ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Дуальность жидкость/гравитация и киральные эффекты

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:
студент 624 группы
Шарипов Рустем Олегович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Захаров В.И.

Долгопрудный
2020

Содержание

1 Введение

Квантовые аномалии являются особенностью квантовых теорий поля с функкдаментальными киральными фермионами. Они проявляются в несохранении классически сохраняющегося аксиального тока на квантовом уровне при наличии внешних калибровочных и гравитационных полей. Недавно было показано, что аномалии приводят к особому классу явлений переноса, называемых киральными эффектами.

Актуальность киральных эффектов обсуждалась в различных областях физики. Первоначальный вывод был сделан Виленкиным [1, 16] с приложениями для космологии. Позднее значение киральных эффектов было реализовано и для режима кварк-глюонной плазмы КХД [12]. В физике твердого тела киральные эффекты актуальны для физики полуметаллов Вейля и Дирака, где киральные фермионы реализуются как низкоэнергетические возбуждения, а наблюдаемое в эксперименте отрицательное магнитосопротивление в ZrTe5 было связано с наличием кирального магнитного эффекта (КМЭ) [17]. Киральные эффекты также учитывались в холодных атомах [14].

Прямая связь КМЭ и КВЭ с киральной аномалией обсуждалась в гидродинамическом приближении в [7] . С другой стороны, тепловая часть КВЭ не определяется киральной калибровочной аномалией [10]. В [9] авторы утверждают, что именно тепловая часть КВЭ является гравитационной киральной аномалией. В [18] этот эффект был связан с аномалиями через физику черных дыр.

Соответствие AdS/CFT позволяет понять различные аспекты сильно связанных калибровочных теорий [2]. Частный случай соответствия –дуальность жидкость/гравитация [3] является инструментом для понимания гидродинамического режима дуальных конформных теорий поля. Так, в голографической модели можно найти диссипативные транспортные коэффиценты и гидродинамический отклик на внешниие поля сильно взаимодействующей теории. Кроме диссипативных эффектов, можно воспроизвести недиссипативные киральные эффекты, в частности КМЭ и КВЭ.

В этой работе мы исследуем дальнейшие связи между аномалией и транспортными коэффицентами в рамках голографии. Мы рассматриваем голографическую модель с членом Черна-Саймонса, который воспроизводит калибровочную и гравитационную аномалию. В этой модели мы считаем гидродинамические отклики системы (при конечной температуре с хим потенциалом) на внешние электромагнитные и гравитационные поля. Вычисление проводится до 3 порядка по градиентам и линейно по амплитуде возмущения внешних полей.

Вместе с ожидаемыми КМЭ и КВЭ мы наблюдаем новый отклик на гравитационное поле и градиентные попровки к КМЭ и КВЭ, связанные с гравитационной аномалией. Отклик на гравитационную кривизну – первый киральный гравитационный эффект посчитанный в голографии. Этот эффект связан с гравитационной аномалией, которая является свободным параметром в голографической теории, таким образом, мы ожидаем универсальность найденных нами эффектов.

В разделе 2 мы обозреваем дуальность жидкость/гравитация. В 3 разделе мы обозреваем киральные эффекты и обсуждаем их гидродинамическое описание. Киральные эффекты для голографической плазмы посчитаны в 4 разделе.

2 Дуальность жидкость/гравитация

2.1 AdS/CFT соответствие

AdS/CFT соответствие [2] связывает гравитационные теории в асимптотических пространствах Анти-де-Ситтера с конформными теориями поля. Наиболее строгая форма соответствия следующая.

Рассмотрим $\mathcal{N} = 4$ теорию Супер Янг-Милса с калибровочной группой $SU(N)$ и константой связи g_{YM}. Тогда AdS_5/CFT_4 соответствие говорит нам что эта теория динамически эквивалентна теории суперструн с длиной струны $l_s = \sqrt{\alpha'}$ и константой связи g_s в пространстве $AdS_5 \times S_5$ с радиусом кривизны L. Свободные параметры в теории поля g_{YM} и N связаны с параметрами теории струн g_s и $L/\sqrt{\alpha'}$ следующим образом

$$g^2_{YM} = 2\pi g_s \quad , \quad 2g^2_{YM}N = L^4/\alpha'^2 \tag{1}$$

Теория Янга-Милса в данном случае будет конформной.

Нас будет интересовать предел т'Хофта $g_s \ll 1$ с фикированным отношением $L/\sqrt{\alpha'}$. Отсюда лидирующем порядке по g_s теория струн сводится к класической теории струн. Тогда в дуальной теории $g_{YM} \ll 1$ с фиксированной константой $\lambda = g^2_{YM}N$ и $N \to \infty$. Причем, будем рассматривать большие значения константы $\lambda \gg 1$, что соответствует сильно-взаимодействующей теории на границе. Таким образом можно связать динамику теорий с слабым и сильным взаимодействием.

2.2 Релятивистская гидродинамика

Гидродинамика является эффективным длинноволновым описанием классической или квантовой теории многих частиц при ненулевой температуре. Рассмотрим малые флуктуации около термодинамического равновесия.Термодинамическое равновесие характеризуется термодинамическими переменными: температурой p, плотностью энергии ϵ, плотностью n. Динамика термодинамических переменных дается уравнениями сохранения:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \nabla_\mu J^\mu = 0 \tag{2}$$

,где $T^{\mu\nu}$–тензор энергии импульса.

Идеальная гидродинамика

Рассмотрим идеальную однородную жидкость в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. Термин идеальная означает отсутствие диссипации. В собственной системе отсчета жидкости т.е в $u^\mu = (1,0,0,0)$ имеем

$$\left\langle T^{00}\right\rangle = \epsilon \quad , \quad T^{ii} = p \quad , \quad J^0 = n$$

Отсюда легко записать выражение в ковариантном виде:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)\, u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \tag{3}$$

Кроме ТЭИ и тока в системе сохраняется ток энтропии

$$\nabla_\mu s^\mu = \nabla(s u^\mu) = 0 \tag{4}$$

,где s плотность энтропии.

Диссипативная гидродинамика

Мы можем выписать выражение для ТЭИ и тока в порядке выше 0 с точностью до переопределения полей $u^\mu(x), T(x), \mu(x)$. Мы фиксируем в дальнейшем произвол выбором Ландау "frame":

$$T_{\mu\nu} u^\mu = -\epsilon u_\nu \qquad J_\nu u^\nu = -n \tag{5}$$

В первом порядке по градиентам гидродинамических переменных уравнения состояния:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} - \eta \Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta}\left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu u^\mu\right) - \zeta \Delta^{\mu\nu}\partial u + \mathcal{O}(\partial^2) \tag{6a}$$

$$J^\mu = n u^\mu - \sigma\, T \Delta^{\mu\nu}\partial_\nu(\mu/T) + \chi_T \Delta^{\mu\nu}\partial_\nu T + \mathcal{O}(\partial^2) \tag{6b}$$

Положительная определенность тока энтропии ограничивает транспортные коэффиценты $\eta, \zeta, \sigma, \chi_T$ следующим образом:

$$\eta \geq 0 \quad , \quad \sigma \geq 0 \quad , \quad \eta \geq 0 \quad , \quad \chi_T = 0 \tag{7}$$

Транспортные коэффиценты η, ζ, σ фиксированы из микроскопической теории. Аналогичным образом можно построить гидродинамику во всех порядках по градиентам.

2.3 Гидродинамика из AdS/CFT

Десятимерная супергравитация типа IIB имеет много усечений в пространство AdS_5. В пространстве AdS_5 гравитация будет описываться действием Эйнштейна с космологической постоянной:

$$S = -\frac{1}{16\pi G_5}\int_M d^5x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_5}\int_{\partial M} d^4x\sqrt{-\gamma}K \tag{8}$$

Где $\Lambda = -\frac{6}{L^2}$, L– радиус кривизны AdS_5 пространства. Второй член в действии содержит $K_{\mu\nu} = -\gamma_\mu^\sigma \nabla_\sigma n_\nu$ -внешнюю кривизну границы, где $\gamma_{\mu\nu}$ и n_μ –индуцированная метрика и вектор нормали соответственно.

В силу дуальности между гравитацией и калибровочной теорией в AdS пространстве, существует класс дуальных конформных теорий поля, для которых (8) описывает универсальную динамику дуального тензора энергии импульса. Более того, в длинноволновом пределе мы ожидаем увидеть гидродинамические уравнения эффективной теории поля.

Уравнение движения из действия (8) в обьеме :

$$R_{MN} - \frac{1}{2}R\; g_{MN} + \Lambda g_{MN} = 0 \tag{9}$$

Статическое решение

Решение уравнения движения – черная дыра

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\left[-\left(1-\frac{1}{(br)^4}\right)dt^2 + \sum_{i=1}^{3} dx_i^2\right] + \frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{1}{(br)^4}\right)^{-1} dr^2 \tag{10}$$

Граничный тензор энергии импульса:

$$T^{\mu\nu}_{\partial M} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial S}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G_5}\left[K_{\mu\nu} - K\gamma_{\mu\nu}\right] \tag{11}$$

Тогда из уравнения (10),(11) получаем:

$$T^{00}_{\partial M} = \frac{3}{16\pi G}\frac{1}{b^4} \quad , \quad T^{ii}_{\partial M} = \frac{1}{16\pi G}\frac{1}{b^4} \qquad i = 1,2,3 \tag{12}$$

Можно переписать это в терминах температуры Хокинга черной дыры:

$$T_{BH} = \frac{1}{\pi b} \tag{13}$$

Используя так же:

$$16\pi G_5 = \frac{8Vol_5}{\pi N^2} \tag{14}$$

,где $Vol_5 = \pi^3$ для $\mathcal{N} = 4$ теории. Тогда из уравнения (12) можем идентифицировать в терминах идеальной жидкости (3):

$$\epsilon = 3p = N^2\frac{3\pi^2 T^4}{8} \tag{15}$$

Соотношение между плотностью энергии и давления является следствием конформности теории.

Без ограничения общности положим $L = 1$.

Решение для черной дыры (10) можно обобщить на следующий класс:

	Обьем AdS_5	Граничная теория
AdS/CFT	Теория суперструн типа 2 B	$\mathcal{N} = 4$ супер Янг-Милс
Эффективная теория	Уравнение Эйнштейна с космологической постоянной	Релятивистская гидродинамика
Статическое решение	AdS D-брана	Идеальная жидкость
Пертурбация	Эволюция D-браны	диссипативная гидродинамика

Таблица 1: Обзор дуальности жидкость/гравитация

$$ds^2 = -r^2 f(br) u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - 2u_\mu dr dx^\mu \tag{16}$$

,где $f(r) = 1 - \frac{1}{r^4}$ и u_μ фиксированный вектор удовлетворяющий условию $u^2 = -1$. Тензор энергии импульса границы для такого решения:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G_5} \frac{1}{b^4} (4u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}) \tag{17}$$

Пертурбация решения

Теперь рассмотрим пертурбацию статического решения. Теперь мы будем искать решение с параметрами u, b, которые могут зависеть от граничных координат x^μ. Метрика $g^{(0)}$ из уравнения (16) больше не будет являтся решением уравнений Эйнштейна при произвольных $u(x), b(x)$. Будем рассматривать пертурбативную зависимость от координат:

$$u_\mu(x) = u_\mu^{(0)} + \epsilon u_\mu^{(1)}(x) + ... \tag{18a}$$

$$b(x) = b^{(0)} + \epsilon b^{(1)}(x) + ... \tag{18b}$$

Аналогично разложим метрику по малому параметру:

$$g_{MN} = g_{MN}^{(0)} + \epsilon g_{MN}^{(1)} + ... \tag{19}$$

Таким образом, мы получим 15 уравнений Эйнштейна, 4 из которых не содержат компонент метрики $g^{(n)}$. Эти 4 уравнения связывают граничные параметры u_μи b и эквивалентны закону сохранения тензора энергии импульса или уравнению Навье-Стокса в терминах гидродинамики:

$$\partial_\mu T_{(n-1)}^{\mu\nu} = 0 \tag{20}$$

Фиксируем калибровку метрики:

$$g_{r\mu} \propto u_\mu \quad , \quad g_{rr} = 0 \tag{21}$$

Кроме того, потребуем непрерывность решения на всей оси r. Выберем гидродинамическую систему Ландау:

$$T_{diss}^{\mu\nu} u_\nu = 0 \tag{22}$$

Тогда в первом порядке по ϵ метрика решающая уравнения Эйнштейна:

$$ds^2 = -2u_\mu dx^\mu dr - r^2 f(br) u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu +$$
$$+ 2r^2 bF(br)\sigma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{2}{3} r u_\mu u_\nu \partial u dx^\mu dx^\nu - r u^\lambda \partial_\lambda \left(u_\mu u_\nu\right) dx^\mu dx^\nu \tag{23}$$

,где

$$\sigma^{\mu\nu} = P^{\mu\alpha} P^{\nu\beta} \partial_{(\ \alpha} u_{\beta\ )} - \frac{1}{3} P^{\mu\nu} \partial u$$

Граничный тензор энергии импульса для такого решения из формулы (11):

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G_5} \left[\frac{1}{b^4} \left(4u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}\right) - \frac{2}{b^3} \sigma^{\mu\nu} \right] \tag{24}$$

Из этого уравнения следует , что $\eta = \frac{1}{b^3} \frac{1}{16\pi G_5}$. Плотность энтропии можно найти как $s = \frac{1}{3} \frac{\partial \epsilon}{\partial T}$. Отсюда получаем фундаментальное соотношение [4]:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \tag{25}$$

Это соотношение является наименьшим для широкого класса квантовых теорий поля при конечной температуре. Таким образом, мы можем вычислить транспортные коэффиценты отвечающие за диссипацию во всех порядках по градиентам, включая нелинейный отклик и получить фундаментальные соотношения на них для класса дуальных сильно взаимодействующих теорий.

3 Киральные эффекты

3.1 Киральные эффекты в теории поля

Квантовые аномалии являются особенностью квантовых теорий поля с фундаментальными киральными фермионами. Они проявляются в несохранении классически сохраняемого заряда на квантовом уровне при наличии внешних калибровочных и гравитатинальных полей.

Так, в случае безмассового лагранжиана Дирака имеем сохранение (на классическом уровне) аксиального тока $j_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$:

$$\partial_\mu j_A^{\ \mu} = 0 \tag{26}$$

Учет петлевых поправок на квантовом уровне ведет к несохранению аномального тока:

$$\partial_\mu j_A^\mu = -\frac{e^2}{16\pi^2} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \tag{27}$$

Аналогичное несохранение тока существует во внешнем гравитационном поле:

$$\partial_\mu j^\mu_A = \frac{1}{768\pi^2} R_{\mu\nu}\bar{R}^{\mu\nu} \tag{28}$$

последний эффект называется гравитационной аномалией.

Макроскопическим проявлением аномалий являются киральные эффекты. Простейшим примером является Киральный Магнитный Эффект (КМЭ). Так, для безмассовых фермионов во внешнем магнитном поле возникает ток вдоль магнитного поля:

$$\vec{j}_A = \frac{e^2\mu}{2\pi^2}\vec{B} \tag{29}$$

Другой известный пример кирального эффекта- Киральный Вихревой Эффект (КВЭ).

Пусть система достигла локального равновесия во внешнем магнитном поле с локальной скоростью u^μ, тогда:

$$J^\mu = \sigma_B B^\mu + \sigma_V \omega^\mu \tag{30}$$

,где $B^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu F_{\alpha\beta}$, $\omega^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\nu \partial_\alpha u_\beta$.

Транспортные коэффиценты можно вычислить из первых принципов с помощью формул Кубо [8]:

$$\sigma_B = \lim_{k_n \to 0} \epsilon_{ijn} \frac{i}{2k_n} \left\langle J^i J^j \right\rangle|_{\omega\to 0} \tag{31}$$

$$\sigma_V = \lim_{k_n \to 0} \epsilon_{ijn} \frac{i}{2k_n} \left\langle J^i T^{0j} \right\rangle|_{\omega\to 0} \tag{32}$$

В случае левых безмассовых фермионов имеем $J^i = \bar{\psi}\gamma_{L/R}\gamma^i\psi$, $T^{0i} = \frac{i}{2}\bar{\psi}(\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0)\psi$. Исполуя Матцубаровскую технику получаем:

$$\sigma_B = \frac{\mu}{4\pi^2} \quad , \quad \sigma_V = \frac{\mu^2}{4\pi^2} + \frac{T^2}{12} \tag{33}$$

В вычислениях теории поля не фисируется гидродинамическая калибровка [15]. В интересах следующих глав переведем этот отклик в гидродинамическую систему Ландау :

$$\xi_B = \lim_{k_n \to 0} \epsilon_{ijn} \frac{i}{2k_n} \left(\left\langle J^i J^j \right\rangle - \frac{n}{\epsilon + p} \left\langle T^{0i} J^j \right\rangle \right)|_{\omega\to 0} \tag{34}$$

$$\xi_V = \lim_{k_n \to 0} \epsilon_{ijn} \frac{i}{2k_n} \left(\left\langle J^i T^{0j} \right\rangle - \frac{n}{\epsilon + p} \left\langle T^{0i} T^{0j} \right\rangle \right)|_{\omega\to 0} \tag{35}$$

В этом случае транспортные коэффиценты равны:

$$\xi_B = \frac{\mu}{4\pi^2} - \frac{n}{\epsilon + p}\left(\frac{\mu^2}{4\pi^2} + \frac{T^2}{12}\right) \tag{36a}$$

$$\xi_V = \frac{\mu^2}{4\pi^2} + \frac{T^2}{12} - \frac{n}{\epsilon + p}\left(\frac{\mu^3}{6\pi^2} + \frac{\mu T^2}{6}\right) \tag{36b}$$

3.2 Аномальная гидродинамика и киральные эффекты

В присутствии внешнего электромагнитного поля ток квантовой жидкости будет не сохранятся согласно формуле (27). Тогда уравнения сохранения ТЭИ и тока жидкости изменятся следующий образом :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\lambda\nu} j_\nu \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = C \; E_\mu B^\mu \tag{37}$$

, где C-аномальный коэффицент, $E^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$, B было введено ранее. Из главы 2.2 с учетом (37) можно получить следующее выражение:

$$\partial_\mu s^\mu = \partial_\mu \left(s u^\mu - \frac{\mu}{T} \nu^\mu \right) = -\frac{1}{T} \partial_\mu u_\nu \tau^{\mu\nu} - \nu^\mu \left(\partial_\mu \frac{\mu}{T} - \frac{E_\mu}{T} \right) - C \frac{\mu}{T} E \; B \tag{38}$$

В случае неаномального тока ($C = 0$) это выражение – уравнение для потока энтропии. В случае $C \neq 0$, из уравнения (38) не следует неотрицательность дивергенции для любых внешних полей. Можно исправить это изменив определение тока энтропии и добавив нечетные градиентные поправки в ток согласно [7]:

$$s^\mu = s u^\mu - \frac{\mu}{T} \nu^\mu + D_V \omega^\mu + D_B B^\mu \tag{39a}$$

$$\nu^\mu = -\sigma T P^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\frac{\mu}{T} \right) + \sigma E_\mu + \xi_B B^\mu + \xi_V \omega^\mu \tag{39b}$$

Теперь требование $\partial_\mu s^\mu \geq 0$ при любых внешних условиях фиксирует транспортные коэффиценты:

$$\xi_V = C \left(\mu^2 - \frac{2}{3} \frac{n\mu^3}{\epsilon + p} \right) + a \left(T^2 - 2 \frac{n\mu T^2}{\epsilon + p} \right) \tag{39c}$$

$$\xi_B = C \left(\mu - \frac{1}{2} \frac{n\mu^2}{\epsilon + p} \right) - \frac{a}{2} \frac{n}{\epsilon + p} T^2 \tag{39d}$$

T^2 вклады появляются вместе с константой интегрирования a и не фиксируются однозначно в этом подходе. Транспортные коэффиценты найденные в гидродинамическом подходе совпадают с (36) при $C = \frac{1}{4\pi^2}$ и $a = \frac{1}{12}$.

4 Киральные эффекты голографической плазмы

4.1 Линейный отклик и результаты

В этой главе мы воспроизводим киральные эффекты полученные в предыдущей главе для сильно-взаимодействующей голографической плазмы. Мы вопспроизводим новые эффекты и строим алгоритм нахождения полного отклика в присутствии внешних гравитационных и электромагнитных полей во всех порядках по градиентам.

Разделим гидродинамические вклады в ТЭИ и ток на четные и нечетные: $\tau^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu}_{odd} + \tau^{\mu\nu}_{even}$, $\nu^\mu = \nu^\mu_{\rm odd} + \nu^\mu_{\rm even}$ где $\tau^{\mu\nu}_{\rm even}$, $\nu^\mu_{\rm even}$ инвариантны относительно пространственного отражения и $\tau^{\mu\nu}_{\rm odd}$, $\nu^\mu_{\rm odd}$ относительно смены спина. Нас будут интересовать эффекты второго типа, так как именно они связаны с аномалиями. Наиболее общее выражение в линейном по амплитуде порядке для нечетных вкладов:

$$\tau^{\mu\nu}_{\rm odd} = \chi_T \ \Delta^{e<\mu}\epsilon^{\nu>bcd}u_b\nabla_c R_{de} + O(\text{non-linear}), \tag{40a}$$

$$\nu^\mu_{odd} = \xi_V \ \omega^\mu + \xi_B \ B^\mu + \chi_V \ \epsilon^{\mu\nu\rho s}u_\nu\nabla_\rho R_{\sigma\alpha}u^\alpha + O(\text{non-linear}), \tag{40b}$$

где $\xi_{B/V}$ и $\chi_{V/T}$ функции дифференциальных операторов $u^\mu\nabla_\mu$ и $\nabla^\mu\nabla_\mu$. Также, для произвольного $A_{\mu\nu}$ мы ввели

$$A_{<\mu\nu>} = \Delta^\lambda_\mu\Delta^\sigma_\nu A_{\lambda\sigma} - \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}\Delta^{\lambda\sigma}A_{\lambda\sigma}.$$

Где коэффиценты ξ_B и ξ_V соответствуют КМЭ и КВЭ соответственно, ξ_T гидродинамический отклик на гравитацию, который был посчитан в теории поля [11] и χ_V отклик на гравитацию в ток, который имеет физический смысл поправки к КВЭ, но не обсуждался ранее.

Теперь мы презентуем посчитанные коэффиценты в уравнениях (40) до 3 порядка по градиентам в статическом пределе ($u^\mu\nabla_\mu = 0$) для голографической модели, которая будет обсуждаться далее. У этой теории есть 3 свободных параметра: G_5, λ и κ, которые связанны с числом степеней свободы теории, гравитационной и калтибровочной аномалией соответственно. Нормализуем константу $16\pi G_5 = 1$. Уравнения состояния системы

$$\epsilon = 3p = 3(\pi T)^4 \qquad \frac{n}{\epsilon + p} = \frac{\mu}{2(\pi T)^2}. \tag{41}$$

В Фурье пространстве транспортные коэффиценты становятся функциями от k^2 и мы находим их разложение:

$$\xi_B = 24\bar\kappa\mu - 16\mu\lambda - \left(\pi^2\kappa - (\pi^2+2)\lambda + 4032\kappa\lambda^2 - 3936\lambda^3\right)\mu\left(\frac{k}{\pi T}\right)^2 + \mathcal{O}(k^3) \tag{42a}$$

$$\xi_V = 32\lambda\pi^2T^2 - \frac{2}{3}\lambda k^2\left(\pi^2 - 6\ \log(2) + 6336\lambda^2\right) + \mathcal{O}(k^3) \tag{42b}$$

и для транспортных коэффицентов связанных с гравитацией

$$\chi_T = -4\lambda\mu + \mathcal{O}(k) \tag{42c}$$

$$\chi_V = 2\lambda\left(\log(2) - 1\right) + \mathcal{O}(k) \tag{42d}$$

Мы ожидаем универсальность данных эффектов (42), в том смысле, что любая другая модель с гравитационной аномалией должна иметь такие же нечетные отклики на внешнее поле. Это подтверждено тем фактом, что наши результаты согласуются с вычислениями в других теориях при конкретных значениях аномалий.

Старшие поправки к ξ_B были посчитаны в [13] и совпадают до 2 порядка без учета гравитационной аномалии. Транспортный коэффицент χ_V и (k^2) поправки к ξ_V являются новыми результатами. Таким образом, наличие гравитационной аномалии меняет гидродинамику квантовых систем во всех порядках по градиентам.

Коэффицент χ_T отвечает за качественно новый эффект. Он обсуждался для свободных фермионов в [11], но не был связан с аномалиями. Так, для статического тензорного возмущения зависящего только от z:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_+(z) & h_\times(z) & 0 \\ h_\times(z) & -h_+(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Получаем ТЭИ

$$T^{11} = -T^{22} = 2\lambda\mu h_\times'''(z) \tag{44}$$

$$T^{12} = -2\lambda\mu h_+'''(z) \tag{45}$$

4.2 Голографическая модель

Здесь мы исследуем четырехмерную теорию дуальную к пятимерной теории Эйнштейна-Максвелла с калибровочной и гравитационной аномалией. Равновесное состояние граничной теории при конечной температуре и химическом потенциале соответствует решению в обьеме AdS_5 с заряженной черной дырой.

Здесь мы используем модель предложенную в [9]. Сигнатура пятимерной метрики $(-,+,+,+,+)$. Действие в обьеме AdS

$$S_{EM} = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\left[R + 2\Lambda - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \right.$$

$$\left. + \, \epsilon^{MNPQR}A_M\left(\frac{\bar{\kappa}}{3}F_{NP}F_{QR} + \bar{\lambda}R^A{}_{BNP}R^B{}_{AQR}\right)\right]. \tag{46}$$

Модель дуальная этому гравитационному действию сводится к $\mathcal{N}=4$ SYM в пределе т'Хофта если мы положим$\bar{\kappa}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$ and $\bar{\lambda}=0$. Космологическая постоянная $\Lambda=6$ в $d=5$ измерениях. Действие на границе

$$S_{bd}=\frac{1}{8\pi G_5}\int_{\partial M}d^4x\sqrt{-\gamma}K-\frac{1}{2\pi G_5}\int_{\partial M}d^4x\sqrt{-\gamma}\lambda n_M\epsilon^{MNPQR}A_NK_{PL}D_QK^L_R, \tag{47}$$

Первый член является вкладом Гиббонса- Хокинга. Второй член введен для того, что воспроизвести гравитационную аномалию в дуальной теории на произвольной граничной гиперповерхности. Для того, чтобы действие было калибровочно инвариантным с учетом граничных членов мы должны добавить контрчлены в нашу модель

$$S_{ct}=\frac{1}{16\pi G_5}\int_{\partial M}d^4x\sqrt{-\gamma}\left[6+\frac{1}{2}R[\gamma]-\log\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{1}{8}R^{\mu\nu}[\gamma]R_{\mu\nu}[\gamma]-R^2[\gamma]-\frac{1}{8}F^2[\gamma]\right)\right] \tag{48}$$

где $R[\gamma],F[\gamma]$ индуцированные на границе поля. Таким образом, полное действие теории есть $S=S_{EM}+S_{bd}+S_{ct}$.

Действие (46) ведет к следующим уравнениям движения в обьеме AdS:

$$\begin{aligned}G_{MN}-\Lambda g_{MN}=\frac{1}{2}F_{ML}F^L_N-\frac{1}{8}F^2g_{MN}+2\bar{\lambda}\epsilon_{LPQR(M}\nabla_B(F^{PL}R^{B\ \ QR}_{N)})\\ \nabla_NF^{NM}=-\epsilon^{MNPQR}(\bar{\kappa}F_{NP}F_{QR}+\bar{\lambda}R^A_{BNP}R^B_{AQR}).\end{aligned} \tag{49}$$

Граничный ТЭИ опрделен как

$$T_{\mu\nu}=-\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta S}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\right) \tag{50}$$

В то время как граничный ток опрделяется через вариацию действия по источнику

$$J^\mu=\lim_{r\to\infty}\frac{\delta S}{\delta A_\mu} \tag{51}$$

В частности, для нашей модели (46),(47) и (48)

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}=\frac{1}{16\pi G_5}\lim_{r\to\infty}\Bigg[2r^2\left(K_{\mu\nu}-K\gamma_{\mu\nu}-3\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}G_{\mu\nu}[\gamma]\right)+T^{ct}_{\mu\nu}\log\left(\frac{1}{r^2}\right)+\\ +2\lambda\epsilon_{(\mu\alpha\beta\rho}F^{\alpha\beta}R^\rho_{\nu)}\Bigg]\end{aligned} \tag{52}$$

где $G_{\mu\nu}[\gamma]$ индуцированный на границе тензор Эйнштейна. Вклад с $T^{ct}_{\mu\nu}$, полученный вариацией S_{ct}, сокращает логарифмические расходимости из-за кривизны граничной метрики. На самом деле, логарифмы появляются в 4 и выше порядках по градиентам в соответствии с [13], что находится за пределами наших интересов. Граничный ток нашей теории

$$J^\mu=\frac{1}{16\pi G_5}\lim_{r\to\infty}\sqrt{-\gamma}\left[F^{\mu r}+\frac{1}{2}D_\alpha F^{\alpha\mu}\log\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] \tag{53}$$

Тогда, используя уравнения Максвелла, мы получаем следующее несохранения граничного тока

$$D_\mu J^\mu = -\frac{1}{16\pi G_5}\left(\frac{\bar{\kappa}}{3}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \bar{\lambda}R_{\mu\nu}\tilde{R}^{\mu\nu}\right) \tag{54}$$

Для того чтобы связать голографические параметры $\bar{\kappa}$ и $\bar{\lambda}$ с аномалиями в терминах границы, которые обсуждались в предыдущих главах, мы должны положить:

$$-\frac{\bar{\kappa}}{48\pi G_5} = \kappa \ \ , \ -\frac{\bar{\lambda}}{16\pi G_5} = \lambda \tag{55}$$

Рассмотрим простейшее решение уравнений движения (49) в координатах Эдинктона-Финкельштейна

$$ds^2 = g^{(0)}_{MN}dx^M dx^N = 2dtdr - r^2 f(r)dt^2 + r^2 dx_i^2 \tag{56a}$$

$$A^{(0)}_\mu = -\frac{\sqrt{3}Q}{2r^2}dt \tag{56b}$$

,где $f(r) = 1 - \frac{M}{r^4} + \frac{Q^2}{r^6}$, M масса и Q и заряд черной дыры. Ниже мы свяжем эти параметры с параметрами граничной конформной теории.

Более общее решение для черной дыры(56)

$$ds^2 = -r^2 f(r)u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2\Delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - 2u_\mu dx^\mu dr \tag{57a}$$

$$A_\mu = \frac{\sqrt{3}Qu_\mu}{r^2}, \tag{57b}$$

где u_μ удовлетворяет $u_\mu u^\mu = -1$. Если u_μ положить константой и $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, то решение (57) переходит в (56).

Для пертурбации метрики в обьеме выберем калибровку [6]: $g_{rr} = 0$, $g_{r\mu} \sim u_\mu$ и $A_r = 0$. В общем случае объемная метрика и потенциал ЭМ могут быть разложены относительно поля скоростей:

$$ds^2 = r^2\left(k\ u_\mu u_\nu + h\ \Delta_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + j_\sigma\left(\Delta^\sigma_\mu u_\nu + \Delta^\sigma_\nu u_\mu\right)\right)dx^\mu dx^\nu - 2S\ u_\mu dx^\mu dr \tag{58a}$$

$$A_\mu = a_\nu P^\nu_\mu + c\ u_\mu \tag{58b}$$

где k, h etc. функции радиальной координаты и граничных полей. j_σ перпендикулярно скорости жидкости, тензор $\pi_{\mu\nu}$ перпендикулярен жидкости,симметричен и бусследовый. У нас есть оставшаяся свобода, которую мы фиксируем как $S(r) = -\frac{3}{2}h(r)$.

Мы выписываем явное выражение для ТЭИ в Приложении (58a) . Кроме требований Ландау и граничных ассимптотик мы имеем дополнительное требование регулярности решения по r на всем промежутке от горизонта черной дыры до границы.

Через решение 0-порядка (56) и уравнений идеальной жидкости находим:

$$\epsilon = 3p = \frac{3M}{16\pi G_5}, \quad n = \frac{\sqrt{3}Q}{8\pi G_5} \tag{59}$$

Используя словарь AdS/CFT [5] мы связываем параметры черной дыры с граничными:

$$M = \frac{(\pi T)^4}{2^4}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\mu^2}{3\pi^2T^2}}\right)^3\left(3\sqrt{1+\frac{2\mu^2}{3\pi^2T^2}}-1\right) \tag{60}$$

$$Q = \mu\frac{r_+^2}{\sqrt{3}} \tag{61}$$

,где r_+– положительный ноль функции $f(r) = 0$:

$$r_+ = \frac{\pi T}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\mu^2}{3\pi^2T^2}}\right) \tag{62}$$

4.3 Пертурбативное решение уравнений Эйнштейна

Теперь введем пертурбацию решений $g^{(0)}_{MN}$ и $A^{(0)}_M$ определенных в (57)

$$g_{MN} = g^{(0)}_{MN} + h_{MN}(x,r),\ A_M = A^{(0)}_M + a_M(x,r)\ ,\quad u_\mu = u^{(0)}_\mu + v_\mu(x) \tag{63}$$

Тогда, граничное поведение решения

$$\lim_{r\to\infty} g^{(0)}_{\mu\nu}(x,r) = \eta_{\mu\nu}, \qquad \lim_{r\to\infty} h_{\mu\nu}(x,r) = h^{CFT}_{\mu\nu}(x) \tag{64a}$$

$$\lim_{r\to\infty} A^{(0)}_\mu(x,r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} a_\mu(x,r) = a^{CFT}_\mu(x) \tag{64b}$$

Без ограничения общности положим $u^{(0)}_\mu = (-1,0,0,0)$. Поле скоростей нормализовано как $u_\mu u^\mu = 1$, Тогда в линейном порядке

$$u_0 = 1 - \frac{1}{2}h^{CFT}_{00} \tag{65}$$

это означает, что v_μ не полностью независимы от $h_{\mu\nu}$ так как $v_0 = -\frac{1}{2}h^{CFT}_{00}$.

Уравнения движения для h_{MN} и a_M могут быть найдены с помщью линеаризации уравнений (49). Линеаризованный вид калибровочных условий описанных выше:

$$h_{ri} = h_{rr} = a_r = 0, \quad h_{0r} = -3\sum_i h_{ii} \tag{66}$$

Нас интересует линейный отклик, поэтому мы можем перейти в Фурье пространство

$$h_{\mu\nu}(x,r) = \int e^{ikx}h_{\mu\nu}(k,r)dk,\ A_\mu(x,r) = \int e^{ikx}A_\mu(k,r)dk,\ u_\mu(x) = \int e^{ikx}u_\mu(k)dk \tag{67}$$

Тогда h_{ij} и A_i, u_i могут быть разложены по неприводимым представлениям группы $SO(2)$

вращений вокруг оси $\vec{k}$. Эти представления нумеруются индексом $0, \pm1, \pm2$. Без ограничения общности выберем $\vec{k} = (0,0,k_3)$. Так как уравнения для разных спиральностей не смешиваются, будем исследовать их по отдельности.

Спиральность 0

Сектор спиральности 0 самый сложный. Компоненты спиральности :

$$H_{tt} = \frac{h_{tt}}{r^2}, \quad h_{tr}, \quad H_{33} = \frac{h_{33}}{r^2} = \frac{-(h_{11}+h_{22})}{r^2}, \; H_{t3} = \frac{h_{t3}}{r^2} \quad a_t \quad , \quad a_3 \quad , v_t \quad \text{and} \quad v_3 \tag{68}$$

Несмотря на то что, из сектора спиральности 0 могут быть найдены многие транспортные коэффиценты, среди них нет отвечающих нечетном вкладам.

Спиральность ±1

Моды спиральности ±1 :

$$G_{\pm1} = \frac{(h_{t1} \pm i h_{t2})}{r^2} \quad , \quad H_{\pm1} = \frac{(h_{13} \pm i h_{23})}{r^2} \quad , \quad A_{\pm1} = (a_1 \pm i a_2) \quad and \quad v_{\pm1} = (v_1 \pm i v_2) \tag{69}$$

Динамические уравнения Эйнштейна:

$$\mathcal{E}_{t1} \pm i\mathcal{E}_{t2} = \mathcal{E}_{13} \pm i\mathcal{E}_{23} = \mathcal{M}_1 \pm i\mathcal{M}_2 = 0 \tag{70}$$

- $\mathcal{M}_1 \pm i\mathcal{M}_2$:

$$-\frac{1}{r}\left(r^3 f(r) A'_{\pm1}\right)' + \left(\frac{k_3^2}{r^2} \mp \frac{16\bar{\kappa} Q k_3}{r^4}\right) A_{\pm1} + \frac{2\sqrt{3}Q}{r} G'_{\pm1} \pm \frac{24\bar{\lambda} k_3 \left(5Q^2 - 2r^2\right) G'_{\pm1}}{r^5} + $$
$$+ \frac{k_3 v_{\pm1}\left(\sqrt{3} k_3 Q\right)}{r^4} \mp \frac{k_3 v_{\pm1} 48 \left(15\bar{\lambda} Q^4 + Q^2\left(\bar{\kappa} r^6 - 16\bar{\lambda} r^2\right) + 4\bar{\lambda} r^4\right)}{r^{12}} = 0 \tag{71}$$

- $\mathcal{E}_{t1} \pm i\mathcal{E}_{t2}$:

$$-\frac{f(r)}{2r}\left(r^5 G'_{\pm1}\right)' + \frac{k_3^2}{2} G_{\pm1} - \frac{\sqrt{3}Q}{r} f(r) A'_{\pm1} + \frac{Q^2 - r^2}{2r^6} k_3^2 v_{\pm1} \mp$$

$$\mp \frac{4\bar{\lambda} k_3 \left(-\sqrt{3} k_3^2 Q r^2 G_{\pm1} + f(r)\left(3\left(2r^2 - 5Q^2\right) r A'_{\pm1} + 12 A_{\pm1}\left(5Q^2 - r^2\right) + \sqrt{3} Q r^5 \left(r G''_{\pm1} + G'_{\pm1}\right)\right)\right)}{r^6} \mp$$

$$\mp 4\sqrt{3} k_3 v_{\pm1} \bar{\lambda} Q \frac{(k_3^2(-Q^2 + r^2) + 2r^2(63Q^2 - 20r^2) f(r))}{r^{10}} = 0 \tag{72}$$

- $\mathcal{E}_{13} \pm i\mathcal{E}_{23}$:

$$-\frac{1}{2r}\left(r^5 f(r) H'_{\pm1}\right)' + \frac{i k_3 r^2}{2} G'_{\pm1} + \frac{3 i k_3 r}{2} G_{\pm1} - \frac{3}{2} i k_3 r v_{\pm1} \pm$$

$$\pm \frac{4\sqrt{3}\bar{\lambda}k_3 Q\left(5Q^2 H'_{\pm1} + r\left(ik_3 r^3\left(rG'_{\pm} - G_{\pm1}\right) - \left(Q^2 + r^6 - r^2\right)H''_{\pm1} - \left(r^4+3\right)rH'_{\pm1}\right)\right)}{r^7} = 0 \quad (73)$$

, уравнение Навье-Стокса:

$$r^2 f(r)\left(\mathcal{E}_{r1} \pm i\mathcal{E}_{r2}\right) + \left(\mathcal{E}_{t1} \pm i\mathcal{E}_{t2}\right) = 0 \quad (74)$$

- $r^2 f(r)\left(\mathcal{E}_{r1} \pm i\mathcal{E}_{r2}\right) + \left(\mathcal{E}_{t1} \pm i\mathcal{E}_{t2}\right):$

$$k_3 G_{\pm1} + if(r)r^2 H'_{\pm1} = 0 \quad (75)$$

Таким образом мы имеем 4 уравнения на 3 неизвестные функции. Легко проверить, что они не являются независимыми. Из уравнения (72) и (75) следует уравнение (73).

Заметим, что уравнения (71) и (72) замкнуты относительно искомых функций $A_{\pm1}$ and $G_{\pm1}$. Нас интересует линейный по Q порядок, тогда $f(r) = 1 - \frac{1}{r^4}$. Подставляем разложение функций по k:

$$G_{\pm1}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{\pm1}^{(n,0)}(r)k_3^n + Q\sum_{n=0}^{\infty} G_{\pm1}^{(n,1)}(r)k_3^n \quad , \quad A_{\pm1}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\pm1}^{(n,0)}(r)k_3^n + Q\sum_{n=0}^{\infty} A_{\pm1}^{(n,1)}(r)k_3^n \quad ,$$

в (71) и (72) и решаем пертурбативно по k. Тогда мы находим $H_{\pm1}$ из уравнения (75).

$$H_{\pm1}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{\pm1}^{(n,0)} + Q\sum_{n=0}^{\infty} H_{\pm1}^{(n,1)} \quad (76)$$

Функции должны удовлетворять граничным условиям:

$$\lim_{r\to\infty} G_{\pm1}^{(0,0)}(r) = g_{\pm1}^{CFT} \quad , \quad \lim_{r\to\infty} A_{\pm1}^{(0,0)}(r) = a_{\pm1}^{CFT} \quad , \quad \lim_{r\to\infty} H_{\pm1}^{(0,0)}(r) = h_{\pm1}^{CFT} \quad (77)$$

,где $g_{\pm1}^{CFT} = h_{01}^{CFT} \pm ih_{02}^{CFT}$, $h_{\pm1}^{CFT} = h_{13}^{CFT} \pm ih_{23}^{CFT}, a_{\pm1}^{CFT} = a_1^{CFT} \pm ia_2^{CFT}$. У нас есть еще условие регулярности и ограничение калибровки Ландау.

Мы выписываем здесь решения первых порядков:

- 0 порядок

$$G_{\pm1}^{(0,0)}(r) = g_{\pm1}^{CFT} \qquad A_{\pm1}^{(0,0)}(r) = a_{\pm1}^{CFT} \qquad H_{\pm1}^{(0,0)}(r) = h_{\pm1}^{CFT} \quad (78)$$

- 1 по Q и 1 по k порядок

$$G_{\pm1}^{(1,0)} = \pm 8\ a_{\pm1}^{CFT}\bar{\lambda}\frac{1}{r^6} \qquad A_{\pm1}^{(1,0)} = \pm 8\ v_{\pm1}\bar{\lambda}\left[\frac{1}{r^4} + 2\ \log\left(\frac{1+r^2}{r^2}\right)\right] \quad (79)$$

- 1 по Q и 1 по k порядок

$$G^{(1,1)}_{\pm 1} = \pm v_{\pm 1}\frac{4\sqrt{3}\ \bar{\lambda}}{r^8}\left[3 - r^4 + 2r^6 + 2r^4(r^4-1)\log\left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)\right] \tag{80}$$

$$A^{(1,1)}_{\pm 1} = \mp a^{CFT}_{\pm 1}\frac{4\sqrt{3}}{r^4}\left[\bar{\lambda} + r^4(\bar{\kappa} - 2\bar{\lambda})\ln\left(\frac{r^2}{r^2+1}\right)\right] \tag{81}$$

- 1 по Q and 2 по k порядок

$$G^{(2,0)}_{\pm 1} = v_{\pm 1}\frac{1}{240r^{10}}\left[-30r^8 - 1024\bar{\lambda}^2\left(5r^4\left(6r^4 - 3r^2 + 2\right) - 9\right)\right] +$$
$$+ v_{\pm 1}\frac{5}{80r^6}\left[-2r^2\coth^{-1}\left(r^2\right) + 2048\bar{\lambda}^2\left(r^6+1\right)\log\left(\frac{r^2+1}{r^2}\right) + r^6\log\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)\right] +$$
$$+ g^{CFT}_{\pm 1}\frac{1}{16r^4}\left[-2r^2 + \left(r^4-1\right)\log\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)\right] \tag{82}$$

$$A^{(2,0)}_{\pm 1} = -a^{CFT}_{\pm 1}\frac{1}{16}\left[\left(4\mathrm{Li}_2\left(r^{-2}\right) - \mathrm{Li}_2\left(r^{-4}\right)\right) + 4\log(r)\log\left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)\right] -$$
$$- a^{CFT}_{\pm 1}48\lambda^2\frac{3r^4+1}{r^6} \tag{83}$$

Следуя алгориму описанному ранее можем получить решения уравнений движения $G_{\pm 1}$ и $A_{\pm 1}$ в любом порядке по градиентам.Мы не выписывали $H_{\pm 1}$ т.к эти моды не вносят вклад в нечетные компоненты ТЭИ границы.

В следующих порядках решение слишком сложное, поэтому мы не выписываем его здесь, но найдем вклад в ТЭИ ниже.

Спиральность $\pm$ 2

Моды спиральности ± 2 оъсамые простые

$$G_{\pm 2} = \frac{1}{r^2}(h_{11} - h_{22} \pm 2ih_{12}), \tag{84}$$

которые удовлетворяют $(\mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22} \pm 2i\mathcal{E}_{12}) = 0$:

$$-\frac{1}{2r}\left(r^5 f(r) G'_{\pm 2}\right)' + \frac{k_3^2}{2}G_{\pm 2} \pm \frac{8\sqrt{3}\bar{\lambda}k_3 Q}{r^4}\left[r^3\left(G'_{\pm 2} r f(r)\right)' - k_3^2 G_{\pm 2}\right] = 0 \tag{85}$$

Теперь будем решать пертурбативно по k_3. Нас интересует линейное по Q решение, поэтому мы будем решать линеаризованную версию уравнения (85) с $f(r) = 1 - \frac{1}{r^4}$ и, как следствие, $r_H = 1$. Пертурбативное разложение G_{+2}

$$G_{\pm 2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}_{\pm 2} k_3^n \quad , \tag{86}$$

- 0 порядок по k

Решение есть

$$G^{(0)}_{\pm 2}(r) = g^{CFT}_{\pm 2} \tag{87}$$

- 1 порядок по k

$$G^{(1)}_{\pm 2} = 0 \tag{88}$$

- 2 порядок по k

$$G^{(2)}_{\pm 2}(r) = \frac{1}{4} g^{CFT}_{\pm 2} \log\left(\frac{r^2}{r^2+1}\right) \tag{89}$$

- 3 порядок по k

В конце, в 3 порядке получаем следующее уравнение

$$\left(r^2-1\right)\left(32\sqrt{3} g^{CFT}_{\pm 2} \bar{\lambda} Q + \left(r^8+r^6\right) G^{(3)}_{\pm 2}{}''\right) + \left(5r^4-1\right) r^5 G^{(3)}_{\pm 2}{}' = 0 \tag{90}$$

решение которого

$$G^{(3)}_{\pm 2} = \pm g^{CFT}_{\pm 2} \frac{4\sqrt{3}\bar{\lambda} Q}{r^4} \left[4r^2 + 4r^4 \log\left(\frac{r^2}{r^2+1}\right) - 1\right] \tag{91}$$

4.4 Голографический транспорт

Мы решили уравнения Эйнштейна-Максвелла до 3 порядка по градиентам для каждой компоненты спиральности в отдельности. В этой главе мы вычисляем линейный нечетный отклик в ТЭИ используя уравнения (94) и разложение решений полученный ранее.

Спиральность ± 1

Обозначим $J_{\pm 1} = J_1 \pm iJ_2$. Тогда нечетный отклик для возмущения спиральности ± 1 из уравнения (95b) :

$$\begin{gathered} 8\pi G_5 J_{\pm 1} = \\ = \pm 4\sqrt{3} Q(\bar{\kappa} - 2\bar{\lambda}) k_3 a^{CFT}_{\pm 1} \pm \sqrt{3} Q k_3^3 a^{CFT}_{\pm 1} \left[\frac{(\pi^2+2)}{2}\bar{\lambda} - \bar{\kappa}\frac{\pi^2}{6} + 672\bar{\kappa}\bar{\lambda}^2 - 3936\bar{\lambda}^3\right] \mp \\ \mp 16 k_3 v_{\pm 1}\bar{\lambda} \mp \frac{1}{3}\bar{\lambda} v_{\pm 1}\left[\pi^2 - 6\log(2) + 6336\bar{\lambda}^2\right] \mp \\ \mp 2\bar{\lambda} k_3^3 g^{CFT}_{\pm 1}(\ln 2 - 1) + \mathcal{O}(k_3^4) \end{gathered} \tag{92}$$

И, из условий Ландау, очевидно, что $T_{\pm 1} = 0$.

Спиральность ± 2

Определим $T_{\pm 2} = T_{11} - T_{22} \pm 2iT_{02}$. Тогда для наиболее интересных компонент ТЭИ имеем

$$4\pi G_5 T_{\pm 2} = \left(\frac{k^2}{8} \pm 4\sqrt{3}k^3 Q\bar{\lambda}\right) g_{\pm 2}^{CFT} + \mathcal{O}(k^4) \tag{93}$$

Линеаризуя уравнения по амплитуде возмущения граничных полей, мы можем связать отклик полученный в уравнениях (93) и(93) с транспортными коэффицентами (42).

5 Заключение

Мы рассмотрели киральные эффекты через линейный отклик в голографической модели до 3 порядка по градиентам. Нами были впервые вычислены киральные гравитационные эффекты в голографии, и показана универсальность их связи с гравитационной аномалией. Кроме полного отклика на гравитацию, мы рассмотрели влияние аномалий на гидродинамическое описание сильно взаимодействующих теорий через аномальные поправки к киральному эффекту вращения.

6 Приложение

Линеаризуя уравнения (52) в терминах возмущения метрики (58a) мы получаем тензор энергии импульса [13]:

$$\mathbf{T_{00}} = 3 - 3h_{00}^{CFT} + \left[\frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_j h_{ij}^{CFT} - \frac{1}{2}r^2\partial^2 h_{kk}^{CFT} - r^2\partial^2 h + \frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_j\pi_{ij} - 9r^4 h + \right.$$
$$\left. +3k - 2r^3\partial u + 2r^3\partial_k h_{0k}^{CFT} - r^3\partial_t h_{kk}^{CFT} + \frac{2}{r}\partial j - 3r^3\partial_t h - 3r^5\partial_r h\right] + T_{00}^{ct} \tag{94a}$$

$$\mathbf{T_{0i}} = -4u_i + h_{0i}^{CFT} + \left[\frac{1}{2}r^3\partial_i h_{00}^{CFT} + \frac{1}{r}\partial_i k + 4j_i - r\partial_r j_i - r^3\partial_t u_i - \frac{3}{2}r^3\partial_i h\right.$$
$$-\frac{1}{2}r^2\partial^2 h_{0i}^{CFT} + \frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_k h_{0k}^{CFT} + \frac{1}{2}r^2\partial_t\partial_k h_{ik}^{CFT} - \frac{1}{2}r^2\partial_t\partial_i h_{kk}^{CFT} - \frac{1}{2r^2}\partial^2 j_i +$$
$$\left. +\frac{1}{2r^2}\partial_i\partial j + \frac{1}{2}r^2\partial_t\partial_k\pi_{ik} - r^2\partial_t\partial_i h\right] + T_{0i}^{ct} \tag{94b}$$

$$\mathbf{T_{ij}} = \delta_{ij} + h_{ij}^{CFT} + \delta_{ij}\left[-\frac{1}{2}r^2\partial^2 h_{00}^{CFT} + \frac{1}{2}r^2\partial^2 h_{kk}^{CFT} - \frac{1}{2}r^2\partial_k\partial_l h_{kl}^{CFT} + r^2\partial_t\partial_k h_{0k}^{CFT} - \right.$$
$$-\frac{1}{2}r^2\partial_t^2 h_{kk}^{CFT} + \frac{1}{2}r^2\partial^2 h - \frac{1}{2r^2}\partial^2 k - \frac{r^2}{2}\partial_k\partial_l\pi_{kl} + \frac{1}{r^2}\partial_t\partial j -$$
$$-r^2\partial_t^2 h + 9r^4 h + k + 2r^3\partial u - 2r^3\partial_k h_{0k}^{CFT} + r^3\partial_t h_{kk}^{CFT} - \frac{2}{r}\partial j - r^3\partial_t h$$

$$+\frac{1}{r}\partial_t k + 2r^5\partial_r h - r\partial_r k\Big] + \Big[\frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_j h_{00}^{CFT} - \frac{1}{2}r^2\partial^2 h_{ij}^{CFT} - \frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_j h_{kk}^{CFT} +$$

$$+\frac{1}{2}r^2\left(\partial_i\partial_k h_{jk}^{CFT} + \partial_j\partial_k h_{ik}^{CFT}\right) - \frac{1}{2}r^2\partial_t\left(\partial_i h_{0j}^{CFT} + \partial_j h_{0i}^{CFT}\right) + \frac{1}{2}r^2\partial_v^2 h_{ij}^{CFT} -$$

$$-\frac{1}{2}r^2\partial_i\partial_j h + \frac{1}{2r^2}\partial_i\partial_j k - \frac{1}{2}r^2\partial^2\pi_{ij} + \frac{1}{2}r^2\left(\partial_i\partial_k\pi_{jk} + \partial_j\partial_k\pi_{ik}\right)$$

$$-\frac{1}{2r^2}\partial_t\left(\partial_i j_j + \partial_j j_i\right) + \frac{1}{2}r^2\partial_t^2\pi_{ij} - r^3\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right) + r^3\left(\partial_i h_{0j}^{CFT} + \partial_j h_{0i}^{CFT}\right)$$

$$-r^3\partial_t h_{ij}^{CFT} + \frac{1}{r}\left(\partial_i j_j + \partial_j j_i\right) - r^3\partial_t\pi_{ij} - r^5\partial_r\pi_{ij}\Big] + T_{ij}^{ct} \tag{94c}$$

Теперь рассмотрим ТЭИ в Фурье пространство и ограничим вычисление на пертурбации метрики ± 1 и ± 2, что было мотивировано ранее.

Так, для спиальностей ± 1 имеем:

$$16\pi G_5 T_{00}(k) = 3 \tag{95a}$$

$$\begin{aligned}16\pi G_5 T_{01}(k) = -4u_1 + h_{01}^{CFT} + 4j_1 - r\partial_r j_1 + \\ + \frac{1}{2}r^2k^2h_{01}^{CFT} + \frac{1}{2r^2}k^2 j_1 + T_{01}^{ct}(k)\end{aligned} \tag{95b}$$

$$16\pi G_5 T_{13}(k) = h_{13}^{CFT} - r^3 iku_1 + r^3 ikh_{01}^{CFT} + \frac{1}{r}ikj_1 - r^5\partial_r\pi_{13} + T_{13}^{ct}(k) \tag{95c}$$

Выражения для $T_{23}(k)$ и $T_{02}(k)$ такие же как T_{13} и T_{02} соответственно с точностью до изменения индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Возмущения спиальности ± 2

$$16\pi G_5 T_{00}(k) = 3 \tag{96}$$

$$16\pi G_5 T_{0i}(k) = -4u_i \tag{97}$$

$$16\pi G_5 T_{ij}(k) = \delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}r^2k^2h_{ij} + \frac{1}{2}r^2k^2\pi_{ij} - r^5\partial_r\pi_{ij} + T_{ij}^{ct}(k) \tag{98}$$

Список литературы

[1] Alexander Vilenkin. “Macroscopic parity-violating effects: Neutrino fluxes from rotating black holes and in rotating thermal radiation”. в: *Phys. Rev. D* 20 (8 окт. 1979), с. 1807—1812. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.1807. URL: `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.1807`.

[2] Juan Martin Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. в: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999), с. 1113—1133. DOI: 10.1023/A:1026654312961. arXiv: hep-th/9711200.

[3] G. Policastro, Dan T. Son и Andrei O. Starinets. “The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma”. в: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), с. 081601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.081601. arXiv: hep-th/0104066.

[4] P. Kovtun, Dan T. Son и Andrei O. Starinets. “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics”. в: *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005), с. 111601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.111601. arXiv: hep-th/0405231.

[5] Michael Haack и Amos Yarom. “Nonlinear viscous hydrodynamics in various dimensions using AdS/CFT”. в: *Journal of High Energy Physics* 2008.10 (окт. 2008), с. 063—063. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1088/1126-6708/2008/10/063. URL: http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2008/10/063.

[6] Johanna Erdmenger и др. “Fluid dynamics of R-charged black holes”. в: *Journal of High Energy Physics* 2009.01 (янв. 2009), с. 055—055. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/01/055. URL: http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/01/055.

[7] Dam T. Son и Piotr Surówka. “Hydrodynamics with Triangle Anomalies”. в: *Physical Review Letters* 103.19 (нояб. 2009). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.103.191601. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.191601.

[8] Karl Landsteiner, Eugenio Megias и Francisco Pena-Benitez. “Gravitational Anomaly and Transport”. в: *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011), с. 021601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.021601. arXiv: 1103.5006 [hep-ph].

[9] Karl Landsteiner и др. “Holographic gravitational anomaly and chiral vortical effect”. в: *Journal of High Energy Physics* 2011.9 (сент. 2011). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep09(2011)121. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP09(2011)121.

[10] Yasha Neiman и Yaron Oz. “Relativistic hydrodynamics with general anomalous charges”. в: *Journal of High Energy Physics* 2011.3 (март 2011). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep03(2011)023. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2011)023.

[11] Juan L. Mañes и Manuel Valle. “Parity violating gravitational response and anomalous constitutive relations”. в: *Journal of High Energy Physics* 2013.1 (янв. 2013). ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep01(2013)008. URL: http://dx.doi.org/10.1007/JHEP01(2013)008.

[12] Dmitri E. Kharzeev. “The Chiral Magnetic Effect and anomaly-induced transport”. в: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 75 (март 2014), с. 133—151. ISSN: 0146-6410. DOI: 10.1016/j.ppnp.2014.01.002. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2014.01.002.

[13] Yanyan Bu и Michael Lublinsky. “Linearly resummed hydrodynamics in a weakly curved spacetime”. в: *JHEP* 04 (2015), с. 136. DOI: `10.1007/JHEP04(2015)136`. arXiv: `1502.08044 [hep-th]`.

[14] Xu-Guang Huang. “Simulating Chiral Magnetic and Separation Effects with Spin-Orbit Coupled Atomic Gases”. в: *Scientific Reports* 6.1 (февр. 2016). ISSN: 2045-2322. DOI: `10.1038/srep20601`. URL: `http://dx.doi.org/10.1038/srep20601`.

[15] Mikhail A. Stephanov и Ho-Ung Yee. “No-Drag Frame for Anomalous Chiral Fluid”. в: *Phys. Rev. Lett.* 116.12 (2016), с. 122302. DOI: `10.1103/PhysRevLett.116.122302`. arXiv: `1508.02396 [hep-th]`.

[16] Sampurn Anand, Jitesh R. Bhatt и Arun Kumar Pandey. “Chiral battery, scaling laws and magnetic fields”. в: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.07 (июль 2017), с. 051—051. ISSN: 1475-7516. DOI: `10.1088/1475-7516/2017/07/051`. URL: `http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/07/051`.

[17] Dmitri E. Kharzeev, Yuta Kikuchi и René Meyer. “Chiral magnetic effect without chirality source in asymmetric Weyl semimetals”. в: *The European Physical Journal B* 91.5 (май 2018). ISSN: 1434-6036. DOI: `10.1140/epjb/e2018-80418-1`. URL: `http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2018-80418-1`.

[18] Michael Stone и JiYoung Kim. “Mixed anomalies: Chiral vortical effect and the Sommerfeld expansion”. в: *Phys. Rev. D* 98 (2 июль 2018), с. 025012. DOI: `10.1103/PhysRevD.98.025012`. URL: `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.025012`.