. Полезно для практических вычислений также иметь в виду формулу обращения

$$\bar{\psi}\left(x\right)\otimes\psi\left(y\right)=\int d^4p\,e^{-\frac{ip(x-y)}{\hbar}}\hat{W}\left(\frac{x+y}{2},p\right) \tag{12}$$

Отметим также, что можно рассматривать и многочастичные функции Вигнера и строить аналог цепочки уравнений Боголюбова [59]. Мы этот сюжет рассматривать не будем.

Полевые операторы в представлении Гейзенберга удовлетворяют уравнению Дирака:

$$\begin{cases}i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)=0\\ i\hbar\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu=0\end{cases} \tag{13}$$

Соответствующие уравнения на функцию Вигнера:

$$\begin{cases} \gamma^\mu \left(p_\mu + \frac{i\hbar}{2}\partial_\mu\right) W(x,p) = 0 \\ W(x,p)\gamma^\mu \left(p_\mu - \frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial}_\mu\right) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Для их решения разложим сначала функцию Вигнера по базису алгебры Клиффорда:

$$W(x,p) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{F} + i\gamma_5\mathcal{P} + \gamma^\mu V_\mu + \gamma_5\gamma^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right) \tag{15}$$

где $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]$ и $\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta$. Коэффициенты разложения определяются формулами

$$\begin{gathered} \mathcal{F} = \mathrm{tr}\, W \qquad \mathcal{P} = -i\mathrm{tr}\,\gamma_5 W \qquad S^{\mu\nu} = \mathrm{tr}\,\sigma^{\mu\nu}W \\ V^\mu = \mathrm{tr}\,\gamma^\mu W \qquad A^\mu = \mathrm{tr}\,\gamma^\mu\gamma_5 W \end{gathered} \tag{16}$$

Отметим, что из (11) следует, что V^μ есть не что иное, как плотность векторного тока. Аналогично A^μ - плотность аксиального тока. Удобно от этих функций перейти к линейным комбинациям, определяющим отдельно токи правых и левых частиц:

$$R^\mu = \frac{1}{2}\left(V^\mu + A^\mu\right) \qquad L^\mu = \frac{1}{2}\left(V^\mu - A^\mu\right) \tag{17}$$

В терминах этих функций уравнения (14) переписываются в виде трех систем уравнений

$$\begin{gathered} p^\mu\mathcal{F} - \tfrac{1}{2}\hbar\partial_\nu S^{\nu\mu} = 0 \qquad p^\mu\mathcal{P} + \tfrac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\hbar\partial_\nu S_{\alpha\beta} = 0 \\ \hbar\partial_\mu\mathcal{F} + 2p^\nu S_{\nu\mu} = 0 \qquad \hbar\partial_\mu\mathcal{P} - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\nu S^{\alpha\beta} = 0 \\ \\ p_\mu R^\mu = p_\mu L^\mu = \partial_\mu R^\mu = \partial_\mu L^\mu = 0 \\ \tfrac{1}{2}\hbar\partial_{[\mu}R_{\nu]} - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha R^\beta = 0 \\ \tfrac{1}{2}\hbar\partial_{[\mu}L_{\nu]} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha L^\beta = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

где антисимметризация индексов определена как $a^{[\mu}b^{\nu]} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$. Можно заметить, что уравнения на R^μ и L^μ отделяются от остальных. Таким образом, если нас интересуют отклики в токах, мы можем рассматривать их отдельно. Решение этих уравнений проводится порядок за порядком по $\hbar$, разложение по которой естественным образом совпадает с разложением по градиентам. Для случая фермионов это было сделано уже неоднократно и мы сразу приводим общее решение для R^μ [44, 46]:

$$R^\mu = 4\pi\delta(p^2)\left(p^\mu + \hbar\Sigma_n^{\mu\nu}\partial_\nu\right)f + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{19}$$

где $\Sigma_n^{\mu\nu}$ – спин-тензор, определенный в (3) с $\lambda = +\frac{1}{2}$. Обратим внимание, что это выражение совпадает с выражением для плотности тока частиц определенной поляризации в фазовом пространстве (4). Используя уравнение $\partial_\mu R^\mu = 0$ мы получаем аналог уравнения Лиувилля для функции f:

$$\delta(p^2)\, p^\mu \partial_\mu f = 0 \tag{20}$$

В равновесии f записывается в общем виде как функция $f(g)$ линейной комбинации интегралов движения - числа частиц, импульса, углового момента: $g = \alpha(x) + \beta^\mu(x)p_\mu + \hbar\gamma_{\mu\nu}(x)\Sigma_n^{\mu\nu}$. Уравнение (20), которое должно выполняться при произвольных светоподобных p^μ, позволяет ограничить параметры α, β^μ, $\gamma_{\mu\nu}$ условиями:

$$\begin{gathered}\partial_\mu\alpha = 0\\ p^\mu p^\nu \partial_\mu\beta_\nu = 0\\ \gamma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\partial^\perp_{[\mu}\beta_{\nu]}\end{gathered} \tag{21}$$

где знаком $\perp$ обозначена ортогональная проекция на вектор n^μ, определяющий Σ_n. Мы выбираем времениподобное β^μ и через него определяем 4-скорость среды: $\beta^\mu = \beta u^\mu$, $u^2 = 1$, $\beta = \frac{1}{T}$. Второе из уравнений (21) говорит, что в равновесии

$$\partial_\mu\beta_\nu + \partial_\nu\beta_\mu = \varphi(x)g_{\mu\nu} \tag{22}$$

где φ - скорость расширения фермионного газа $\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu\beta^\mu$. Обратим внимание, что для постоянного T она всегда равна нулю, поскольку из уравнения (22) мы имели бы $a^\mu = \frac{\varphi}{T}\beta^\mu$, а значит, $a^\mu u_\mu = \varphi = 0$. Тот факт, что безмассовый фермионный газ может равновесно расширяться, является следствием конформной инвариантности теории.

Параметр α играет роль химического потенциала: $\alpha = \beta\mu$, и мы видим, что в равновесии он должен быть константой, что является естественным требованием в отсутствие внешних полей. Уравнения (21) таким образом позволяют фиксировать аргумент функции распределения как:

$$g = \beta_\mu p^\mu - \beta\mu + \frac{\hbar}{2}\Sigma_n^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu} \tag{23}$$

Саму форму функции f необходимо фиксировать каким-то независимым способом, например, вычислением в равновесной теории поля, которое дает выражение, совпадающее с (6).

3.2 Приложение: вихревой эффект для фермионного зилча

Прежде чем переходить к вычислению фермионного зилча, обсудим сначала их определение и свойства [61, 62]. Фотонный зилч впервые был введен в работе [61] как нековариантный объект вида:

$$\boldsymbol{J}_Z = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{B}\times\dot{\boldsymbol{B}}\right) \quad , \quad Z = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}-\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}\right) , \tag{24}$$

который сохраняется в свободной теории Максвелла

$$\partial_0 Z + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}_Z = 0\,. \tag{25}$$

Нормировка выбрана таким образом, что соответствующий заряд Z в квантованной теории считает разницу между право- и левополяризованными фотонами, взвешенную с квадратом их энергии [28]. Можно заметить, что на самом деле ток и заряд зилча являются компонентами тензора

$$Z^{(3)}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_{\mu}{}^{\lambda}\partial_\rho F_{\lambda\nu} - F_{\mu}{}^{\lambda}\partial_\rho \tilde{F}_{\lambda\nu}\right) , \tag{26}$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ и уравнение (25) переписывается как $\partial^\mu Z^{(3)}_{\mu 00} = 0$. Как было показано в [62], можно пойти дальше и построить бесконечную башню тензорных токов, добавляя в определение выше производные. Общее определение зилча тогда дается формулой

$$Z^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = \frac{1}{2}\left(\tilde{F}_{\alpha_1}{}^{\lambda}\partial_{\alpha_2}..\partial_{\alpha_{s-1}}F_{\lambda\alpha_s} - F_{\alpha_1}{}^{\lambda}\partial_{\alpha_2}...\partial_{\alpha_{s-1}}\tilde{F}_{\lambda\alpha_s}\right) \tag{27}$$

и удовлетворяет $\partial^{\alpha_1}Z^{(s)}_{\alpha_1\ldots\alpha_s} = 0$. Заметим, что на самом деле тензорная структура позволяет строить разные сохраняющиейся “токи”, отвечающие одному и тому же заряду.

В цилиндре, вращающемся с угловой скоростью Ω, в равновесии с фотонным термальным излучением, эти токи имеют ненулевое ожидание [28] и представляют собой калибровочно-инвариантную меру поляризационного транспорта

$$Z^{(3)i}{}_{00} = \frac{8\pi^2 T^4}{45}\Omega^i\,. \tag{28}$$

В этой работе мы будем работать с токами, обладающим более высокой симметрией. Прямая проверка показывает, что симметризованный по всем индексам тензор зилча тоже сохраняется в свободной теории, см. [55]. Таким образом, мы определяем зилч как

$$\bar{Z}^{(s)}_{\alpha_1..\alpha_s} = \tilde{F}_{\lambda\{\alpha_1}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\alpha_2}...\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\alpha_{s-1}}F_{\alpha_s\}}{}^{\lambda} , \tag{29}$$

где симметризация индексов определена как $A_{\{a_1\ldots a_s\}} = \frac{1}{s!}\sum A_{\pi(a_1\ldots a_s)}$ с суммой по всем перестановкам π, и $\overset{\leftrightarrow}{\partial} = \frac{1}{2}\big(\overset{\rightarrow}{\partial}-\overset{\leftarrow}{\partial}\big)$. Отметим, что нетривиальные зилчи должны быть тензорами нечетного ранга, $s = 2k+1$ где $k \in \mathbb{Z}$.

В качестве фермионного объекта, который был бы аналогичен по свойствам фотонному зилчу, мы выбираем следующий тензор:

$$\mathcal{Z}_{\alpha_1..\alpha_s} = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_{\{\alpha_1}\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\alpha_2}..\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\alpha_s\}}\psi \tag{30}$$

Как и фотонный зилч, этот объект считает разницу правых и левых фермионов, взвешенную с $s-1$ степенями энергии. Нетрудно видеть, что на уравнениях движения свободной теории этот ток сохраняется:

$$\partial_\mu \mathcal{Z}^{\mu}{}_{\alpha_2..\alpha_s} = 0 \tag{31}$$

Нас интересует вихревой эффект в этом токе. В терминах функции Вигнера тензор (30) записывается в виде

$$\langle : \mathcal{Z}^{\alpha_1..\alpha_s}(x) : \rangle =$$

$$= \tfrac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\hbar^{2n}} \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4} p^{\{\alpha_1}..p^{\alpha_s-1} tr\gamma^{\alpha_s\}}\gamma_5 W(x,p) \tag{32}$$

$$= \tfrac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{\hbar^{2n}} \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4} p^{\{\alpha_1}..p^{\alpha_s-1}\left(R^{\alpha_s\}}(x,p) - L^{\alpha_s\}}(x,p)\right)$$

Для четных s это ожидание равно нулю. Если $s = 2n+1$, то, используя (19), для случая однородно вращающегося газа имеем на оси вращения:

$$\langle : \mathcal{Z}^{i0..0}(x=0) : \rangle = -\tfrac{2(-1)^n}{\hbar^{2n-1}}\pi \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\delta(p^2)p_0^{2n}\epsilon^{i\alpha\sigma\rho}p_\alpha\Omega_{\sigma\rho}f'(\beta\cdot p - \beta\mu)$$

$$-\tfrac{4n(-1)^n}{\hbar^{2n-1}(2n+1)}\pi \int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\delta(p^2)p_0^{2n-1}p^i\epsilon^{0\alpha\sigma\rho}p_\alpha\Omega_{\sigma\rho}f'(\beta\cdot p - \beta\mu) \tag{33}$$

$$= -\tfrac{4(-1)^n(2n+3)\pi}{3\hbar^{2n-1}(2n+1)}\tfrac{\Omega^i}{T}\int \tfrac{d^4p}{(2\pi)^4}\delta(p^2)p_0^{2n+1}f'(\beta\cdot p - \beta\mu)$$

Полный ответ включает в себя функцию полилогарифма и при необходимости может быть получен из формулы выше. Мы приводим чуть более наглядный результат для случаев $\mu = 0$:

$$\langle : \mathcal{Z}^{i0..0}(x=0) : \rangle = \tfrac{(-1)^n}{3\pi^2\hbar^{2n-1}}\Omega^i T^{2n+2}\left(1 - \tfrac{1}{2^{n+1}}\right)\tfrac{(2n+3)!}{2n+1}\zeta(2n+2) \tag{34}$$

И случая $T = 0$:

$$\langle : \mathcal{Z}^{i0..0}(x=0) : \rangle = \tfrac{(-1)^n}{6\pi^2\hbar^{2n-1}}\tfrac{2n+3}{2n+1}\Omega^i\mu^{2n+2} \tag{35}$$

Если положить $s = 1$, то есть $n = 0$, мы восстанавливаем обычные выражения для фермионного CVE.

4 Функция Вигнера для фотонов

Недавние работы, связанные с применением формализма функции Вигнера касаются преимущественно фермионных степеней свободы. В этой секции мы развиваем ранние работы [63, 64] и строим функцию Вигнера для вращающегося фотонного газа. Построенная функция Вигнера дает возможность получать плотности физических величин, соответствующих одночастичным операторам, в СКТ.
Определим сначала калибровочно-зависимую функцию Вигнера для абелевого калибровочного поля:

$$W^{\mu\nu}(x,p) = \int \frac{d^4y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot y} \langle : A^\mu\Big(x+\frac{y}{2}\Big) A^\nu\Big(x-\frac{y}{2}\Big) : \rangle \,, \tag{36}$$

Если можно пренебречь взаимодействиями, то уравнения на эту функцию, следующие из уравнений движения на свободные поля, в калибровке Лоренца выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(p^2 - \frac{\hbar^2}{4}\partial^2\right) W^{\mu\nu}(x,p) &= 0, & (37)\\ \hbar\, p\cdot\partial W^{\mu\nu}(x,p) &= 0\,. & (38) \end{aligned}$$

Калибровочное условие $\partial_\mu A^\mu = 0$ дополнительно дает уравнения:

$$\left(p_\alpha - i\frac{\hbar}{2}\partial_\alpha\right) W^{\alpha\mu}(x,p) = \left(p_\alpha + i\frac{\hbar}{2}\partial_\alpha\right) W^{\mu\alpha}(x,p) = 0 \tag{39}$$

Кроме того, мы фиксируем остаточную калибровочную свободу условием:

$$n_\alpha W^{\alpha\mu}(x,p) = n_\alpha W^{\mu\alpha}(x,p) = 0\,, \tag{40}$$

где n – времениподобный единичный вектор: $n^2 = 1$, a priori не имеющим ничего общего с вектором, фиксирующим систему отсчета в (3). Заметим, что для свободных электромагнитных полей Лоренцево калибровочное условие полностью совместимо с кулоновским условием, а вектор n^μ классифицирует семейство таких калибровок.
Эти уравнения, как обычно, изучаются порядок за порядком по ∂ или, что эквивалентно, по $\hbar$, и мы ищем решение в виде:

$$W^{\mu\nu} = W^{(0)\mu\nu} + \hbar W^{(1)\mu\nu} + \ldots\,. \tag{41}$$

4.1 Нулевой порядок

В ведущем порядке уравнения движения принимают вид:

$$
\begin{aligned}
p^2 W^{(0)\mu\nu}(x,p) &= 0 \\
p \cdot \partial W^{(0)\mu\nu}(x,p) &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Калибровочные условия сводятся к требованиям:

$$
\begin{aligned}
p_\alpha W^{(0)\alpha\mu}(x,p) &= p_\alpha W^{(0)\mu\alpha}(x,p) = 0 \\
n_\alpha W^{\alpha\mu}(x,p) &= n_\alpha W^{\mu\alpha}(x,p) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Как и в фермионном случае, нам необходимо сначала фиксировать форму общего скалярного множителя, который играет роль функции распределения, и не фиксируется однозначно уравнениями движения и калибровочными условиями. Мы опять используем анзац, мотивированный вычислением в термальной теории поля для (36) в случае статичного однородного газа:

$$
W^{(0)\mu\nu}(x,p) = P_n^{\mu\nu} F(x,p)\delta(p^2),
\tag{44}
$$

где $P_n^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu}{p\cdot n} - \frac{p^\mu p^\nu}{(p\cdot n)^2}$ – калибровочный проектор. Неопределенная функция $F(x,p)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля $p \cdot \partial F(x,p) = 0$. Отметим, что в общем случае $W^{(0)\mu\nu}$ не обязана быть симметричным тензором, но антисимметричные вклады исчезают в однородном пределе.

4.2 Первый порядок

В первом порядке по $\hbar$ уравнения движения выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
p^2 W^{(1)\mu\nu}(x,p) &= 0 \\
p \cdot \partial W^{(1)\mu\nu}(x,p) &= 0,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Калибровочные условия на $W^{(1)\mu\nu}$ дополнительно дают:

$$
p_\alpha W^{(1)\alpha\mu}(x,p) - \frac{i}{2}\partial_\alpha W^{(0)\alpha\mu}(x,p) = 0,
\tag{46}
$$

$$
p_\alpha W^{(1)\mu\alpha}(x,p) + \frac{i}{2}\partial_\alpha W^{(0)\mu\alpha}(x,p) = 0,
\tag{47}
$$

$$
n_\alpha W^{(1)\alpha\mu}(x,p) = n_\alpha W^{(1)\mu\alpha}(x,p) = 0.
\tag{48}
$$

Для построения общего вида $W^{(1)\mu\nu}$ разложим сначала ее на симметричную и антисимметричную части $W^{(1)} = W_S^{(1)} + W_A^{(1)}$. В терминах этих частей лоренцево калибровочное условие записывается как:

$$p_\alpha W_S^{(1)\alpha\mu} = 0 \,, \qquad p_\alpha W_A^{(1)\alpha\mu} = \frac{i}{2} P_n^{\mu\alpha} \partial_\alpha F(x,p) \delta(p^2) \,. \tag{49}$$

Здесь надо сделать определенную оговорку. Мы видим, что уравнения на симметричную часть не отличаются от уравнений для $W^{(0)}$. В частности, вклад от $W_S^{(1)}$ можно интерпретировать как приходящий из модификации аргумента функции $F(x,p)$ в $W^{(0)}$, членами $\mathcal{O}(\hbar)$, не зависящими от поляризации. Этот аргумент и явная проверка в конкретных вычислениях в следующих подсекциях показывают, что симметричная часть $W^{(1)}$ не дает вкладов в поляризационный транспорт. Таким образом, мы фокусируемся на определении $W_A^{(1)\mu\nu}$. Без ограничения общности мы можем параметризовать антисимметричную часть Вигнеровской функции, удовлетворяющей уравнениям (48) как

$$W_A^{(1)\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, n_\rho H_\sigma(x,p) \delta(p^2) \,, \tag{50}$$

где H_μ – это произвольная функция, удовлетворяющая условию $H \cdot n = 0$. Подстановка (50) в (49) дает:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, p_\nu n_\rho H_\sigma(x,p) \delta(p^2) = -\frac{i}{2} P_n^{\mu\alpha} \partial_\alpha F(x,p) \delta(p^2) \tag{51}$$

В общем случае можем представить решение этого уравнения в виде:

$$H_\mu(x,p) = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p^\nu n^\rho}{(p\cdot n)^2} \partial^\sigma F(x,p) - i \frac{\tilde{p}_\mu}{(p\cdot n)^2} U(x,p) \,, \tag{52}$$

где мы определили $\tilde{p}^\mu = p^\mu - n^\mu (p\cdot n)$ – ортогональную проекцию p^μ на n^μ, а U представляет собой однородную часть решения. В уравнении выше мы дополнительно использовали уравнение Лиувилля $\delta(p^2) p \cdot \partial F(x,p) = 0$. Таким образом, общее решение для $W_A^{(1)}$ записывается в виде:

$$W_A^{(1)\mu\nu} = -\frac{i}{2} \frac{\tilde{p}^{[\mu} P_n^{\nu]\alpha}}{(p\cdot n)^2} \partial_\alpha F(x,p) \delta(p^2) + i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{p_\rho n_\sigma}{p\cdot n} U(x,p) \delta(p^2) \,, \tag{53}$$

Как будет видно дальше, функция U уже дает вклад в поляризационный транспорт, и поэтому ее необходимо фиксировать. С другой стороны, все уравнения, с помощью которых это можно было бы сделать, нами уже использованы. Оказывается, однако, что эту проблему можно частично решить, потребовав явно калибровочной независимости для функции Вигнера, определенной для тензора напряженности калибровочного поля:

$$Y^{\mu\nu\rho\sigma}(x,p) = \hbar^2 \int \frac{d^4 y}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot y} \langle : F^{\mu\nu}\Big(x + \frac{y}{2}\Big) F^{\rho\sigma}\Big(x - \frac{y}{2}\Big) : \rangle \tag{54}$$

которая удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}&\left(p-\tfrac{i}{2}\hbar\partial\right)_\mu Y^{\mu\nu\rho\sigma}(x,p)=0\\&\left(p+\tfrac{i}{2}\hbar\partial\right)_\rho Y^{\mu\nu\rho\sigma}(x,p)=0\,.\end{aligned}\tag{55}$$

Обратим внимание, что мы перемасштабировали $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$ на $\hbar^2$, чтобы связать градиентное разложение с квазиклассическим. Вклад нулевого порядка в $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$ прямо следует из (44) и определяется явно калибровочно-инвариантным выражением

$$Y^{(0)\mu\nu\rho\sigma}(x,p)=-p^{[\mu}g^{\nu][\sigma}p^{\rho]}F(x,p)\delta(p^2)\,.\tag{56}$$

В первом порядке мы раскладываем $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$ на два слагаемых, симметричное и антисимметричное по отношению к перестановке индексов $\mu\nu\leftrightarrow\rho\sigma$. Точно так же, как в случае с $W_S^{(1)}$, мы никак не ограничиваем $Y_S^{(1)}$, поскольку эта часть не дает вклада в поляризационный транспорт, и фокусируемся на антисимметричной части

$$Y_A^{(1)\mu\nu\rho\sigma}(x,p)=p^{[\mu}W_A^{(1)\nu][\sigma}p^{\rho]}+\frac{i}{2}\partial^{[\rho}W^{(0)\sigma][\nu}p^{\mu]}-\frac{i}{2}\partial^{[\mu}W^{(0)\nu][\sigma}p^{\rho]}\,.\tag{57}$$

подставляя калибровочно-зависимые функции (44) и (53) в (57) получаем:

$$\begin{aligned}&Y_A^{(1)\mu\nu\rho\sigma}(x,p)=-\frac{i}{2}\left(p^{[\mu}g^{\nu][\sigma}\partial^{\rho]}-p^{[\rho}g^{\sigma][\nu}\partial^{\mu]}\right)F(x,p)\delta(p^2)\\&+i\left(\frac{p^{[\mu}n^{\nu]}p^{[\sigma}\partial^{\rho]}}{p\cdot n}-\frac{p^{[\rho}n^{\sigma]}p^{[\nu}\partial^{\mu]}}{p\cdot n}\right)F(x,p)\delta(p^2)\\&+ip^{[\mu}\epsilon^{\nu]\lambda\gamma[\sigma}p^{\rho]}\frac{p_\lambda n_\gamma}{p\cdot n}U(x,p)\delta(p^2)\,.\end{aligned}\tag{58}$$

Вторая и третья строчка в выражении выше явно зависят от калибровки через n, и, потенциально, через функцию $U(x,p)$. Тут уместно повторить рассуждения про общий вид равновесной функции распределения $F(x,p)$, которые были приведены в предыдущей секции. В этой секции мы будем писать $F=F(\beta\cdot p)$, имея в виду, что добавки в аргумент порядка $\mathcal{O}(\hbar)$, зависят они от полризации или нет, зашиты в определение $W^{(1)}$. Опять же, на уравнениях движения $\beta^\mu(x)$, как и в фермионном случае, удовлетворяет конформному уравнению Киллинга $\partial_\mu\beta_\nu+\partial_\nu\beta_\mu=g_{\mu\nu}\,\phi$, где ϕ - произвольная скалярная функция, исчезающая при $T=const$. После некоторых вычислений можно видеть, что требование калибровочной инвариантности фиксирует

$$U=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{p_\rho n_\sigma}{p\cdot n}\Omega_{\mu\nu}F'(\beta\cdot p)+U_0\,,\tag{59}$$

где U_0 есть n-независимая часть U. В итоге для калибровочно-инвариантной функции Вигнера имеем:

$$Y_A^{(1)\mu\nu\rho\sigma}(x,p) = -\frac{i}{2}\left(p^{[\mu}g^{\nu][\sigma}\partial^{\rho]} - p^{[\rho}g^{\sigma][\nu}\partial^{\mu]}\right)F(\beta\cdot p)\delta(p^2)$$
$$+ip^{[\mu}\Omega^{\nu][\sigma}p^{\rho]}F'(\beta\cdot p)\delta(p^2) + i\epsilon^{\mu\nu\lambda[\sigma}p^{\rho]}p_\lambda U_0(x,p)\delta(p^2)\,, \tag{60}$$

Таким образом, мы фиксировали всю антисимметричную часть функции Вигнера с точностью до функции U_0. Для того, чтобы прояснить физический смысл разных частей этой функции, мы можем вычислить с помощью нее какую-нибудь физическую величину. Этим мы и займемся в следующей секции.

4.3 Приложение: фотонный зилч

Используя построенную функцию Вигнера, мы можем вычислить ведущий вклад в ток фотонного зилча (29), ожидание которого записывается в виде:

$$\left\langle :\bar{Z}^{(s)}_{\alpha_1..\alpha_s}:\right\rangle =$$
$$= 2\frac{(-1)^{\frac{s+1}{2}}}{\hbar^{s-1}}\int d^4p\,\left[p_{\{\alpha_2}..p_{\alpha_s}\right]\left(p_{\alpha_1\}}U + \epsilon_{\alpha_1\}\mu\nu\sigma}\frac{p^\mu n^\nu}{p\cdot n}\partial^\sigma F(\beta\cdot p)\right)\delta(p^2)\,. \tag{61}$$

Это выражение уже позволяет провести некоторые рассуждение о физическом смысле U. Прежде всего заметим, что форма фиксированной части U позволяет нам идентифицировать в уравнении выше фазовую плотность для тока зилча в кинетической теории в форме

$$z^{(s,\lambda)}_{\alpha_1..\alpha_s} = \lambda(-1)^{\frac{s+1}{2}}p_{\{\alpha_1}p_{\alpha_2}...j_{\alpha_s\}}\,, \tag{62}$$

Если мы идентифицируем разность токов поляризаций в виде

$$\frac{1}{2(2\pi)^3\hbar}\left(j_\alpha^{\lambda=+} - j_\alpha^{\lambda=-}\right) = p_\alpha U + \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma}\frac{p^\mu n^\nu}{p\cdot n}\partial^\sigma F(\beta\cdot p) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{63}$$

где функция F выбрана как

$$F(\beta\cdot p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\theta(\beta\cdot p)f_B(\beta\cdot p) + \theta(-\beta\cdot p)f_B(-\beta\cdot p)\right]. \tag{64}$$

Отметим отдельно, что в случае калибровочного поля, по-видимому, фиксация разницы этих токов - лучшее, что можно сделать, поскольку из-за калибровочной свободы ток самих частиц определен плохо. Тем не менее, этого достаточно в нашей задаче - сравнивая формулы (4) из кинтеории и (59), мы видим, что мы должны положить $U_0 = 0$ для корректного воспроизведения СКТ. Независимая проверка этого выбора может быть проведена путем подсчета известного объекта, вычисленного в КТП. Таким объектом может быть оригинальный зилч (26). При $U_0 = 0$ мы получаем

$$\left\langle : Z^{(3)3}{}_{00} : \right\rangle \Big|_{r\to 0} = \tag{65}$$
$$= -\frac{2}{\hbar^2}\int d^4p\, p_{\{0}\left(p_{3\}}U + \epsilon_{3\}\mu\nu\sigma}\frac{p^\mu n^\nu}{p\cdot n}\partial^\sigma F(\beta\cdot p)\right) p_0\, \delta(p^2) = \frac{8\pi^2 T^4}{45\hbar^2}\Omega,$$

в лабораторной системе отсчета. Этот результат в точности совпадает с результатом, полученным в работе [28]. Наконец, выбор $U_0 = 0$ подтверждается прямым вычислением в теории поля для произвольного s, см. [56].

С физической точки зрения U, таким образом, представляет собой разность функций распределения $f_\pm$ для разных поляризаций в первом порядке по градиентам. Замечательно, что параметр n^μ, фиксирующий калибровочную свободу, естественным образом играет роль фрейм-вектора для спина фотонов, что помогает понять физический смысл фрейм-вектора в формализме функции Вигнера и для безмассовых частиц других спинов.

Мы также можем вычислить и ожидание обычного тока спиральности K^μ. Используя (53) находим:

$$\langle : K^i : \rangle \Big|_{r\to 0} = \left[-2\int d^4p\, \left(2p_i U + \epsilon_{i\nu\rho\sigma}\frac{p^\nu n^\rho}{p\cdot n}\partial^\sigma F(\beta\cdot p)\right)\delta(p^2)\right] \tag{66}$$

где мы выбрали конкретный $n^\mu = (1,0,0,0)$. Отметим, что структура выражения выше отличаеся от структуры обычной плотности тока в СКТ, который появляется в токах зилча, что указывает на явную калибровочную зависимость результата. Мы оставляем дальнейшее изучение калибровочной зависимости фотонного CVE и ее отношение к поправкам в фермионный CVE на будущее.

Наконец, для того, чтобы прояснить физический смысл U_0, мы можем обратиться к плотности заряда для зилча в статическом фотонном газе в равновесии. Сохранение спиральности позволяет ввести аналог кирального химического потенциала в функцию распределения, то есть, из $f_B(g)$ сделать $f_B(g_\lambda)$, где $g_\lambda = \beta(\omega - \lambda\mu_\lambda)$. Вычисление в термальной теории поля дает:

$$\left\langle : \bar{Z}^{(s)}_{0..0} : \right\rangle = \frac{(-1)^{\frac{s+1}{2}}}{\hbar^s}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\omega^{s-1}\left[f_B(g_+) - f_B(g_-)\right], \tag{67}$$

Сравнивая это выражение с (61) в случае $\mu_\lambda \ll T$, мы можем отождествить $U_0 = -(\beta\mu_\lambda/\hbar)F'(\beta\cdot p)$, то есть, U_0 отражает эффект введения кирального химического потенциала для фотонов. Таким образом, наша постановка задачи с $U_0 = 0$ соответствует фотонному газу с нулевой плотностью спиральности и заряда зилча в равновесии.

5 Заключение

В этой работе мы построили функцию Вигнера для вращающегося газа безмассовых частиц с разным спином. В секции 3 мы, следуя классическим работам, построили функцию Вигнера для безмассового фермионного поля и увидели, что из этого формализма мы можем построить киральную кинетическую теорию, описанную в секции 2. В качестве немедленного приложения с помощью этой функции мы вычислили отклик в токах фермионного зилча на вращение - фермионный ZVE, тем самым расширив класс киральных эффектов. Отметим, что в подходе киральной кинетической теории эти эффекты, как и обычный CVE, можно связать с топологической фазой Берри. В секции 4 мы распространили этот метод на системы абелевых калибровочных полей. По сравнению с имеющимися работами [63, 64], в которых основное внимание сразу уделяется калибровочно-инвариантной функции Вигнера (54), с технической точки зрения более сложному объекту, мы предлагаем более простой подход и строим явный вид обычной функции Вигнера в конкретном классе калибровок, параметризованной вектором n^μ, см. формулы (44) и (53). Требование калибровочной инвариантности (54) при этом оказывается необходимым для частичной фиксации свободных членов в (53). Вычисление конкретных наблюдаемых помогает прояснить физический смысл оставшихся свободных членов и фиксировать и их тоже. С помощью фиксированной функции Вигнера мы вычислили отклик на вращение для токов фотоного зилча и для тока конкретного спина получили результат, согласующийся с [28].

Общее происхождение ZVE и CVE как для фермионов, так и для фотонов может углубить понимание связи между вихревыми откликами в киральных средах и аномалиями в микроскопических теориях, описывающих эти среды. В самом деле, если термальная часть фотонного или фермионного CVE связана с соответствующей смешанной гравитационной аномалией (или глобальной гравитационной аномалией), то аналогичная связь ожидается и в случае токов зилча, что указывало бы на новый класс аномалий.

Замечательно, что промежуточное выражение, связывающее плотности фотонного тока для разных спиральностей (63), полученное в этом формализме, показывает, что вектор n^μ, фиксирующий калибровку, играет роль фрейм-вектора в СКТ, необходимого для фиксации определения спинового тензора. Этого можно было ожидать, поскольку полный угловой момент фотона не может быть калибровочно-инвариантным способом разложен на орбитальную и спиновую часть.

Поляризационный транспорт калибровочных полей представляет особенный интерес в связи с экспериментами по измерениям поляризации адронов в нецентральных столкновениях тяжелых ионов на ускорителях RHIC и LHC [65, 66]. Поляризация конечных состояний в этих экспериментах определяется спиновой полризацией кварков и глюонов в КГП, которая, в свою очередь, должна быть связана с транспортом спиральности и киральными эффектами. Тем не менее, глюонный вклад в спиновую поляризацию среды до сих пор мало изучен в литературе, поскольку большинство моделей фокусируются на поляризации кварков или работают сразу со спиновой поляризацией адронов без уточнения информации о происхождении начальных условий при “вымерзании” КГП [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]. Полученные нами эффекты могут помочь изучить глюонные вклады в спиновую поляризацию КГП и требуют дальнейшего изучения.

Список литературы

[1] D. E. Kharzeev, J. Liao, S. A. Voloshin & G. Wang, *"Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions – A status report"*, Prog. Part. Nucl. Phys. **88**, 1 (2016), `arXiv:1511.04050`.

[2] X.-G. Huang, *"Electromagnetic fields and anomalous transports in heavy-ion collisions — A pedagogical review"*, Rept. Prog. Phys. **79**, 076302 (2016), `arXiv:1509.04073`.

[3] X.-G. Huang & A. V. Sadofyev, *"Chiral Vortical Effect For An Arbitrary Spin"*, JHEP **1903**, 084 (2019), `arXiv:1805.08779`.

[4] A. Avkhadiev & A. V. Sadofyev, *"Chiral Vortical Effect for Bosons"*, `arXiv:1702.07340`.

[5] N. Yamamoto, *"Photonic chiral vortical effect"*, Phys. Rev. **D96**, 051902 (2017), `arXiv:1702.08886`.

[6] V. A. Zyuzin, *"Landau levels for electromagnetic wave"*, `arXiv:1610.08048v2`.

[7] G. Yu. Prokhorov, O. V. Teryaev & V. I. Zakharov, *"CVE for photons: black-hole vs. flat-space derivation"*, `arXiv:2003.11119`.

[8] D.-F. Hou, H. Liu & H.-c. Ren, *"A Possible Higher Order Correction to the Vortical Conductivity in a Gauge Field Plasma"*, Phys. Rev. **D86**, 121703 (2012), `arXiv:1210.0969`.

[9] S. Golkar & D. T. Son, *"(Non)-renormalization of the chiral vortical effect coefficient"*, JHEP **1502**, 169 (2015), `arXiv:1207.5806`.

[10] Y. Akamatsu & N. Yamamoto, *"Chiral Plasma Instabilities"*, Phys. Rev. Lett. **111**, 052002 (2013), `arXiv:1302.2125`.

[11] Z. V. Khaidukov, V. P. Kirilin, A. V. Sadofyev & V. I. Zakharov, *"On Magnetostatics of Chiral Media"*, `arXiv:1307.0138`.

[12] V. P. Kirilin, A. V. Sadofyev & V. I. Zakharov, *"Anomaly and long-range forces"*, in *"Proceedings, 100th anniversary of the birth of I. Ya. Pomeranchuk (Pomeranchuk 100): Moscow, Russia, June 5-6, 2013"*, p. 272-286.

[13] A. Avdoshkin, V. P. Kirilin, A. V. Sadofyev & V. I. Zakharov, *"On consistency of hydrodynamic approximation for chiral media"*, Phys. Lett. **B755**, 1 (2016), `arXiv:1402.3587`.

[14] C. Manuel & J. M. Torres-Rincon, *"Dynamical evolution of the chiral magnetic effect: Applications to the quark-gluon plasma"*, Phys. Rev. **D92**, 074018 (2015), `arXiv:1501.07608`.

[15] P. V. Buividovich & M. V. Ulybyshev, *"Numerical study of chiral plasma instability within the classical statistical field theory approach"*, Phys. Rev. **D94**, 025009 (2016), `arXiv:1509.02076`.

[16] N. Yamamoto, *"Chiral transport of neutrinos in supernovae: Neutrino-induced fluid helicity and helical plasma instability"*, Phys. Rev. **D93**, 065017 (2016), `arXiv:1511.00933`.

[17] Y. Hirono, D. Kharzeev & Y. Yin, *"Self-similar inverse cascade of magnetic helicity driven by the chiral anomaly"*, Phys. Rev. **D92**, 125031 (2015), `arXiv:1509.07790`.

[18] V. P. Kirilin & A. V. Sadofyev, *"Anomalous Transport and Generalized Axial Charge"*, Phys. Rev. **D96**, 016019 (2017), `arXiv:1703.02483`.

[19] Y. Li & K. Tuchin, *"Electrodynamics of dual superconducting chiral medium"*, Phys. Lett. **B776**, 270 (2018), `arXiv:1708.08536`.

[20] K. Tuchin, *"Time-evolution of magnetic field in hot nuclear matter with fluctuating topological charge"*, `arXiv:1911.01357`.

[21] M. Mace, N. Mueller, S. Schlichting & S. Sharma, *"Chiral instabilities & the onset of chiral turbulence in QED plasmas"*, `arXiv:1910.01654`.

[22] M. Horvath, D. Hou, J. Liao & H.-c. Ren, *"Chiral magnetic response to arbitrary axial imbalance"*, `arXiv:1911.00933`.

[23] K. Landsteiner, E. Megias & F. Pena-Benitez, *"Gravitational Anomaly and Transport"*, Phys. Rev. Lett. **107**, 021601 (2011), `arXiv:1103.5006`.

[24] K. Landsteiner, E. Megias, L. Melgar & F. Pena-Benitez, *"Holographic Gravitational Anomaly and Chiral Vortical Effect"*, JHEP **1109**, 121 (2011), `arXiv:1107.0368`.

[25] P. Glorioso, H. Liu & S. Rajagopal, *"Global Anomalies, Discrete Symmetries, and Hydrodynamic Effective Actions"*, JHEP **1901**, 043 (2019), `arXiv:1710.03768`.

[26] A. Flachi & K. Fukushima, *"Chiral vortical effect with finite rotation, temperature, and curvature"*, Phys. Rev. **D98**, 096011 (2018), `arXiv:1702.04753`.

[27] M. Stone & J. Kim, *"Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion"*, Phys. Rev. **D98**, 025012 (2018), `arXiv:1804.08668`.

[28] M. N. Chernodub, A. Cortijo & K. Landsteiner, *"Zilch vortical effect"*, Phys. Rev. **D98**, 065016 (2018), `arXiv:1807.10705`.

[29] A. D. Dolgov, I. B. Khriplovich & V. I. Zakharov, *"Chiral Boson Anomaly in a Gravitational Field"*, JETP Lett. **45**, 651 (1987), [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.45,511(1987)].

[30] A. I. Vainshtein, A. D. Dolgov, V. I. Zakharov & I. B. Khriplovich, *"CHIRAL PHOTON CURRENT AND ITS ANOMALY IN A GRAVITATIONAL FIELD"*, Sov. Phys. JETP **67**, 1326 (1988), [Zh. Eksp. Teor. Fiz.94,54(1988)].

[31] A. D. Dolgov, I. B. Khriplovich, A. I. Vainshtein & V. I. Zakharov, *"Photonic Chiral Current and Its Anomaly in a Gravitational Field"*, Nucl. Phys. **B315**, 138 (1989).

[32] I. Agullo, A. del Rio & J. Navarro-Salas, *"Electromagnetic duality anomaly in curved spacetimes"*, Phys. Rev. Lett. **118**, 111301 (2017), `arXiv:1607.08879`.

[33] D. T. Son & N. Yamamoto, *"Berry Curvature, Triangle Anomalies, and the Chiral Magnetic Effect in Fermi Liquids"*, Phys. Rev. Lett. **109**, 181602 (2012), `arXiv:1203.2697`.

[34] M. A. Stephanov & Y. Yin, *"Chiral Kinetic Theory"*, Phys. Rev. Lett. **109**, 162001 (2012), `arXiv:1207.0747`.

[35] D. T. Son & N. Yamamoto, *"Kinetic theory with Berry curvature from quantum field theories"*, Phys. Rev. **D87**, 085016 (2013), `arXiv:1210.8158`.

[36] J.-W. Chen, S. Pu, Q. Wang & X.-N. Wang, *"Berry Curvature and Four-Dimensional Monopoles in the Relativistic Chiral Kinetic Equation"*, Phys. Rev. Lett. **110**, 262301 (2013), `arXiv:1210.8312`.

[37] C. Manuel & J. M. Torres-Rincon, *"Kinetic theory of chiral relativistic plasmas and energy density of their gauge collective excitations"*, Phys. Rev. D **89**, 096002 (2014), `arXiv:1312.1158`.

[38] J.-Y. Chen, D. T. Son, M. A. Stephanov, H.-U. Yee & Y. Yin, *"Lorentz Invariance in Chiral Kinetic Theory"*, Phys. Rev. Lett. **113**, 182302 (2014), `arXiv:1404.5963`.

[39] J.-Y. Chen, D. T. Son & M. A. Stephanov, *"Collisions in Chiral Kinetic Theory"*, Phys. Rev. Lett. **115**, 021601 (2015), `arXiv:1502.06966`.

[40] E. Gorbar, V. Miransky, I. Shovkovy & P. Sukhachov, *"Second-order chiral kinetic theory: Chiral magnetic and pseudomagnetic waves"*, Phys. Rev. B **95**, 205141 (2017), `arXiv:1702.02950`.

[41] N. Mueller & R. Venugopalan, *"The chiral anomaly, Berry's phase and chiral kinetic theory, from world-lines in quantum field theory"*, Phys. Rev. D **97**, 051901 (2018), `arXiv:1701.03331`.

[42] N. Mueller & R. Venugopalan, *"Worldline construction of a covariant chiral kinetic theory"*, Phys. Rev. **D96**, 016023 (2017), `arXiv:1702.01233`.

[43] N. Mueller & R. Venugopalan, *"Constructing phase space distributions with internal symmetries"*, Phys. Rev. D **99**, 056003 (2019), `arXiv:1901.10492`.

[44] J.-H. Gao, Z.-T. Liang, S. Pu, Q. Wang & X.-N. Wang, *"Chiral Anomaly and Local Polarization Effect from Quantum Kinetic Approach"*, Phys. Rev. Lett. **109**, 232301 (2012), `arXiv:1203.0725`.

[45] Y. Hidaka, S. Pu & D.-L. Yang, *"Relativistic Chiral Kinetic Theory from Quantum Field Theories"*, Phys. Rev. **D95**, 091901 (2017), `arXiv:1612.04630`.

[46] A. Huang, S. Shi, Y. Jiang, J. Liao & P. Zhuang, *"Complete and Consistent Chiral Transport from Wigner Function Formalism"*, `arXiv:1801.03640`.

[47] J.-H. Gao, Z.-T. Liang, Q. Wang & X.-N. Wang, *"Disentangling covariant Wigner functions for chiral fermions"*, Phys. Rev. **D98**, 036019 (2018), `arXiv:1802.06216`.

[48] J.-H. Gao & Z.-T. Liang, *"Relativistic Quantum Kinetic Theory for Massive Fermions and Spin Effects"*, Phys. Rev. **D100**, 056021 (2019), `arXiv:1902.06510`.

[49] G. Prokhorov, O. Teryaev & V. Zakharov, *"Axial current in rotating and accelerating medium"*, Phys. Rev. **D98**, 071901 (2018), `arXiv:1805.12029`.

[50] Y.-C. Liu, L.-L. Gao, K. Mameda & X.-G. Huang, *"Chiral kinetic theory in curved spacetime"*, Phys. Rev. D **99**, 085014 (2019), `arXiv:1812.10127`.

[51] K. Hattori, Y. Hidaka & D.-L. Yang, *"Axial Kinetic Theory and Spin Transport for Fermions with Arbitrary Mass"*, Phys. Rev. **D100**, 096011 (2019), `arXiv:1903.01653`.

[52] Z. Wang, X. Guo, S. Shi & P. Zhuang, *"Mass Correction to Chiral Kinetic Equations"*, Phys. Rev. D **100**, 014015 (2019), `arXiv:1903.03461`.

[53] N. Weickgenannt, X.-L. Sheng, E. Speranza, Q. Wang & D. H. Rischke, *"Kinetic theory for massive spin-1/2 particles from the Wigner-function formalism"*, Phys. Rev. **D100**, 056018 (2019), `arXiv:1902.06513`.

[54] Y.-C. Liu, K. Mameda & X.-G. Huang, *"Covariant Spin Kinetic Theory I: Collisionless Limit"*, `arXiv:2002.03753`.

[55] C. Copetti & J. Fernandez-Pendas, *"Higher spin vortical Zilches from Kubo formulae"*, Phys. Rev. **D98**, 105008 (2018), `arXiv:1809.08255`.

[56] X.-G. Huang, P. Mitkin, A. V. Sadofyev & E. Speranza, *"Zilch Vortical Effect, Berry Phase, and Kinetic Theory"*, `arXiv:2006.03591`.

[57] B. S. Skagerstam, *"Localization of massless spinning particles and the Berry phase"*, `hep-th/9210054`.

[58] C. Duval & P. A. Horvathy, *"Chiral fermions as classical massless spinning particles"*, Phys. Rev. **D91**, 045013 (2015), `arXiv:1406.0718`.

[59] R. Hakim, *"Introduction to relativistic statistical mechanics: Classical and quantum"*, p. 1-538.

[60] S. De Groot, *"Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications"*.

[61] D. M. Lipkin, *"Existence of a New Conservation Law in Electromagnetic Theory"*, Journal of Mathematical Physics **5**, 696 (1964).

[62] T. W. B. Kibble, *"Conservation Laws for Free Fields"*, Journal of Mathematical Physics **6**, 1022 (1965).

[63] D. Vasak, M. Gyulassy & H. T. Elze, *"Quantum Transport Theory for Abelian Plasmas"*, Annals Phys. **173**, 462 (1987).

[64] H. T. Elze, M. Gyulassy & D. Vasak, *"Transport Equations for the QCD Gluon Wigner Operator"*, Phys. Lett. **B177**, 402 (1986).

[65] STAR Collaboration, L. Adamczyk et al., *"Global Λ hyperon polarization in nuclear collisions: evidence for the most vortical fluid"*, Nature **548**, 62 (2017), `arXiv:1701.06657`.

[66] ALICE Collaboration, S. Acharya et al., *"Measurement of spin-orbital angular momentum interactions in relativistic heavy-ion collisions"*, arXiv:1910.14408.

[67] F. Becattini, L. Csernai & D. J. Wang, *"Λ polarization in peripheral heavy ion collisions"*, Phys. Rev. **C88**, 034905 (2013), arXiv:1304.4427, [Erratum: Phys. Rev.C93,no.6,069901(2016)].

[68] F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna & E. Grossi, *"Relativistic distribution function for particles with spin at local thermodynamical equilibrium"*, Annals Phys. **338**, 32 (2013), arXiv:1303.3431.

[69] F. Becattini, G. Inghirami, V. Rolando, A. Beraudo, L. Del Zanna, A. De Pace, M. Nardi, G. Pagliara & V. Chandra, *"A study of vorticity formation in high energy nuclear collisions"*, Eur. Phys. J. **C75**, 406 (2015), arXiv:1501.04468, [Erratum: Eur. Phys. J.C78,no.5,354(2018)].

[70] I. Karpenko & F. Becattini, *"Study of Λ polarization in relativistic nuclear collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 -200 GeV"*, Eur. Phys. J. **C77**, 213 (2017), arXiv:1610.04717.

[71] Y. Xie, D. Wang & L. P. Csernai, *"Global Λ polarization in high energy collisions"*, Phys. Rev. **C95**, 031901 (2017), arXiv:1703.03770.

[72] D.-X. Wei, W.-T. Deng & X.-G. Huang, *"Thermal vorticity and spin polarization in heavy-ion collisions"*, Phys. Rev. C **99**, 014905 (2019), arXiv:1810.00151.

[73] X.-L. Xia, H. Li, Z.-B. Tang & Q. Wang, *"Probing vorticity structure in heavy-ion collisions by local Λ polarization"*, Phys. Rev. C **98**, 024905 (2018), arXiv:1803.00867.

[74] Y.-C. Liu & X.-G. Huang, *"Anomalous chiral transports and spin polarization in heavy-ion collisions"*, arXiv:2003.12482.

[75] F. Becattini & M. A. Lisa, *"Polarization and Vorticity in the Quark Gluon Plasma"*, arXiv:2003.03640.