Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
«Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский Физико-Технический институт" (Национальный Исследовательский Университет)»

Физтех-школа Ландау, физики и исследований
Факультет общей и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Исследование тока для поля фермионов в постоянном внешнем электрическом поле

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:
студент 625 группы
Садеков Дамир Ильдарович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Москва, 2020

Содержание

1 Введение **3**

2 Постановка задачи **4**

3 Моды **5**
- 3.1 Решения уравнения Дирака 5
- 3.2 Разложение фермионного поля 8

4 Древесный ток **10**
- 4.1 Ток фермионов 10
- 4.2 Комментарий о теории с бозонами во внешнем поле 11

5 Более общий случай **14**
- 5.1 Обобщённые моды 14
- 5.2 Новый древесный ток 15
  - 5.2.1 Нулевой ток 15
  - 5.2.2 Конечный ток 16
  - 5.2.3 Ток в лидирующем приближении 17
- 5.3 Ток для нетривиального состояния 18

6 Заключение **20**

A Асимптотики мод **21**

B Вывод выражения для тока **23**

1 Введение

Известным явлением в квантовой теории поля является то, что наличие сильных фоновых полей приводит к неравновесному состоянию в теории, если возможно рождение частиц. Это наблюдается в различных физических системах: например, в расширяющемся пространстве-времени де Ситтера [1, 2], на фоне внешнего электрического поля [3, 4] и других ситуациях [5, 6]. В таких задачах интересно изучить динамику состояния системы, в частности, эволюцию заселённости энергетических уровней и аномального квантового среднего. При этом для решения такой задачи необходимо пользоваться диаграмной техникой Швингера-Келдыша, так как фейнмановская техника неприменима в нестационарных ситуациях [2-8]. Можно поставить и другой вопрос, требующий исследования - вопрос о выборе начального состояния теории. В теории без внешних полей при квантовании поля принято выбирать гармоники, отвечающие положительно- и отрицательно-частотным решениям [8, 15], причём при таком выборе функции Уайтмана пуанкаре-инвариантны. Оказывается, что если выбрать гармоники иначе - в виде линейной комбинации разночастотных решений, то соответствующие функции Уайтмана не будут являться функциями от геодезического расстояния, и, следовательно, выбранное основное состояние теории не уважает пуанкаре-инвариантность [8, 10]. Однако, при наличии внешнего "классического фона" понятия положительно- и отрицательно-частотных гармоник теряют смысл (также как и пуанкаре-инвариантность), поэтому мы должны ввести дополнительное требование на основании физических соображений. А именно, мы требуем, чтобы гармоники переходили в положительно-/отрицательно-частотные гармоники в ультрафиолетовом пределе. Физически это означает, что исследуемые поля перестают чувствовать влияние внешнего фона на достаточно больших энергиях - это требование называется корректным адамаровым поведением мод [5, 7]. В отсутствие внешних полей физически ожидается, что неправильно выбранные состояния относительно сформулированного требования в результате эволюции системы с взаимодействием перейдут в термально возбуждённые над вакуумом состояния - в некоторых простых ситуациях это показано, например, в [8]. При наличии же внешних полей такая динамика неочевидна, поэтому и возникает потребность в её исследовании.

Итак, в данной работе мы хотим продемонстрировать к каким следствиям может привести разнообразие основных состояний теории на примере древесного тока фермионного поля на фоне постоянного внешнего электрического поля. Наличие тока связано с эффектом рождения частиц во внешнем поле, в частности, в классических работах Швингера и последующих исследованиях [14, 13] было получено число частиц, рождающихся в единицу объёма в единицу времени в данной задаче:

$$I = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}},$$

так что наличие данного экспоненциального фактора в наших результатах неудивительно.

Данная дипломная работа состоит из следующих основных частей. В разделе 2 мы вводим основные обозначения и выписываем действие рассматриваемой теории. В разделе 3 мы разрешаем уравнения движения и квантуем поле фермионов согласно требованию правильного адамарова поведения. В разделе 4 получен ответ для тока на древесном уровне для произвольного решения уравнения движения из раздела 3, включая решения с правильным УФ поведением, а также приведено сравнение с результатами в теории с бозонами в постоянном внешнем электрическом поле. Наконец, в разделе 5 рассмотрен наиболее общий выбор основного состояния теории и приведены основные следствия разнообразия такого выбора.

2 Постановка задачи

Будем рассматривать теорию с фермионами на фоне внешнего электрического поля в (3+1) пространстве-времени

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu - m \right) \psi - j^{\mu,cl} A_\mu \right], \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\ D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Далее будут использоваться гамма-матрицы в стандартном представлении:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},\ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{\mathbb{1}},\ g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Чтобы изучать фермионы во внешнем электрическом поле, мы разделяем поле на "классическую" часть A_μ^{cl}, которая удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{cl} = j_\nu^{cl},$$

и "квантовую" часть a_μ: $A_\mu = A_\mu^{cl} + a_\mu$. Тогда действие для фермионов, взаимодействующих с квантовым полем $a_\mu(x)$ принимает вид

$$S = S_{cl} + \int d^4x \left[-\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \overline{\psi} \left(i\gamma^\mu D_\mu^{cl} - m \right) \psi - e\overline{\psi}\gamma^\mu a_\mu \psi \right], \tag{3}$$

где $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu,\ D_\mu^{cl} = \partial_\mu + ieA_\mu^{cl}$.
В данной работе рассматривается случай постоянного электрического поля в темпоральной калибровке:

$$A_\mu^{cl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_3 \end{pmatrix},\ A_3 = eEt,$$

причём во всех вычислениях без ограничения общности будем считать $eE > 0$.

3 Моды

3.1 Решения уравнения Дирака

Уравнение движения для ψ с классическим фоновым полем A_μ^{cl} имеет вид

$$\left(i\gamma^\mu D_\mu^{cl} - m\right)\psi = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl} - m\right)\psi = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим анзац $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{px}}$ и запишем

$$\left(i\gamma^0\partial_t - (\gamma\cdot\mathbf{P}) - m\right)\psi_{\mathbf{p}} = 0, \tag{5}$$

где мы обозначили $\gamma\cdot\mathbf{P} = \gamma^i P^i$ и $\mathbf{P}^i = \mathbf{p}^i - eA^i = (p_1,\ p_2,\ p_3 + eEt)^T$ - физический импульс для данного фонового поля.
Используя подстановку $\psi_{\mathbf{p}}(t) = \left(\gamma^0\partial_t - \gamma\cdot\mathbf{P} + m\right)\chi_{\mathbf{p}}(t)$, запишем

$$\left(\partial_t^2 + P_3^2 + |p_\perp|^2 + m^2 + ieE\gamma^0\gamma^3\right)\chi = 0. \tag{6}$$

Здесь и далее пользуемся обозначениями: $p_\perp = p_1 + ip_2,\ P_3 = p_3 + eEt$. Чтобы найти четыре независимых решения уравнения Дирака (4), найдём такие векторы $\chi_{\mathbf{p}}(t) = f_{\mathbf{p}}(t)\chi_{1,2}$, $\chi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{\mathbf{p}}(t)\chi_{3,4}$, что

$$\gamma^0\gamma^3\chi_{1,2} = \chi_{1,2},\ \gamma^0\gamma^3\chi_{3,4} = -\chi_{3,4}. \tag{7}$$

Тогда

$$\chi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \chi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \chi_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \chi_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Подставляя эти векторы в соотношения $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(t) = \left(i\gamma^0\partial_t - \gamma\cdot\mathbf{P} + m\right)\chi_{\mathbf{p}}(t)$, $\chi_{\mathbf{p}}(t) = f_{\mathbf{p}}(t)\chi_{1,2}$, получаем следующие спиноры:

$$\psi_{\mathbf{p},1}^{(+)}(t) = \begin{pmatrix} i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ -p_\perp f_{\mathbf{p}}(t) \\ -i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ p_\perp f_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix},\quad \psi_{\mathbf{p},2}^{(+)}(t) = \begin{pmatrix} p_\perp^* f_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ p_\perp^* f_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) - (m + P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Аналогично, для $\chi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{\mathbf{p}}(t)\chi_{3,4}$ имеем:

$$\psi_{\mathbf{p},1}^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} -p_\perp^*\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_\perp^*\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ -i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix},\quad \psi_{\mathbf{p},2}^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_\perp\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) - (m - P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_\perp\varphi_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Выражения (9)-(10) представляют собой общую форму записи решений уравнения Дирака для произвольного внешнего электрического поля. Их связь с хорошо известными спинорами

$$u_{\mathbf{p},s} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}+m}{2\omega_{\mathbf{p}}}}\xi^s \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{P}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(\omega_{\mathbf{p}}+m)}}\xi^s \end{pmatrix} \text{ и } v_{s,-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\cdot\mathbf{P}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(\omega_{\mathbf{p}}+m)}}\xi^s \\ \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}+m}{2\omega_{\mathbf{p}}}}\xi^s \end{pmatrix},\ \xi^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \xi^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

приведена в [9]. Подставляя (7) в (6) получаем для случая постоянного внешнего поля:

$$\left[\partial_z^2 + \left(\nu + \tfrac{1}{2} - \tfrac{z^2}{4}\right)\right] f_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad \left[\partial_z^2 + \left(\nu - \tfrac{1}{2} - \tfrac{z^2}{4}\right)\right] \varphi_{\mathbf{p}}(t) = 0, \tag{11}$$

где $\nu = -i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}$, $z = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2eE}(t + \frac{p_3}{eE}) = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{eE}}P_3$. Решениями уравнения (11) являются функции параболического цилиндра $D_\nu(z), D_\nu(-z), D_{-\nu-1}(-iz), D_{-\nu-1}(iz)$, любая пара которых линейно независима, поэтому можно записать

$$\begin{cases} f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_\nu(z) + \beta D_\nu(-z), \\ \varphi_{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\alpha} D_{-\nu}(-iz) + \tilde{\beta} D_{-\nu}(iz) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_{-\nu-1}(-iz) + \beta D_{-\nu-1}(iz), \\ \varphi_{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\alpha} D_{\nu-1}(z) + \tilde{\beta} D_{\nu-1}(-z). \end{cases} \tag{12}$$

Достаточно первой пары решений, так что, используя свойство $D_\nu^*(z) = D_{\nu^*}(z^*)$, можно записать

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p},s}(t) = \alpha u^{(+)}_{\mathbf{p},s}(t) + \beta v^{(+)}_{\mathbf{p},s}(t), \tag{13}$$

$$\psi^{(-)}_{\mathbf{p},s}(t) = \tilde{\alpha} u^{(-)}_{\mathbf{p},s}(t) + \tilde{\beta} v^{(-)}_{\mathbf{p},s}(t), \tag{14}$$

где введены следующие обозначения:

$$u^{(+)}_{\mathbf{p},1} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + mD_\nu(z) \\ -p_\perp D_\nu(z) \\ -\frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + mD_\nu(z) \\ p_\perp D_\nu(z) \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}_{\mathbf{p},1} = \begin{pmatrix} -p_\perp^* D^*_\nu(z) \\ -\frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z) + mD^*_\nu(z) \\ p_\perp^* D^*_\nu(z) \\ \frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z) + mD^*_\nu(z) \end{pmatrix},$$
$$u^{(+)}_{\mathbf{p},2} = \begin{pmatrix} p_\perp^* D_\nu(z) \\ \frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + mD_\nu(z) \\ p_\perp^* D_\nu(z) \\ \frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) - mD_\nu(z) \end{pmatrix}, \quad u^{(-)}_{\mathbf{p},2} = \begin{pmatrix} -\frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z) + mD^*_\nu(z) \\ p_\perp D^*_\nu(z) \\ -\frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z) - mD^*_\nu(z) \\ p_\perp D^*_\nu(z) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$v^{(+)}_{\mathbf{p},1} = \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + mD_\nu(-z) \\ -p_\perp D_\nu(-z) \\ \frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + mD_\nu(-z) \\ p_\perp D_\nu(-z) \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}_{\mathbf{p},1} = \begin{pmatrix} -p_\perp^* D^*_\nu(-z) \\ \frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(-z) + mD^*_\nu(-z) \\ p_\perp^* D^*_\nu(-z) \\ -\frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(-z) + mD^*_\nu(-z) \end{pmatrix},$$
$$v^{(+)}_{\mathbf{p},2} = \begin{pmatrix} p_\perp^* D_\nu(-z) \\ -\frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + mD_\nu(-z) \\ p_\perp^* D_\nu(-z) \\ -\frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) - mD_\nu(-z) \end{pmatrix}, \quad v^{(-)}_{\mathbf{p},2} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(-z) + mD^*_\nu(-z) \\ p_\perp D^*_\nu(-z) \\ \frac{1-i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(-z) - mD^*_\nu(-z) \\ p_\perp D^*_\nu(-z) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Мы также использовали свойство функции $D_\nu(z)$: $\partial_z D_\nu(z) = -\frac{1}{2}zD_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z)$, так что, например:

$$i\partial_t D_\nu(z) - P_3 D_\nu(z) = i\sqrt{2eE}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{eE}}P_3 D_\nu(z) + \nu D_{\nu-1}(z)\right) - P_3 D_\nu(z) =$$
$$= i\sqrt{2eE}e^{i\frac{\pi}{4}}\nu D_{\nu-1}(z) = \sqrt{2eE}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE} = \frac{1+i}{2}\frac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z). \tag{17}$$

На самом деле, один из наборов решений (15) или (16) можно взять за базис в пространстве всех решений уравнения (4). Приведём линейные комбинации, связывающие спиноры (9)-(10) с решениями уравнения (12):

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p},1}(t)=\left(\alpha+\beta e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right)u^{(+)}_{\mathbf{p},1}+\beta\frac{\sqrt{eE}p_\perp}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(-)}_{\mathbf{p},1}-$$
$$-\beta\frac{\sqrt{eE}m}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(-)}_{\mathbf{p},2}, \tag{18}$$

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{p},2}(t)=\left(\alpha+\beta e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right)u^{(+)}_{\mathbf{p},2}-\beta\frac{\sqrt{eE}m}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(-)}_{\mathbf{p},1}-$$
$$-\beta\frac{\sqrt{eE}p_\perp^*}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(-)}_{\mathbf{p},2}, \tag{19}$$

$$\psi^{(-)}_{\mathbf{p},1}(t)=\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta} e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right)u^{(-)}_{\mathbf{p},1}-\tilde{\beta}\frac{\sqrt{eE}p_\perp^*}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(+)}_{\mathbf{p},1}+$$
$$+\tilde{\beta}\frac{\sqrt{eE}m}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(+)}_{\mathbf{p},2}, \tag{20}$$

$$\psi^{(-)}_{\mathbf{p},2}(t)=\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta} e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right)u^{(-)}_{\mathbf{p},2}+\tilde{\beta}\frac{\sqrt{eE}m}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(+)}_{\mathbf{p},1}+$$
$$+\tilde{\beta}\frac{\sqrt{eE}p_\perp}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}u^{(+)}_{\mathbf{p},2}, \tag{21}$$

где мы используем решения (15) в качестве базиса. Соотношения (18)-(21) можно обратить, например,

$$u^{(+)}_{\mathbf{p},1}(t)=\frac{\alpha^*+\beta^* e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}\psi^{(+)}_{\mathbf{p},1}-$$
$$-\frac{\beta^* e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}\frac{\sqrt{eE}p_\perp}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}\psi^{(-)}_{\mathbf{p},1}+$$
$$+\frac{\beta^* e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}\frac{\sqrt{eE}m}{m^2+|p_\perp|^2}\frac{2\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)}\psi^{(-)}_{\mathbf{p},2} \tag{22}$$

и аналогично для остальных спиноров.

Заметим, что дифференциальный оператор уравнения (5) уважает трансляционную инвариантность: $p_3 \to p_3 - eE\tau,\ t \to t+\tau$. Будем считать, что коэффициенты в (12) зависят только от перпендикулярной части импульса, так что решения: $f_{\mathbf{p}}(t) = f_{p_\perp}(P_3)$, $\varphi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{p_\perp}(P_3)$ и $\psi^{(\pm)}_{\mathbf{p}s}(t) \equiv \psi^{(\pm)}_{p_\perp s}(P_3)$. Более общий случай будет рассмотрен в разделе 5. Также заметим, что выполнено соотношение $\psi^{(-)}_{\mathbf{p}s}(t) = -i\gamma^0\gamma^2(\psi^{(+)}_{\mathbf{p}s}(t))^*$, которое следует из симметрии уравнения (5) и справедливо в случае отсутствия внешнего поля.

3.2 Разложение фермионного поля

В ультрафиолетовом пределе $|\mathbf{p}| \to +\infty$ при фиксированном моменте времени t уравнение (6) сводится к

$$\left(\partial_t^2 + |\mathbf{p}|^2\right) f_{\mathbf{p}}(t) = 0. \tag{23}$$

Поэтому $f_{\mathbf{p}}(t)$ имеет следующее асимптотическое поведение: $f_{\mathbf{p}}(t) \simeq Ae^{-i|\mathbf{p}|t} + Be^{i|\mathbf{p}|t}$. Потребуем условие правильного адамарова поведения мод: $f_{\mathbf{p}} \propto e^{-i|\mathbf{p}|t}$ в ультрафиолетовом пределе. Для того, чтобы найти соответствующее решение, необходимо проанализировать асимптотики функций параболического цилиндра. В пределе $|\mathbf{p}| \to +\infty$, когда $|p_\perp|$ достаточно велик, следуя [5, 16], получаем следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} D_\nu(z) \simeq{}& \frac{e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{P_3}{\sqrt{m^2+|p_\perp|^2+P_3^2}}}\, e^{i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}\log\left(\frac{(|\mathbf{p}|+p_3)^2}{2eE}\right) - i\frac{p_3|\mathbf{p}|}{2eE}} e^{-i|\mathbf{p}|t} + \\ &+ e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\frac{e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{P_3}{\sqrt{m^2+|p_\perp|^2+P_3^2}}}\, e^{i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}\log\left(\frac{(|\mathbf{p}|-p_3)^2}{2eE}\right) + i\frac{p_3|\mathbf{p}|}{2eE}} e^{i|\mathbf{p}|t}. \end{aligned} \tag{24}$$

Второе слагаемое в (24) подавлено множителем $e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}$, но отвечает за отрицательно-частотный вклад. Анализируя также асимптотики при $|\mathbf{p}| \to +\infty$, когда $|p_\perp|$ фиксирован (A7)-(A8), находим моды с требуемым поведением:

$$f^{(+)}_{\mathbf{p}}(t) = A^{(+)}_{\mathbf{p}}\left(D_\nu(z) - e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}D_\nu(-z)\right), \tag{25}$$

$$\varphi^{(-)}_{\mathbf{p}}(t) = A^{(-)}_{\mathbf{p}}\left(D_{-\nu}(-iz) - e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}D_{-\nu}(iz)\right) = A^{(-)}_{\mathbf{p}}\left(D^*_\nu(z) - e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}D^*_\nu(-z)\right), \tag{26}$$

отвечающие положительно- и отрицательно-частотным решениям в рассматриваемом пределе.

Заметим, что любая линейная комбинация $f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha_{\mathbf{p}}D_\nu(z) + \beta_{\mathbf{p}}D_\nu(-z)$, в которой $\beta_{\mathbf{p}} \to 0$ при $|\mathbf{p}| \to \infty$, даст положительно-частотное решение в данном пределе, но пропадёт свойство трансляционной инвариантности. Поэтому (25)-(26) являются единственными трансляционно-инвариантными решениями в данной задаче, удовлетворяющие требованию правильного адамарова поведения.

Итак, мы разлагаем фермионное поле по модам следующим образом:

$$\Psi(t,\mathbf{x})_a = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\left[a_{\mathbf{p},s}\psi^{(+)}_{\mathbf{p}s,a}(t)\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b^\dagger_{\mathbf{p},s}\psi^{(-)}_{-\mathbf{p}s,a}(t)\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\right], \tag{27}$$

где используются функции (25)-(26) в выражениях (9)-(10). Теперь определим условия на коэффициенты, исходя из стандартных антикоммутационных соотношений:

$$\left\{a_{\mathbf{p},s}, a^\dagger_{\mathbf{k},r}\right\} = \left\{b_{\mathbf{p},s}, b^\dagger_{\mathbf{k},r}\right\} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta^r_s, \tag{28}$$

$$\{\Psi(t,\mathbf{x})_a, \Psi(t,\mathbf{y})_b\} = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta_a^b. \tag{29}$$

Используя (27):

$$\left\{\Psi(t,\mathbf{x})_a, \Psi(t,\mathbf{y})_b^\dagger\right\} =$$

$$= \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2}\int\frac{dP_3}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left[\psi^{(+)}_{p_\perp s,a}(P_3)\,\psi^{(+)*}_{p_\perp s,b}(P_3) + \psi^{(-)}_{p_\perp s,a}(P_3)\,\psi^{(-)*}_{p_\perp s,b}(P_3)\right]e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_a^b. \tag{30}$$

Отсюда получаем следующие ограничения на коэффициенты из (12)-(14):

$$\begin{cases} \alpha\beta^* - \tilde{\alpha}^*\tilde{\beta} = 0, \\ |\alpha|^2 = |\tilde{\alpha}|^2,\ |\beta|^2 = |\tilde{\beta}|^2, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} = \frac{e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{2(m^2+|p_\perp|^2)}. \end{cases} \tag{31}$$

Заметим, что при выполнении условий (31) стандартные антикоммутационные соотношения (30) выполнены тождественно в любой момент времени: с помощью уравнений движения и соотношения $\psi^{(-)}_{\mathbf{p}s}(t) = -i\gamma^0\gamma^2(\psi^{(+)}_{\mathbf{p}s}(t))^*$, либо явно используя свойства функций параболического цилиндра можно показать, что

$$\partial_t\left\{\sum_{s=1}^{2}\left[\psi^{(+)}_{p_\perp s,a}(P_3)\,\psi^{(+)*}_{p_\perp s,b}(P_3) + \psi^{(-)}_{p_\perp s,a}(P_3)\,\psi^{(-)*}_{p_\perp s,b}(P_3)\right]\right\} = 0.$$

Для выбранных мод (25)-(26) полученные условия дают

$$|A^{(+)}_{\mathbf{p}}|^2 = |A^{(-)}_{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{2(m^2+|p_\perp|^2)}\frac{e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{1-e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{eE}}}. \tag{32}$$

Также удобно переписать условия нормировки через функции $f_{\mathbf{p}}(t)$ и $\varphi_{\mathbf{p}}(t)$:

$$2\left[|\partial_t f_{\mathbf{p}}|^2 + (m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|f_{\mathbf{p}}|^2 + iP_3(f_{\mathbf{p}}\partial_t f^*_{\mathbf{p}} - \partial_t f_{\mathbf{p}} f^*_{\mathbf{p}})\right] = 1, \tag{33}$$

$$2\left[|\partial_t \varphi_{\mathbf{p}}|^2 + (m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|\varphi_{\mathbf{p}}|^2 - iP_3(\varphi_{\mathbf{p}}\partial_t \varphi^*_{\mathbf{p}} - \partial_t \varphi_{\mathbf{p}} \varphi^*_{\mathbf{p}})\right] = 1. \tag{34}$$

4 Древесный ток

4.1 Ток фермионов

В терминах общей формы решений (9)-(10) можно найти:

$$\left\langle J^3\right\rangle_{\rm tree} = \left\langle\overline{\Psi}\gamma^3\Psi\right\rangle = -4\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\Big[\left(m^2+|p_\perp|^2-P_3^2\right)|f_\mathbf{p}|^2-|\partial_t f_\mathbf{p}|^2-iP_3\left(f_\mathbf{p}\partial_t f^*_\mathbf{p}-\partial_t f_\mathbf{p} f^*_\mathbf{p}\right)\Big] =$$
$$= 2\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\Big[1-4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)|f_\mathbf{p}|^2\Big]. \tag{35}$$

В приложении B мы показываем, что подынтегральное выражение в (35) является полной производной по P_3. Заметим, что это возможно только при наличии трансляционной инвариантности, так как в этом случае $f_\mathbf{p}(t)=f_{p_\perp}(P_3)$. Из формул (B11)-(B12) получаем:

$$\left\langle J^3\right\rangle_{\rm tree} =$$
$$= 2\lim_{\Lambda\to+\infty}\int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3}\left[\frac{m^2+|p_\perp|^2+P_3^2}{P_3}-\frac{2(m^2+|p_\perp|^2)}{P_3}\left[(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|f|^2+|\partial_t f|^2\right]\right]\Bigg|_{-\Lambda}^{\Lambda}, \tag{36}$$

Используя формулы для производных функций параболического цилиндра (17) и их асимптотики (A2)-(A4), вычисляем для подынтегрального выражения в (36):

$$\left[\frac{m^2+|p_\perp|^2+P_3^2}{P_3}-\frac{2(m^2+|p_\perp|^2)}{P_3}\left[(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|f|^2+|\partial_t f|^2\right]\right]\Bigg|_{-\Lambda}^{\Lambda} =$$
$$= -2\Lambda e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{eE}}\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}+\ldots, \tag{37}$$

где многоточие означает вклады, стремящиеся к нулю в пределе $\Lambda\to+\infty$. Заметим, что конечный вклад в ток отсутствует в итоговом выражении. Окончательно имеем для древесного тока:

$$\left\langle J^3\right\rangle_{\rm tree} = -4\lim_{\Lambda\to+\infty}\Lambda\int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3}\left[e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{eE}}\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}}\right] =$$
$$= -8\lim_{\Lambda\to+\infty}\Lambda\int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3}\left[e^{-3\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}(m^2+|p_\perp|^2)\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right)\right]. \tag{38}$$

Для мод с правильным адамаровым поведением получаем:

$$\langle J^3\rangle_{\rm tree} = \lim_{\Lambda\to+\infty}\frac{e^{-\pi\frac{m^2}{eE}}}{2\pi^3}eE\Lambda. \tag{39}$$

Сравним этот результат с током для выбора $f_\mathbf{p}(t)=AD_\nu(z)$:

$$\langle J^3\rangle_{\rm tree} = -\lim_{\Lambda\to+\infty}\frac{e^{-\pi\frac{m^2}{eE}}}{2\pi^3}eE\Lambda. \tag{40}$$

Так что подавленный вклад в формулах для мод (25) и (26) влечёт существенное различие для тока в этих двух случаях. Видно, что ток (38) либо равен нулю, либо линейно расходится. Он зануляется, когда выполнено следующее соотношение:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2Re(\alpha^*\beta)e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} = 0. \tag{41}$$

Делая замену $\alpha = A\cos(\varphi)$, $\beta = Ae^{i\theta}\sin(\varphi)$, найдём из (31), (41) моды с зануляющимся древесным током:

$$f_{\mathbf{p}}(t) = A\Big(D_\nu(z)\cos(\varphi) - D_\nu(-z)\sin(\varphi)\Big), \tag{42}$$
$$|A|^2 = \frac{1}{2(m^2+|p_\perp|^2)}\frac{e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{1-e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{eE}}},\ \varphi = \frac{1}{2}\arcsin\left(e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}}\right).$$

4.2 Комментарий о теории с бозонами во внешнем поле

Рассмотрим теорию массивного скалярного поля [1, 8, 11, 12]

$$S = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |D_\mu\phi|^2 - m^2\phi^2 - j_\mu^{cl}A^\mu\right] \tag{43}$$

с темпоральной калибровкой классического внешнего поля [3, 4, 8], как и выше. Скалярное поле может быть разложено следующим образом:

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\left[a_{\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{px}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger f_{-\mathbf{p}}^*(t)e^{-i\mathbf{px}}\right], \tag{44}$$

где моды удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2(t)\right]f_{\mathbf{p}}(t) = 0,\ \omega_{\mathbf{p}}^2 = m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2 \tag{45}$$

с решениями (в тех же обозначениях)

$$f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + \beta D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z). \tag{46}$$

Стандартное коммутационное соотношение $[\phi(\mathbf{x},t), \partial_t\phi^*(\mathbf{y},t)] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ накладывает следующее ограничение:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} = \frac{e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}}{\sqrt{2eE}}. \tag{47}$$

Ток в этой теории имеет вид

$$\hat{J}_\mu^{\text{scalar}} = i\left(\phi^* D_\mu^{cl} - \phi D_\mu^{cl}\phi^*\right). \tag{48}$$

На древесном уровне запишем [8]:

$$\langle J_3^{\text{scalar}}\rangle_{\text{tree}} = \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}P_3\big|f_{\mathbf{p}}(t)\big|^2 = \int\frac{d^2p_\perp}{2(2\pi)^3}\int dP_3\partial_{P_3}\Big\{(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|f_{\mathbf{p}}(t)|^2 + |\partial_t f_{\mathbf{p}}(t)|^2\Big\}. \tag{49}$$

Таким же образом, как и в случае фермионов, получаем:

$$\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} = -\lim_{\Lambda\to+\infty} \sqrt{2eE}\Lambda \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3} \left[e^{-3\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}} \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta) e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} \right) \right]. \quad (50)$$

Снова видим, что ток либо равен нулю, либо линейно расходится по Λ. В этом случае условие зануления имеет вид

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta) e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} = 0. \quad (51)$$

Во-первых, это условие выполнено для $\alpha = 1,\ \beta = 1$ и $\alpha = 1,\ \beta = -1$. Эти коэффициенты отвечают так называемым фундаментальным вещественным решениям уравнения (45) [11, 17]:

$$f_{p_\perp}^{(0)} = 2^{-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \left[D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right], \quad (52)$$

$$f_{p_\perp}^{(1)} = 2^{-\frac{\nu}{2}-\frac{5}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \left[-D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right]. \quad (53)$$

Однако, данные функции не удовлетворяют условию нормировки (47). Во-вторых, условие (51) можно разрешить, рассматривая коэффициенты следующей формы:

$$\alpha = A \left(1 - k e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}} + ik e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}} \right), \quad (54)$$

$$\beta = A \left(1 + k e^{\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}} - ik e^{-\pi\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}} \right), \quad (55)$$

где $k \in \mathbb{R}$. Этот выбор соответствует модам, отвечающих когерентному состоянию положительно- и отрицательно-частотных решений в пределе $|z| \to +\infty$ [11]:

$$v_{p_\perp}(P_3) = \frac{1}{\sqrt[4]{4(m^2+|p_\perp|^2)}} \left[f_{p_\perp}^{(0)} - i\sqrt{\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} f_{p_\perp}^{(1)} \right]. \quad (56)$$

Это решение удовлетворяет условиям (47), (51) и имеет свойство $v_{p_\perp}(-P_3) = v_{p_\perp}^*(P_3)$. Данное решение можно сразу угадать из выражения (49), но его можно проанализировать и другим способом:

$$\begin{aligned}\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} P_3 |f_{\mathbf{p}}(t)|^2 = \\ = \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 &\left[|\alpha|^2 |D_{\nu-\frac{1}{2}}(z)|^2 + |\beta|^2 |D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z)|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta D^*_{\nu-\frac{1}{2}}(z) D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right) \right] = \\ = \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 &\left[(|\alpha|^2 - |\beta|^2) |D_{\nu-\frac{1}{2}}(z)|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta D^*_{\nu-\frac{1}{2}}(z) D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right) \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Воспользуемся точными свойствами функций параболического цилиндра [17]

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &= e^{-\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\frac{(\nu+1)\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(iz) = \\ &= e^{\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{(\nu+1)\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(-iz) \end{aligned} \quad (58)$$

и перепишем (49) в форме

$$\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 \left[|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\text{Im}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right] |D_{\nu - \frac{1}{2}}(z)|^2. \tag{59}$$

Мы обнаружили, что условие зануления (51) возникает без использования асимптотических разложений.

Возвращаясь к фермионам, получаем таким же способом:

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} =$$

$$= 4 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (m^2 + |p_\perp|^2) \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2Re(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) \left[1 - 2|D_\nu(z)|^2 e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \right] e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}. \tag{60}$$

и видим, что ограничение (41) является естественным условием зануления древесного тока для поля фермионов.

5 Более общий случай

Выбор мод при квантовании поля (27) определяет основное состояние фоковского пространства теории. В свою очередь, выбор этого состояния может сильно влиять на физические величины даже на древесном уровне. Мы уже увидели, что в зависимости от этого выбора ток может как расходится, так и обнуляться. В этом разделе рассматривается наиболее общий вид основного состояния.

5.1 Обобщённые моды

Используя моды $\psi^{(\pm)}_{\mathbf{p},r}(t)$, полученные в разделе 3, построим наиболее общий вид мод [7]

$$\xi_{\mathbf{p},s}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} \sum_{r=1}^{2} \left[\alpha^s_{\mathbf{kp}r} \psi^{(+)}_{\mathbf{k},s}(t) e^{i\mathbf{kx}} + \beta^s_{-\mathbf{kp}r} \psi^{(-)}_{-\mathbf{k},s}(t) e^{-i\mathbf{kx}} \right], \tag{61}$$

$$\eta_{\mathbf{p},s}(t,\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} \sum_{r=1}^{2} \left[\gamma^s_{\mathbf{kp}r} \psi^{(+)}_{\mathbf{k},s}(t) e^{i\mathbf{kx}} + \omega^s_{-\mathbf{kp}r} \psi^{(-)}_{-\mathbf{k},s}(t) e^{-i\mathbf{kx}} \right]. \tag{62}$$

Разложим по данным модам фермионное поле:

$$\tilde{\Psi}(t,\mathbf{x})_a = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[c_{\mathbf{p},s} \xi_{\mathbf{p}s,a}(t,\mathbf{x}) + d^\dagger_{\mathbf{p},s} \eta_{\mathbf{p}s,a}(t,\mathbf{x}) \right]. \tag{63}$$

Мы предполагаем выполнение стандартных антикоммутационных соотношений:

$$\left\{ c_{\mathbf{p},s}, c^\dagger_{\mathbf{k},r} \right\} = \left\{ d_{\mathbf{p},s}, d^\dagger_{\mathbf{k},r} \right\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \delta^r_s, \tag{64}$$

$$\left\{ \tilde{\Psi}(t,\mathbf{x})_a, \tilde{\Psi}^\dagger(t,\mathbf{y})_b \right\} = \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \delta^b_a. \tag{65}$$

Для последнего соотношения имеем:

$$\left\{ \tilde{\Psi}(t,\mathbf{x})_a, \tilde{\Psi}^\dagger(t,\mathbf{y})_b \right\} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[\xi_{\mathbf{p}s,a}(t,\mathbf{x}) \xi^*_{\mathbf{p}s,b}(t,\mathbf{y}) + \eta_{\mathbf{p}s,a}(t,\mathbf{x}) \eta^*_{\mathbf{p}s,b}(t,\mathbf{y}) \right]. \tag{66}$$

Применяя (61)-(62), получаем, что коэффициенты $\alpha^s_{\mathbf{kp}r}$, $\beta^s_{\mathbf{kp}r}$, $\gamma^s_{\mathbf{kp}r}$, $\omega^s_{\mathbf{kp}r}$ должны удовлетворять условиям

$$\int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1}^{2} \left[\alpha^s_{\mathbf{kp}r} \alpha^{s*}_{\mathbf{qp}l} + \gamma^s_{\mathbf{kp}r} \gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l} \right] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta^r_l, \tag{67}$$

$$\int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1}^{2} \left[\beta^s_{\mathbf{kp}r} \beta^{s*}_{\mathbf{qp}l} + \omega^s_{\mathbf{kp}r} \omega^{s*}_{\mathbf{qp}l} \right] = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta^r_l, \tag{68}$$

$$\int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1}^{2} \left[\alpha^s_{\mathbf{kp}r} \beta^{s*}_{\mathbf{qp}l} + \gamma^s_{\mathbf{kp}r} \omega^{s*}_{\mathbf{qp}l} \right] = 0. \tag{69}$$

Так что антикоммутационное соотношение для полей выполнено:

$$\left\{\tilde{\Psi}(t,\mathbf{x})_a, \tilde{\Psi}^\dagger(t,\mathbf{y})_b\right\} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{r=1}^{2} \left[\psi^{(+)}_{\mathbf{k}r,a}(t)\psi^{(+)*}_{\mathbf{k}r,b}(t)e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + \psi^{(-)}_{-\mathbf{k}r,a}(t)\psi^{(-)*}_{-\mathbf{k}r,b}(t)e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right] =$$

$$= \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dK_3}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left[\psi^{(+)}_{k_\perp s,a}(K_3)\,\psi^{(+)*}_{k_\perp s,b}(K_3) + \psi^{(-)}_{k_\perp s,a}(K_3)\,\psi^{(-)*}_{k_\perp s,b}(K_3)\right] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \overset{(30)}{=} \delta(\mathbf{y}-\mathbf{x})\delta^b_a. \tag{70}$$

Условие правильного адамарова поведения в терминах новых коэффициентов формулируется следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \alpha^s_{\mathbf{kp}r} \\ \beta^s_{\mathbf{kp}l} \end{Bmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{k}| \text{ или } |\mathbf{p}|\to\infty} \begin{Bmatrix} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_r \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma^s_{\mathbf{kp}r} \\ \omega^s_{\mathbf{kp}r} \end{Bmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{k}| \text{ или } |\mathbf{p}|\to\infty} \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_r \end{Bmatrix}, \tag{71}$$

где предполагается предел в пространстве обобщённых функций.
Таким образом, определено основное состояние $|\alpha,\beta,\gamma,\omega\rangle$: $c_{\mathbf{p},s}|\alpha,\beta,\gamma,\omega\rangle = d_{\mathbf{p},s}|\alpha,\beta,\gamma,\omega\rangle = 0$, которое зависит от выбора коэффициентов в (61)-(62).

5.2 Новый древесный ток

Для нового произвольного основного состояния древесный ток имеет вид:

$$\langle J'^3\rangle_{\text{tree}} = \langle\alpha,\beta,\gamma,\omega|\overline{\tilde{\Psi}}\gamma^3\tilde{\Psi}|\alpha,\beta,\gamma,\omega\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\eta^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\eta_{\mathbf{p}s} =$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\int d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{q}\sum_{r,l=1}^{2}\Big[\gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l}\gamma^s_{\mathbf{kp}r}\psi^{(+)\dagger}_{\mathbf{q}l}\gamma^0\gamma^3\psi^{(+)}_{\mathbf{k}r}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} + \gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r}\psi^{(+)\dagger}_{\mathbf{q}l}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{k}r}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} +$$

$$+\omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\gamma^s_{\mathbf{kp}r}\psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{q}l}\gamma^0\gamma^3\psi^{(+)}_{\mathbf{k}r}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} + \omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r}\psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{q}l}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{k}r}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}\Big]. \tag{72}$$

Покажем теперь, что, если пренебрегать условием правильного адамарова поведения (71), класс состояний, для которых ток зануляется, гораздо шире, чем в менее общем случае (42), а также существуют такие состояния, для которых ток может принимать конечное значение.

5.2.1 Нулевой ток

Итак, существуют различные способы обратить ток в нуль. Конечно, один способ дают коэффициенты, удовлетворяющие (41). Они связаны с новыми коэффициентами в (61)-(62) посредством линейных комбинаций (18)-(21) и обратных к ним. Другой класс состояний с нулевым древесным током определяется коэффициентами $\gamma^s_{\mathbf{kp}r}, \omega^s_{\mathbf{kp}r}$, которые удовлетворяют условиям

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l}\gamma^s_{\mathbf{kp}r} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r} = A\left(|p_\perp|\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta^r_l, \tag{73}$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r} = B\left(|p_\perp|\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta^r_l, \tag{74}$$

так что $\langle J'^3\rangle_{\text{tree}} \equiv 0$. Действительно, в этом случае первое и последнее слагаемые в (72) сокращаются, а перекрёстные слагаемые являются нечётными функциями от $k_\perp$, так что интеграл по $\mathbf{k}$ зануляется. Это следует из формул (18)-(21) и выражений (A9)-(A10).

Заметим, что условие правильного адамарова поведения (71) действительно не выполнено: если вдруг оно выполнено, то, переходя к пределу $|\mathbf{k}| \to +\infty$ в условии (73), получим противоречие $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum\limits_{s=1}^{2} 0 \times 0 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum\limits_{s=1}^{2} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta_l^s \delta(\mathbf{q}-\mathbf{p})\delta_r^s = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_r^l$.

5.2.2 Конечный ток

В отличие от результата раздела 4, для более общего выбора (61)-(63) ток может быть конечной величиной, зависящей от времени. Например, зададим произвольный конечный масштаб L в импульсном пространстве и определим коэффициенты

$$\alpha^s_{\mathbf{kp}r} = {}_0\alpha^s_{\mathbf{kp}r}\theta\left(L - |\mathbf{p}|\right) + {}_1\alpha^s_{\mathbf{kp}r}\theta\left(|\mathbf{p}| - L\right) \tag{75}$$

и аналогично для $\beta^s_{\mathbf{kp}r}, \gamma^s_{\mathbf{kp}r}, \omega^s_{\mathbf{kp}r}$. Здесь мы обозначили за ${}_0\alpha^s_{\mathbf{kp}r}, \ldots$ и ${}_1\alpha^s_{\mathbf{kp}r}, \ldots$ коэффициенты, отвечающие модам (42), которые зануляют ток, и модам с $f_{\mathbf{p}}(t) = AD_\nu(z)$ соответственно. В этом случае ток (72) имеет вид

$$\langle J'^3\rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \eta^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\eta_{\mathbf{p}s} = \int\limits_{|\mathbf{p}|<L} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[|A|^2 u^{(-)\dagger}_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}s} - \psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{p}s}\right] + 0. \tag{76}$$

Полученная величина конечна в любой фиксированный момент времени t, так как подынтегральное выражение является непрерывной функцией. Чтобы убедиться, что данный ток конечен и не равен нулю, исследуем предел $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \langle J'^3\rangle_{\text{tree}} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{|\mathbf{p}|<L} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \left[|A|^2 u^{(-)\dagger}_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}s} - \psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{p}s}\right] = -\#L^3, \tag{77}$$

$$\# = \frac{e^{-\pi\frac{m^2}{eE}}}{2\pi^2} \int_0^1 dx\sqrt{1-x}\,\frac{1-\sqrt{1-e^{-\frac{\pi}{eE}(m^2+L^2x)}}}{1-e^{-\frac{\pi}{eE}(m^2+L^2x)}}\, e^{-\pi\frac{L^2}{eE}x} \neq 0,$$

где мы использовали (31), (36) и (A3)-(A4). Заметим, что если мы определим коэффициенты так же, как в (75), но заменяя $\alpha \leftrightarrow \beta$ и $\gamma \leftrightarrow \omega$ в левых частях, то получим $\lim\limits_{t\to+\infty}\langle J'^3\rangle_{\text{tree}} = \#L^3$. Поэтому на больших временах ток может быть конечной величиной любого знака в рассматриваемых случаях.

Для корректности вывода, проверим, что коэффициенты (75) удовлетворяют условиям нормировки (67)-(69). Так как коэффициенты ${}_0\alpha^s_{\mathbf{kp}r}, \ldots$ и ${}_1\alpha^s_{\mathbf{kp}r}, \ldots$ из (75) определяют линейные комбинации базисных спиноров (15), то можно написать ${}_0\alpha^s_{\mathbf{kp}r} = {}_0\alpha^s_{\mathbf{k}r}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})$ и аналогично для остальных. Тогда, например, для условия (67) имеем

$$\int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1}^{2} \left[\alpha^s_{\mathbf{kp}r}\alpha^{s*}_{\mathbf{qp}l} + \gamma^s_{\mathbf{kp}r}\gamma^{s*}_{\mathbf{qp}l}\right] = \Big/ \theta(x)^2 = \theta(x),\, \theta(x)\theta(-x) = 0 \Big/ =$$

$$= \int d^3\mathbf{p} \sum_{s=1}^{2} \left[\, {}_0\alpha^s_{\mathbf{kp}r}\, {}_0\alpha^{s*}_{\mathbf{qp}l}\theta\left(L - |\mathbf{p}|\right) + \, {}_1\alpha^s_{\mathbf{kp}r}\, {}_1\alpha^{s*}_{\mathbf{qp}l}\theta\left(|\mathbf{p}| - L\right) + \alpha \leftrightarrow \gamma\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{2} \left[\left(|\, {}_0\alpha^s_{\mathbf{k}r}|^2 + |\, {}_0\gamma^s_{\mathbf{k}r}|^2\right)\theta\left(L - |\mathbf{k}|\right) + \left(|\, {}_1\alpha^s_{\mathbf{k}r}|^2 + |\, {}_1\gamma^s_{\mathbf{k}r}|^2\right)\theta\left(|\mathbf{k}| - L\right)\right]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta^r_l, \tag{78}$$

где мы учли, что исходные решения правильно отнормированы согласно (27). Выполнение условий (68)-(69) проверяется аналогично.

5.2.3 Ток в лидирующем приближении

В этой секции мы покажем, что в лидирующем приближении новый ток J' совпадает с J при выполнении условия правильного адамарова поведения (71). Это следует ожидать, так как УФ расходимость в (39) набирается на больших импульсах, на которых поля ведут себя одинаково в силу условия (71). Чтобы продемонстрировать это утверждение, предположим, что существует достаточно большой, но конечный масштаб $\lambda > 0$, так что при $|\mathbf{k}| > \lambda$ или $|\mathbf{p}| > \lambda$, можно полагать в интегралах с достаточной точностью

$$\begin{cases} \beta^s_{\mathbf{kp}r} \simeq 0, \\ \gamma^s_{\mathbf{kp}r} \simeq 0 \end{cases}, \begin{cases} \alpha^s_{\mathbf{kp}r} \simeq \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_r, \\ \omega^s_{\mathbf{kp}r} \simeq \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_r, \end{cases} \tag{79}$$

а также что коэффициенты конечны, когда $|\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{p}|$ не превосходят λ. Физически данное условие означает, что начиная с некоторого энергетического масштаба поля перестают чувствовать наложенное внешнее поле. Рассмотрим последнее слагаемое подынтегрального выражения (72) и разделим области интегрирования по $\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{q}$ в согласии с (79). Для простоты будем использовать следующее обозначение для свёртки спиноров $\mathcal{A}^{\sigma_1\sigma_2}_{\mathbf{pk}rl} = \psi^{(\sigma_1)\dagger}_{\mathbf{p}r}\gamma^0\gamma^3\psi^{(\sigma_2)}_{\mathbf{k}l}$, $\sigma_1 = \pm$, $\sigma_2 = \pm$, которая является непрерывной функцией переменных $\mathbf{p}, \mathbf{k}$ для любых $\{\sigma_1, \sigma_2, r, l\}$. Тогда

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} \sum_{r,l=1}^{2} \omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} \simeq \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|,|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q}\,\omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^s_{\mathbf{kp}r}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} +$$

$$+ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} d^3\mathbf{k} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p})\delta^s_l\omega^s_{\mathbf{kp}r}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}$$

$$+ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} d^3\mathbf{k} \int_{|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_r\omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} +$$

$$+ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} d^3\mathbf{k} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p})\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta^s_l\delta^s_r\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{80}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (80):

$$I_1 \simeq \underbrace{\sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{p}|\le\lambda} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} d^3\mathbf{k} \int_{|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{q}\,\omega^{s*}_{\mathbf{qp}l}\omega^{s}_{\mathbf{kp}r}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}}_{\text{конечный член}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{s,r,l=1}^{2} \int_{|\mathbf{p}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} d^3\mathbf{k} \int_{|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\delta(\mathbf{q}-\mathbf{p})\delta^s_l\delta^s_r\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rl}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}}_{=0,\text{ т.к. } |\mathbf{k}|<|\mathbf{p}|,\ |\mathbf{q}|<|\mathbf{p}|}, \tag{81}$$

$$I_2 = \sum_{s,r=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\omega^{s}_{\mathbf{kq}r}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rs}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} \simeq \sum_{s,r=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta^s_r\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}rs}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}ss}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = 0, \quad \text{т.к. } |\mathbf{k}| < |\mathbf{q}|. \tag{82}$$

Аналогично:

$$I_3 \simeq \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}ss}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = 0, \quad \text{т.к. } |\mathbf{k}| > |\mathbf{q}|. \tag{83}$$

Наконец, для последнего слагаемого имеем:

$$I_4 = \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|>\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}ss}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} = \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}ss}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}} -$$

$$- \underbrace{\sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{q}|\le\lambda} d^3\mathbf{q}\,\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{qk}ss}e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}}_{=0,\text{ т.к. } |\mathbf{q}|<|\mathbf{k}|} = \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|>\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{kk}ss} =$$

$$= \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{kk}ss} - \sum_{s=1}^{2} \int_{|\mathbf{k}|\le\lambda} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathcal{A}^{--}_{\mathbf{kk}ss} = \langle J^3\rangle_{\text{tree}} - \text{конечный член}. \tag{84}$$

Таким же образом легко получить, что остальные слагаемые в выражении для тока (72) дают конечный вклад. Наконец, суммируя (81)-(84), получаем ток в лидирующем приближении

$$\langle J'^3\rangle_{\text{tree}} = \lim_{\Lambda\to+\infty} \frac{e^{-\pi\frac{m^2}{eE}}}{2\pi^3} eE\Lambda + \text{конечные члены} = \langle J^3\rangle_{\text{tree}} + \text{конечные члены}. \tag{85}$$

Очевидно, что приведённый анализ не опирается на конкретную постановку задачи при выполнении всех наложенных условий на обобщённые коэффициенты.

5.3 Ток для нетривиального состояния

Во многих задачах интересно изучать такие величины, как заселённость уровней $n_{\mathbf{pk}}$ и аномальное квантовое среднее $\varkappa_{\mathbf{pk}}$. Рассмотрим нетривальное состояние $|\Omega\rangle$ вместо основного $|\alpha,\beta,\gamma,\omega\rangle$, тогда, по определению,

$$\langle\Omega|c^{\dagger}_{\mathbf{p}s}c_{\mathbf{k}r}|\Omega\rangle = n^{sr}_{\mathbf{pk}},\ \langle\Omega|d^{\dagger}_{\mathbf{p}s}d_{\mathbf{k}r}|\Omega\rangle = \tilde{n}^{sr}_{\mathbf{pk}}, \tag{86}$$

$$\langle\Omega|c_{\mathbf{p}s}d_{\mathbf{k}r}|\Omega\rangle = \varkappa^{sr}_{\mathbf{pk}}. \tag{87}$$

Среднее значение тока по такому состоянию имеет вид

$$\langle\Omega|J^3|\Omega\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{g}}{(2\pi)^6}\sum_{s,f=1}^{2}\Big[n^{sf}_{\mathbf{pg}}\xi^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\xi_{\mathbf{g}f} - \varkappa^{sf*}_{\mathbf{pg}}\xi^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\eta_{\mathbf{g}f} -$$
$$-\varkappa^{fs}_{\mathbf{gp}}\eta^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\xi_{\mathbf{g}f} + \left((2\pi)^3\delta(\mathbf{p}-\mathbf{g})\delta^f_s + \tilde{n}^{sf}_{\mathbf{pg}}\right)\eta^\dagger_{\mathbf{p}s}\gamma^0\gamma^3\eta_{\mathbf{g}f}\Big]. \tag{88}$$

С помощью определений (61)-(62) и свойства $n^{sr}_{\mathbf{pk}} = n^{rs^*}_{\mathbf{kp}}$ представим это выражение как

$$\langle\Omega|J^3|\Omega\rangle = \langle J'^3\rangle_{\mathrm{tree}} + \int\frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6}\sum_{r,l=1}^{2}\Big[\,{}_1n^{rl}_{\mathbf{kq}}\psi^{(+)\dagger}_{\mathbf{k}r}\gamma^0\gamma^3\psi^{(+)}_{\mathbf{q}l} + 2\mathrm{Re}\left(\,{}_1\varkappa^{rl}_{\mathbf{kq}}\psi^{(+)\dagger}_{\mathbf{k}r}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{q}l}\right) +$$
$${}_1\tilde{n}^{rl}_{\mathbf{kq}}\psi^{(-)\dagger}_{\mathbf{k}r}\gamma^0\gamma^3\psi^{(-)}_{\mathbf{q}l}\Big]e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\mathbf{x}}, \tag{89}$$

где для простоты введено обозначение

$${}_1n^{rl}_{\mathbf{kq}} = \int\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{g}}{(2\pi)^6}\sum_{s,f=1}^{2}\left[\alpha^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\alpha^f_{\mathbf{qg}l}n^{sf}_{\mathbf{pg}} - \gamma^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{sf*}_{\mathbf{pg}}\right) + \gamma^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\gamma^f_{\mathbf{qg}l}\tilde{n}^{sf}_{\mathbf{pg}} - \alpha^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{fs}_{\mathbf{gp}}\right)\right], \tag{90}$$

$${}_1\tilde{n}^{rl}_{\mathbf{kq}} = \int\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{g}}{(2\pi)^6}\sum_{s,f=1}^{2}\left[\beta^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\beta^f_{\mathbf{qg}l}n^{sf}_{\mathbf{pg}} - \omega^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{sf*}_{\mathbf{pg}}\right) + \omega^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\omega^f_{\mathbf{qg}l}\tilde{n}^{sf}_{\mathbf{pg}} - \beta^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{fs}_{\mathbf{gp}}\right)\right], \tag{91}$$

$${}_1\varkappa^{rl}_{\mathbf{kq}} = \int\frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{g}}{(2\pi)^6}\sum_{s,f=1}^{2}\left[\alpha^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\beta^f_{\mathbf{qg}l}n^{sf}_{\mathbf{pg}} - \omega^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{sf*}_{\mathbf{pg}}\right) + \gamma^{s*}_{\mathbf{kp}r}\left(\omega^f_{\mathbf{qg}l}\tilde{n}^{sf}_{\mathbf{pg}} - \beta^f_{\mathbf{qg}l}\varkappa^{fs}_{\mathbf{gp}}\right)\right]. \tag{92}$$

С помощью выражений (89)-(92) в дальнейшем можно увидеть, как квантовые поправки к заселённоси уровней $n_{\mathbf{pk}}$ и значению аномального квантового среднего $\varkappa_{\mathbf{pk}}$ влияют на ток фермионного поля.

6 Заключение

Итак, основным результатом проделанной работы можно считать качественно различные ответы для древесного тока фермионов на фоне постоянного электрического поля в зависимости от выбора основного состояния. Сначала мы показали, что при стандартном квантовании полей (27) значение тока (38) либо линейно расходится, либо обнуляется для определённого выбора мод (42). Расходимость тока обусловлена нереалистичной постановкой задачи с вечно существовавшим постоянным электрическим полем. Действительно, результаты для постоянного поля, действующего в течение конечного промежутка времени, показывают, что ток линейно нарастает и выходит на постоянное значение [13]. Также мы явно убедились, что аналогичная ситуация имеет место в теории с бозонами (50). Затем мы показали, что для расширенного класса основных состояний теории, определяемых обобщёнными коэффициентами Боголюбова в (61)-(62), древесный ток может обнуляться для более широкого круга состояний (73)-(74), а также может принимать конечные значения (76)-(77) для некоторых состояний типа (75). Также было явно продемонстрировано, что в случаях, когда выполнено требование правильного адамарова поведения, ток совпадает с током (39) с точностью до конечных вкладов, то есть линейно расходится. В дальнейшем планируется исследовать квантовые поправки к полученным выражениям для тока с помощью неравновесной диаграмной техники Швингера-Келдыша и эволюцию заселённости энергетических уровней и аномального квантового среднего (90)-(92).

A Асимптотики мод

В пределе больших аргументов $|z|$ и фиксированного ν справедливо следующее приближение [17]:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right],\ |\arg(z)| < \frac{3\pi}{4}, \tag{A1}$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right] -$$
$$- \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\nu\pi i + \frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right],\ -\frac{5\pi}{4} < \arg(z) < -\frac{\pi}{4}. \tag{A2}$$

Поэтому в случае $P_3 \to +\infty$ имеем:

$$D_\nu(z) \simeq e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{P_3^2}{2eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right)}, \tag{A3}$$

$$D_{\nu-1}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{eE}} \frac{1}{P_3} e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{P_3^2}{2eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right) - i\frac{\pi}{4}} \tag{A4}$$

и аналогично для $P_3 \to -\infty$:

$$D_\nu(z) \simeq e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{P_3^2}{2eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right)} +$$
$$+ \sqrt{\frac{eE}{2}} \frac{1}{|P_3|} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{i\frac{P_3^2}{2eE} + i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right) - i\frac{\pi}{4}}, \tag{A5}$$

$$D_{\nu-1}(z) \simeq -\sqrt{\frac{2}{eE}} \frac{1}{|P_3|} e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{P_3^2}{2eE} - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right) - i\frac{\pi}{4}} -$$
$$- \frac{2ieE}{m^2+|p_\perp|^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{i\frac{P_3^2}{2eE} + i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right)}. \tag{A6}$$

В пределе $|\mathbf{p}| \to +\infty$ при фиксированном моменте времени t, когда $p_3 \to \pm\infty$ и $|p_\perp|$ фиксирован, получаем:

$$D_\nu(z) \simeq e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{p_3^2}{2eE} - \frac{i}{2}eEt^2 - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right)} e^{-i|p_3|t},\ p_3 \to +\infty, \tag{A7}$$

$$D_\nu(z) \simeq e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i\frac{p_3^2}{2eE} - \frac{i}{2}eEt^2 - i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right)} e^{i|p_3|t} +$$
$$+ \sqrt{\frac{eE}{2}} \frac{1}{|P_3|} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{8eE}} e^{i\frac{p_3^2}{2eE} + \frac{i}{2}eEt^2 + i\frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2\frac{P_3^2}{eE}\right) - i\frac{\pi}{4}} e^{-i|p_3|t},\ p_3 \to -\infty. \tag{A8}$$

Также для вычисления тока в разделах 4 и 5 мы пользуемся следующими свёртками спиноров (15):

$$u_{\mathbf{p}1}^{(-)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}1}^{(-)} = u_{\mathbf{p}2}^{(-)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}2}^{(-)} = -u_{\mathbf{p}1}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}1}^{(+)} = -u_{\mathbf{p}2}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}2}^{(+)} =$$
$$= 2\left(m^2 + |p_\perp|^2\right) \left[1 - 2|D_\nu(z)|^2 e^{-\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}\right] e^{\pi \frac{m^2+|p_\perp|^2}{4eE}}, \tag{A9}$$

$$u^{(+)\dagger}_{\mathbf{p}1}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}1} = 4p^*_\perp \tfrac{1-i}{2}\tfrac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z)D^*_\nu(z), \qquad u^{(+)\dagger}_{\mathbf{p}2}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}1} = -4m \tfrac{1-i}{2}\tfrac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z)D^*_\nu(z),$$
$$u^{(+)\dagger}_{\mathbf{p}2}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}2} = -4p_\perp \tfrac{1-i}{2}\tfrac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z)D^*_\nu(z), \qquad u^{(+)\dagger}_{\mathbf{p}1}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}2} = -4m \tfrac{1-i}{2}\tfrac{m^2+|p_\perp|^2}{\sqrt{eE}} D^*_{\nu-1}(z)D^*_\nu(z),$$
$$u^{(+)\dagger}_{\mathbf{p}1}\gamma^0\gamma^3 u^{(+)}_{\mathbf{p}2} = u^{(-)\dagger}_{\mathbf{p}1}\gamma^0\gamma^3 u^{(-)}_{\mathbf{p}2} = 0. \tag{A10}$$

B Вывод выражения для тока

С помощью условий нормировки в форме (33) перепишем выражение для тока (35) в виде

$$\left\langle J^3 \right\rangle_{\text{tree}} = 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[4 \left(P_3^2 |f_{\mathbf{p}}|^2 + |\partial_t f_{\mathbf{p}}|^2 \right) - 1 \right] + 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4iP_3 \left[f_{\mathbf{p}} \partial_t f^*_{\mathbf{p}} - \partial_t f_{\mathbf{p}} f^*_{\mathbf{p}} \right]. \qquad (B1)$$

Покажем, что $\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dP_3}{2\pi} \partial_{P_3} \left\{ \mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) \right\}$ для некоторой функции $\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3)$.

1. Сначала получим полезные соотношения. Из уравнений движения, их первых производных по времени и сопряжённых к ним уравнений

$$\left[(eE)^2 \partial^2_{P_3} + P_3^2 + |p_\perp|^2 + m^2 + ieE \right] f_{p_\perp}(P_3) = 0, \qquad (B2)$$

$$\left[(eE)^2 \partial^2_{P_3} + P_3^2 + |p_\perp|^2 + m^2 - ieE \right] f^*_{p_\perp}(P_3) = 0, \qquad (B3)$$

$$(eE)^2 \partial^3_{P_3} f_{p_\perp}(P_3) + 2P_3 f_{p_\perp}(P_3) + P_3^2 \partial_{P_3} f_{p_\perp}(P_3) + \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \partial_{P_3} f_{p_\perp}(P_3) + ieE \partial_{P_3} f_{p_\perp}(P_3) = 0, \qquad (B4)$$

$$(eE)^2 \partial^3_{P_3} f^*_{p_\perp}(P_3) + 2P_3 f^*_{p_\perp}(P_3) + P_3^2 \partial_{P_3} f^*_{p_\perp}(P_3) + \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \partial_{P_3} f^*_{p_\perp}(P_3) - ieE \partial_{P_3} f^*_{p_\perp}(P_3) = 0 \qquad (B5)$$

получаем следующие соотношения (мы временно обозначили $f = f_{p_\perp}(P_3)$ для удобства):

$$2P_3^2 \left| f \right|^2 = -2 \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \left| f \right|^2 - (eE)^2 \left[\partial^2_{P_3} f f^* + f \partial^2_{P_3} f^* \right], \qquad (B6)$$

$$4P_3^3 \partial_{P_3} \left(\left| f \right|^2 \right) = 4P_3^3 \left[\partial_{P_3} f f^* + f \partial_{P_3} f^* \right] =$$

$$= -4P_3 \left((eE)^2 \left[\partial^2_{P_3} f^* \partial_{P_3} f + \partial_{P_3} f^* \partial^2_{P_3} f \right] + \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \partial_{P_3} \left(\left| f \right|^2 \right) + ieE \left[f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] \right), \qquad (B7)$$

$$2(eE)^2 \left| \partial_{P_3} f \right|^2 = i(eE)^3 \partial_{P_3} \left\{ \partial^2_{P_3} f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f \partial^2_{P_3} f^* \right\} + 2i(eE) P_3 \left[f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right], \qquad (B8)$$

$$(eE)^3 \left[\partial^2_{P_3} f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f \partial^2_{P_3} f^* \right] = -eE \left(m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2 \right) \left[f \partial_{P_3} f^* - f^* \partial_{P_3} f \right] - i(eE)^2 \partial_{P_3} \left(\left| f \right|^2 \right). \qquad (B9)$$

2. Преобразуем выражение для тока следующим образом

$$4 \left(P_3^2 \left| f \right|^2 + \left| \partial_t f \right|^2 \right) - 1 + 4iP_3 \left[f \partial_t f^* - \partial_t f f^* \right] = \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 \left| f \right|^2 + 4P_3 (eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 \right\} - 1 +$$

$$+ 4iP_3(eE) \left[f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] - 8P_3^2 \left| f \right|^2 - 4P_3^3 \left[f \partial_{P_3} f^* + \partial_{P_3} f f^* \right] - 4P_3 (eE)^2 \left[\partial^2_{P_3} f \partial_{P_3} f^* + \partial_{P_3} f \partial^2_{P_3} f^* \right] =$$

Используя (B6), (B7), упрощаем:

$$= \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 \left| f \right|^2 + 4P_3 (eE)^2 \left| \partial_{P_3} f \right|^2 \right\} - 1 + 4iP_3(eE) \left[f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] + 8 \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \left| f \right|^2 +$$

$$+ 4(eE)^2 \left[\partial^2_{P_3} f f^* + f \partial^2_{P_3} f^* \right] + 4P_3 (eE)^2 \left[\partial^2_{P_3} f^* \partial_{P_3} f + \partial_{P_3} f^* \partial^2_{P_3} f \right] + 4P_3 \left(m^2 + |p_\perp|^2 \right) \partial_{P_3} \left(\left| f \right|^2 \right) +$$

$$+ 4iP_3(eE)\left[f\partial_{P_3}f^*-\partial_{P_3}ff^*\right]-4P_3(eE)^2\left[\partial^2_{P_3}f\partial_{P_3}f^*+\partial_{P_3}f\partial^2_{P_3}f^*\right] = \partial_{P_3}\left\{4P_3^3\left|f\right|^2+4P_3(eE)^2\left|\partial_{P_3}f\right|^2\right\}-1+$$

$$+ 8iP_3(eE)\left[f\partial_{P_3}f^*-\partial_{P_3}ff^*\right]+8\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\left|f\right|^2+4(eE)^2\partial_{P_3}\left\{\partial_{P_3}ff^*+f\partial_{P_3}f^*\right\}-8(eE)^2\left|\partial_{P_3}f\right|^2+$$

$$+ 4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\partial_{P_3}\left(P_3\left|f\right|^2\right) - 4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\left|f\right|^2 =$$

Тогда из (B8) получаем

$$= \partial_{P_3}\left\{4P_3^3\left|f\right|^2+4P_3(eE)^2\left|\partial_{P_3}f\right|^2\right\}-1+8iP_3(eE)\left[f\partial_{P_3}f^*-\partial_{P_3}ff^*\right]+4(eE)^2\partial_{P_3}\left[\partial_{P_3}ff^*+f\partial_{P_3}f^*\right]+$$

$$+4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\partial_{P_3}\left(P_3\left|f\right|^2\right) + 4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\left|f\right|^2 - 4i(eE)^3\partial_{P_3}\left[\partial^2_{P_3}f\partial_{P_3}f^* - \partial_{P_3}f\partial^2_{P_3}f^*\right]-$$

$$-8i(eE)P_3\left[f\partial_{P_3}f^* - \partial_{P_3}ff^*\right] =$$

$$= \partial_{P_3}\left\{4P_3(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)\left|f\right|^2+4P_3(eE)^2\left|\partial_{P_3}f\right|^2+4(eE)^2\partial_{P_3}\left(\left|f\right|^2\right)-4i(eE)^3\left[\partial^2_{P_3}f\partial_{P_3}f^*-\partial_{P_3}f\partial^2_{P_3}f^*\right]\right\}+$$

$$+4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\left|f\right|^2 - 1 =$$

Наконец, из (B9) следует

$$= 4\partial_{P_3}\left\{\left(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2\right)\left(P_3\left|f\right|^2 + i(eE)\left[f\partial_{P_3}f^* - f^*\partial_{P_3}f\right]\right) + P_3(eE)^2\left|\partial_{P_3}f\right|^2\right\}+$$

$$+4\left(m^2+|p_\perp|^2\right)\left|f\right|^2 - 1.$$

Поэтому, пользуясь (35), получаем

$$\left\langle J^3\right\rangle_{\text{tree}} = -\left\langle J^3\right\rangle_{\text{tree}} + 2\int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2}\int\frac{dP_3}{2\pi}\partial_{P_3}\left\{\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3)\right\} \tag{B10}$$

Окончательно:

$$\left\langle J^3\right\rangle_{\text{tree}} = \int\frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2}\int\frac{dP_3}{2\pi}\partial_{P_3}\left\{\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3)\right\}, \tag{B11}$$

где $\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) = 4\big\{(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)\big(P_3|f|^2 + i(eE)\big[f\partial_{P_3}f^* - f^*\partial_{P_3}f\big]\big) + P_3(eE)^2|\partial_{P_3}f|^2\big\}$. Также можно переписать полученное выражение, снова используя условие нормировки:

$$\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) = 2\left\{\frac{m^2+|p_\perp|^2+P_3^2}{P_3} - \frac{2(m^2+|p_\perp|^2)}{P_3}\left[(m^2+|p_\perp|^2+P_3^2)|f|^2 + \left|\partial_t f\right|^2\right]\right\}. \tag{B12}$$

Список литературы

[1] D. Krotov and A. M. Polyakov, "Infrared Sensitivity of Unstable Vacua," Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011) doi:10.1016/j.nuclphysb.2011.03.025, [arXiv:1012.2107 [hep-th]].

[2] E. Akhmedov, U. Moschella and F. Popov, "Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space," Phys. Rev. D **99**, no.8, 086009 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.99.086009, [arXiv:1901.07293 [hep-th]].

[3] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, "Secularly growing loop corrections in strong electric fields", JHEP **1409**, 071 (2014) doi:10.1007/JHEP09(2014)071, [arXiv:1405.5285 [hep-th]].

[4] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, "A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields", JHEP **1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085, [arXiv:1412.1554 [hep-th]].

[5] E. T. Akhmedov, E. N. Lanina and D. A. Trunin, "Quantization in background scalar fields", Phys. Rev. D **101**, no. 2, 025005 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.025005, [arXiv:1911.06518 [hep-th]].

[6] E. Akhmedov and S. Alexeev, "Dynamical Casimir effect and loop corrections", Phys. Rev. D **96**, no.6, 065001 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.065001, [arXiv:1707.02242 [hep-th]].

[7] E. T. Akhmedov, O. Diatlyk and A. G. Semenov, "Out of equilibrium two-dimensional Yukawa theory in a strong scalar wave background", arXiv:1909.12805 [hep-th].

[8] Попов Ф.К. Нестационарные явления во внешних сильных полях: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02/Математический институт имени В.А. Стеклова РАН 119991, М., 2016 - 127 с.

[9] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola,"Fermion pair production in a strong electric field", Phys. Rev. D 45, 4659 (1992).

[10] E. Akhmedov, "Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space", Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014), doi:10.1142/S0218271814300018, [arXiv:1309.2557 [hep-th]].

[11] P. R. Anderson and E. Mottola, "Quantum vacuum instability of "eternal" de Sitter space", Phys. Rev. D **89**, 104039 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.89.104039, [arXiv:1310.1963 [gr-qc]].

[12] P. R.Anderson and E. Mottola, "Instability of global de Sitter space to particle creation", Phys. Rev. D **89**, 104038 (2014), doi:10.1103/PhysRevD.89.104038, [arXiv:1310.0030 [gr-qc]].

[13] S. P. Gavrilov and D. M. Gitman, "One-loop energy-momentum tensor in QED with electric-like background", Phys. Rev. D **78**, 045017 (2008), doi:10.1103/PhysRevD.78.045017, [arXiv:0709.1828 [hep-th]].

[14] J. S. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951)

[15] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction to quantum field theory"

[16] D. S. F. Crothers, "Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument", J.Phys. A: Gen. Phys. Vol. 5 1680 (1977)

[17] H. Bateman, "Higher transcedental functions. Vol.2" (MC. Graw-Hill, 1953)