Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки**: 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)
**Направленность (профиль) подготовки**: Проблемы теоретической физики

# Классическая $r$-матрица для $R$-матричнозначной пары Лакса

**Студент:**
Суслова Анастасия Федоровна

**Научный руководитель:**
Зотов Андрей Владимирович,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Москва, 2020

# Аннотация

$r$-матрицы интегрируемых систем имеют множество применений в прикладной математике и физике. Существование $r$-матрицы обеспечивает интегрируемость системы, и наоборот.

Данная работа посвящена поиску $r$-матрицы для системы частиц с парой Лакса, содержащей $R$-матрицу частного вида, а именно оператор перестановки $P_{ij}$. Известно, что такая система интегрируема, поэтому матрица должна существовать. Анзац для искомой $r$-матрицы по структуре аналогичен матрице классической модели Калоджеро-Мозера.

# Содержание

Содержание . . . 3
1 Введение . . . 4
2 $r$-матрица . . . 7
2.1 Классическая система Калоджеро-Мозера . . . 7
2.2 Полуклассическая система с квантовыми импульсами . . . 9
2.3 Полуклассическая система с классическими импульсами . . . 17
3 Заключение . . . 19
Список литературы . . . 22

# 1 Введение

В данной работе ищутся $r$-матрицы для двух систем частиц со спинами: с квантовыми импульсами и с классическими импульсами. Эти системы являются модификацией классической модели Калоджеро-Мозера, т. н. полуклассическая модель.

Классическая модель Калоджеро-Мозера – это система из бесспиновых частиц, динамика которых описывается гамильтонианом

$$H_{CM} = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \sum_{i\neq j} V(q_i - q_j). \tag{1.1}$$

Для некоторых потенациалов $V(q_i - q_j)$ эта модель достаточно хорошо исследована [1], в частности, для нее известны матрицы Лакса и $r$-матрицы [2]. В данной работе рассматривается потенциал, включающий оператор перестановки, который отвечает за спины частиц. Подобные системы рассматривались ранее [3], [4], [15], [16] и известно, что они интегрируемы, но $r$-матрица для них не найдена.

Представление Лакса – особая форма записи уравнений движения системы частиц [5]. Если есть гамильтониан $H$, описывающий систему из $N$ частиц, и есть уравнения движения, полученные из него, то их же можно записать в матричной форме с помощью матриц Лакса $L$ и $M$:

$$\frac{d}{dt}L = [M, L]. \tag{1.2}$$

Например, для вышеупомянутой классической модели Калоджеро-Мозера пара Лакса будет иметь вид:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \delta_{ij}p_i + (1-\delta_{ij})\phi(z, q_i - q_j); \\ M_{ij} &= \delta_{ij}d_i + (1-\delta_{ij})f(z, q_i - q_j), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\phi(z, q_i - q_j)$ - функция Кронекера, $f(z, q_i - q_j)$ - производная от нее по первому аргументу, $d_i = -\sum\limits_{k\neq i} f(0, q_i - q_k)$. Дальше о них будет рассказано немного подробнее.

Примечательно, что собственные значения $L$ не зависят от времени и являются по сути интегралами движения. Обычно в качестве интегралов движения используются следы степеней $L$: $I_k = \frac{1}{k} trL^k$. В частности, при $k = 2$ получается гамильтониан $H$ данной системы. Если таким образом можно найти $N$ функционально независимых интегралов движения, которые находятся в инволюции (то есть их скобки Пуассона друг с другом попарно равны нулю), то система вполне интегрируема.

Еще одним способом показать интегрируемость системы является доказательство наличия $r$-матрицы. Существует теорема [6], согласно которой собственные значения $L$ находятся в инволюции тогда и только тогда, когда существует матрица $r_{12}$, такая что

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [r_{12}(z, w), L_1(z)] - [r_{21}(w, z), L_2(w)]. \tag{1.4}$$

Здесь $L_1 = \sum\limits_{i,j}^{N} L_{ij}(E_{ij} \otimes 1)$, $L_2 = \sum\limits_{i,j}^{N} L_{ij}(1 \otimes E_{ij})$, где $E_{ij}$ – канонический базис матриц $N \times N$, $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$; $r_{21} = P_{12} r_{12} P_{12}$, где $P_{12}$ – оператор перестановки, $P_{12} = \sum\limits_{i,j}^{N} E_{ij} \otimes E_{ji}$. $r$-матрица для классической системы Калоджеро-Мозера известна [7] и равна:

$$\begin{aligned} r(z, w) = \sum_{i \neq j} \phi(z - w, q_i - q_j) E_{ij} \otimes E_{ji} - \sum_{i \neq j} \phi(-w, q_i - q_j) E_{ii} \otimes E_{ji} + \\ + (E_1(z - w) + E_1(w)) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\phi(\eta, z)$ – функция Кронекера, $E_1(z)$ – первая функция Эйзенштейна; их вид и свойства зависят от вида потенциала в $H_{CM}$, который может быть рациональным, тригонометрическим и эллиптическим.

Конечно, у $r$-матрицы есть и другие применения, помимо доказательства интегрируемости системы: уравнения Книжника-Замолодчикова [8], теория узлов [9], модели взаимодействующих волчков [10], спиновые цепочки [11] и многое другое.

В нашей полуклассической модели мы используем т. н. $R$-матричнозначную матрицу Лакса. Это значит, что вместо рациональной, тригонометрической или эллиптической функции в (1.3) мы ставим соответствующую квантовую $R$-матрицу [12], [13]. Тогда обобщенная матрица Лакса имеет вид:

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + (1 - \delta_{ij}) R^z_{ij}(q_i - q_j), \tag{1.6}$$

где $R^z_{ij}$ – квантовая $R$-матрица размера $n^N \times n^N$, $n$ – размер спинового пространства. Она удовлетворяет условиям унитарности [12]:

$$R^z_{ij}(q_i - q_j) R^z_{ji}(q_j - q_i) = \phi(z, q_i - q_j)\phi(z, q_j - q_i) 1 \otimes 1, \tag{1.7}$$

и антисимметричности:

$$R^z_{ij}(q_i - q_j) = -R^{-z}_{ji}(q_j - q_i). \tag{1.8}$$

Также она должна удовлетворять ассоциативному уравнению Янга-Бакстера [17]:

$$R^z_{12}(q_1 - q_2) R^w_{23}(q_2 - q_3) = R^w_{13}(q_1 - q_3) R^{z-w}_{12}(q_1 - q_2) + R^{w-z}_{23}(q_2 - q_3) R^z_{13}(q_1 - q_3). \tag{1.9}$$

В полуклассической модели мы полагаем $R^z_{ij}(q_i - q_j) = \frac{1}{z} + \frac{P_{ij}}{q_i - q_j}$, где $P_{ij} = \sum\limits_{a,b}^{n} 1 \otimes ... 1 \otimes e_{ab} \otimes 1 \otimes ... 1 \otimes e_{ba} \otimes 1 \otimes ... 1$, базисные матрицы $e$ стоят на $i$-ой и $j$-ой позициях.

В первом подразделе следующего раздела проводится прямая проверка уравнения (1.4) для классической системы Калоджеро-Мозера. Во втором подразделе сначала проверяется несколько частных случаев $r$-матрицы с удвоением и без удвоения квантового пространства матрицы Лакса, о чем там же приводится объяснение. Далее выбирается $r$-матрица более общего вида с удвоением пространства и для нее проводится вычисление коэффициентов с помощью уравнения (1.4) с квантовыми импульсами. В третьем подразделе ищутся коэффициенты для $r$-матрицы того же вида, выполняющей уравнение (1.4) с классическими импульсами.

# 2 $r$-матрица

## 2.1 Классическая система Калоджеро-Мозера

Рассмотрим систему $N$ частиц, которая описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \nu^2 \sum_{i<j}^{N} \wp(q_i - q_j), \tag{2.1}$$

где $\wp(q_i - q_j)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса (четная).
Матрица Лакса для нее:

$$L_{ij} = p_i\delta_{ij} + \nu(1-\delta_{ij})\phi(z, q_i - q_j), \tag{2.2}$$

где $\phi(\eta, z)$ – функция Кронекера. Докажем уравнение (1.4) с вышеприведенной $L$ для $r$-матрицы (1.5). В ней $E_1(z)$ – первая функция Эйзентштейна (нечетная). Нам не нужно знать явный вид вышеприведенных функций, а нужно только знать их четность и следующие соотношения [14]:

$$\frac{\partial\phi(z,q)}{\partial q} = \phi(z,q)(E_1(z+q) - E_1(q)); \tag{2.3}$$

$$\phi(z,q)\phi(w,u) = \phi(z-w,q)\phi(w,q+u) + \phi(w-z,u)\phi(z,q+u); \tag{2.4}$$

$$\phi(z,q)\phi(w,q) = \phi(z+w,q)(E_1(z) + E_1(w) + E_1(q) - E_1(z+w+q)). \tag{2.5}$$

Распишем левую часть (1.4):

$$\begin{aligned}\{L_1(z), L_2(w)\} = \sum_{i\neq j}\nu\phi(w, q_i - q_j)(E_1(w + q_i - q_j) - E_1(q_i - q_j))E_{ii}\otimes E_{ij} -\\ - \sum_{i\neq j}\nu\phi(w, q_i - q_j)(E_1(w + q_i - q_j) - E_1(q_i - q_j))E_{jj}\otimes E_{ij} -\\ - \sum_{i\neq j}\nu\phi(z, q_i - q_j)(E_1(z + q_i - q_j) - E_1(q_i - q_j))E_{ij}\otimes E_{ii} +\\ + \sum_{i\neq j}\nu\phi(z, q_i - q_j)(E_1(w + q_i - q_j) - E_1(q_i - q_j))E_{ij}\otimes E_{jj}.\end{aligned}$$

Теперь поочередно посчитаем коммутаторы $r_{12}^{(i)}$ с $L_1$ и $L_2$:

$$[L_1(z), r_{12}^{(1)}(z,w)] = \sum_{i\neq j}(p_i - p_j)\phi(z-w, q_i - q_j)E_{ij}\otimes E_{ji}+$$

$$+\sum_{i\neq j,k}\nu\phi(z, q_k - q_i)\phi(z-w, q_i - q_j)E_{kj}\otimes E_{ji} - \sum_{i,k\neq j}\nu\phi(z, q_j - q_k)\phi(z-w, q_i - q_j)E_{ik}\otimes E_{ji};$$

$$[L_2(w), P_{12}r_{12}^{(1)}(w,z)P_{12}] = \sum_{i\neq j}(p_i - p_j)\phi(w-z, q_i - q_j)E_{ji}\otimes E_{ij}+$$

$$+\sum_{i\neq j,k}\nu\phi(w, q_k - q_i)\phi(w-z, q_i - q_j)E_{ji}\otimes E_{kj} - \sum_{i,k\neq j}\nu\phi(w, q_j - q_k)\phi(w-z, q_i - q_j)E_{ji}\otimes E_{ik};$$

$$[L_1(z), r_{12}^{(2)}(z,w)] = \sum_{i\neq j,k}\nu\phi(-w, q_i - q_j)\phi(z, q_i - q_k)E_{ik}\otimes E_{ji}-$$

$$-\sum_{i\neq j,k}\nu\phi(-w, q_i - q_j)\phi(z, q_k - q_i)E_{ki}\otimes E_{ji};$$

$$[L_2(w), P_{12}r_{12}^{(2)}(w,z)P_{12}] = \sum_{i\neq j,k}\nu\phi(w, q_i - q_k)\phi(-z, q_i - q_j)E_{ji}\otimes E_{ik}-$$

$$-\sum_{i\neq j,k}\nu\phi(w, q_k - q_i)\phi(-z, q_i - q_j)E_{ji}\otimes E_{ki};$$

$$[L_1(z), r_{12}^{(3)}(z,w)] =$$

$$= \sum_{i\neq k}\nu(E_1(z-w) + E_1(w))(\phi(z, q_k - q_i)E_{ki}\otimes E_{ii} - \phi(z, q_i - q_k)E_{ik}\otimes E_{ii});$$

$$[L_2(w), P_{12}r_{12}^{(3)}(w,z)P_{12}] =$$

$$= \sum_{i\neq k}\nu(E_1(w-z) + E_1(z))(\phi(w, q_k - q_i)E_{ii}\otimes E_{ki} - \phi(w, q_i - q_k)E_{ii}\otimes E_{ik}).$$

Если собрать все вместе по уравнению (1.4) и преобразовать правую часть, учитывая нечетность функции $\phi$: $\phi(z,q) = -\phi(-z,-q)$, а также несколько раз воспользовавшись формулами (2.4) и (2.5), то получится верное равенство. Таким образом уравнение (1.4) для классической системы Калоджеро Мозера доказано.

## 2.2 Полуклассическая система с квантовыми импульсами

Рассмотрим систему $N$ взаимодействующих частиц со следующими матрицами Лакса:

$$
\begin{aligned}
L_{ij} &= p_i\delta_{ij} + h\nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{q_i-q_j};\\
M_{ij} &= \nu\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\frac{P_{ik}}{(q_i-q_k)^2} - \nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{(q_i-q_j)^2}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Тогда ее гамильтониан:

$$
H = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(L^2)_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}L_{ik}L_{kj} = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 - \frac{h^2\nu}{2}\sum_{i\neq j}\frac{P_{ij}+\nu}{(q_i-q_j)^2}. \tag{2.7}
$$

Здесь были использованы следующие соотношения:

$$
P_{ab}P_{bc} = P_{ac}P_{ab} = P_{bc}P_{ac}, \tag{2.8}
$$

а также коммутатор

$$
\left[p_k, \frac{1}{q_k-q_j}\right] = -h(1-\delta_{kj})\frac{1}{(q_k-q_j)^2}. \tag{2.9}
$$

В будущем понадобится коммутатор

$$
\left[p_k, \frac{1}{(q_k-q_j)^2}\right] = -h(1-\delta_{kj})\frac{2}{(q_k-q_j)^3}. \tag{2.10}
$$

Уравнение Лакса (1.2) приобретает вид:

$$
[H, L] = \frac{1}{h^2}[L, M]. \tag{2.11}
$$

Если расписать подробно каждую часть этого выражения, пользуясь соотношениями (2.8) и (2.10), то получится:

$$
\begin{aligned}
[H, L]_{ij} = 2h^3\nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{(q_i-q_j)^3} - h^2\nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{(q_i-q_j)^2}(p_i-p_j) - \\
- 2h^3\nu\delta_{ij}\sum_{k\neq i,j}\frac{P_{ik}+\nu}{(q_i-q_k)^3};
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$[L,M]_{ij} = -2h\nu\delta_{ij}\sum_{k\neq i,j}\frac{P_{ik}+\nu}{(q_i-q_k)^3} - \nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{(q_i-q_j)^2}(p_i-p_j)+ \\ + 2h\nu(1-\delta_{ij})\frac{P_{ij}}{(q_i-q_j)^3}. \quad (2.13)$$

Легко увидеть, что если домножить (2.13) на $\frac{1}{h^2}$, то уравнение Лакса (2.11) выполняется. Это значит, что пара Лакса и гамильтониан подобраны верно.

Поскольку мы рассматриваем квантовый случай, то скобки Пуассона в (1.4) превратятся в коммутатор:

$$[L_1(z), L_2(w)] = [r_{12}(z,w), L_1(z)] - [r_{21}(w,z), L_2(w)]. \quad (2.14)$$

Перейдем к подбору такой $r$-матрицы, чтобы (2.14) выполнялось. Добавим в матрицу Лакса спектральный параметр $z$ и для удобства уберем константы:

$$L_{ij}(z) = \delta_{ij}\left(p_i + \frac{1}{z}\right) + (1-\delta_{ij})\left(P_{ij}\frac{1}{q_i-q_j} + \frac{1}{z}\right). \quad (2.15)$$

В случае с классической системой Калоджеро-Мозера и ее $r$-матрицей (1.5) в уравнении (1.4) фигурируют два матричных пространства. Но наша матрица Лакса, так как зависит от $R$-матрицы, сама по себе действует в двух пространствах: одно – условно классическое (от простой матрицы), а другое – условно квантовое (из-за наличия операторов $P_{ij}$) [4]. Когда мы тензорно удваиваем пространство $L$ для уравнения (1.4), получается, что в этом уравнении фигурируют матрицы размера $N^2n^{2N} \times N^2n^{2N}$. Предположим, что матричные элементы $r$, которые содержат в том числе операторы перестановки, имеют размер $n^{2N} \times n^{2N}$, и обозначим их $P_{ij|}$, в отличие от простого $P_{ij}$, имеющего размер $n^N \times n^N$, то есть содержащего в два раза меньше матриц в тензорном произведении. Если индексы $P_{ij|}$ находятся до черты, то они пробегают значения от 1 до $N$, и оператор действует в одном пространстве. Если после, то условно от $N+1$ до $2N$, и оператор действует во втором пространстве. Если индексы расположены по обе стороны от черты, то оператор действует в обоих пространствах.

Два оператора, действующие в разных пространствах или в одном, но с разными индексами, коммутируют:

$$
\begin{aligned}
&[P_{ab|}, P_{|ab}] = 0; \\
&[P_{a|b}, P_{b|a}] = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

В остальных случаях перестановочные соотношения подобны соотношениям (2.8):

$$
P_{a|b}P_{|bc} = P_{a|c}P_{a|b} = P_{|bc}P_{a|c}. \tag{2.17}
$$

Если не удваивать квантовое пространство матрицы Лакса, то все равно можно попытаться найти $r$-матрицу. Были проанализированы следующие варианты:

$$
\begin{aligned}
r_{12} &= \sum_{i\neq j} \frac{P_{ij}}{q_i - q_j} E_{ij} \otimes E_{ji} - \sum_{i\neq j} \frac{P_{ij}}{q_i - q_j} E_{ii} \otimes E_{ji}; \\
r_{12} &= \sum_{i\neq j} \frac{1}{q_i - q_j} E_{ij} \otimes E_{ji} - \sum_{i\neq j} \frac{1}{q_i - q_j} E_{ii} \otimes E_{ji}
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

для $L$-матрицы (2.15) без спектрального параметра. Обе они не приводят к выполнению уравнения (2.14).

С удвоением пространства были проверены следующие частные случаи $r$-матриц:

$$
\begin{aligned}
r_{12}(z,w) = \sum_{i\neq j} \left( \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z-w} \right) E_{ij} \otimes E_{ji} + \sum_{i\neq j} \left( \frac{1}{q_i - q_j} - \frac{1}{w} \right) E_{ii} \otimes E_{ji} + \\
+ \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} \right) \sum_{i\neq j} E_{ii} \otimes E_{ii};
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{12}(z,w) = \sum_{i\neq j} P_{i|i}P_{j|j} \left( \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z-w} \right) E_{ij} \otimes E_{ji} - \\
- \sum_{i\neq j} P_{i|i}P_{j|j} \left( \frac{1}{q_i - q_j} - \frac{1}{w} \right) E_{ii} \otimes E_{ji} + \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} \right) \sum_{i\neq j} E_{ii} \otimes E_{ii};
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{12}(z,w) = \sum_{i\neq j} A_{ij} \left( \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z-w} \right) E_{ij} \otimes E_{ji} - \sum_{i\neq j} B_{ij} \left( \frac{1}{q_i - q_j} - \frac{1}{w} \right) E_{ii} \otimes E_{ji} + \\
+ \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} \right) \sum_{i\neq j} C_i E_{ii} \otimes E_{ii}.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Эти $r$-матрицы также не приводят к выполнению уравнения (2.14) с матрицей Лакса (2.15). В последнем случае выражение для коэффициентов $B_{ij}$ приводит к противоречивому результату: получается, что он не должен зависеть от индексов.

По подобию (1.5) для классической системы Калоджеро-Мозера предположим следующий анзац для нашей $r$-матрицы:

$$r_{12}(z,w) = \sum_{i\neq j} A_{ij|}(q_i - q_j, z-w) E_{ij}\otimes E_{ji} - \sum_{i\neq j} B_{ij|}(q_i-q_j, w) E_{ii}\otimes E_{ji} + \\ + \sum_{i\neq j} C_i(z,w) E_{ii}\otimes E_{ii} \equiv r_{12}^{(1)}(z,w) + r_{12}^{(2)}(z,w) + r_{12}^{(3)}(z,w). \quad (2.22)$$

Распишем левую часть уравнения (2.14), используя коммутатор (2.9) без константы $h$:

$$[L_1(z), L_2(w)] = \sum_{i\neq k} \frac{P_{|ik}}{(q_i-q_k)^2} E_{kk}\otimes E_{ik} - \sum_{i\neq k} \frac{P_{|ki}}{(q_i-q_k)^2} E_{kk}\otimes E_{ki} - \\ - \sum_{i\neq k} \frac{P_{ik|}}{(q_i-q_k)^2} E_{ik}\otimes E_{kk} + \sum_{i\neq k} \frac{P_{ki|}}{(q_i-q_k)^2} E_{ki}\otimes E_{kk}. \quad (2.23)$$

Теперь поочередно посчитаем коммутаторы $r_{12}^{(i)}$ с $L_1$ и $L_2$:

$$[L_1(z), r_{12}^{(1)}(z,w)] = \\ = \sum_{i\neq k} \left( \left( p_i + \frac{1}{z} \right) A_{ik|}(q_i-q_k, z-w) - A_{ik|}(q_i-q_k, z-w) \left( p_k + \frac{1}{z} \right) \right) E_{ik}\otimes E_{ki} + \\ + \sum_{i\neq j, k\neq j} \left( P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z} \right) A_{jk|}(q_j - q_k, z-w) E_{ik}\otimes E_{kj} - \\ - \sum_{i\neq j, i\neq k} A_{ki|}(q_k - q_i, z-w) \left( P_{ij|} \frac{1}{q_i-q_j} + \frac{1}{z} \right) E_{kj}\otimes E_{ik}; \quad (2.24)$$

$$[L_2(w), P_{12} r_{12}^{(1)}(w,z) P_{12}] =$$

$$= \sum_{i\neq k} \left( \left( p_k + \frac{1}{w} \right) A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) - A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left( p_i + \frac{1}{w} \right) \right) E_{ik} \otimes E_{ki} +$$

$$+ \sum_{i\neq j, k\neq j} \left( P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w} \right) A_{|jk}(q_j - q_k, w - z) E_{kj} \otimes E_{ik} -$$

$$- \sum_{i\neq j, i\neq k} A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left( P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w} \right) E_{ik} \otimes E_{kj}; \quad (2.25)$$

$$[L_1(z), r_{12}^{(2)}(z,w)] =$$

$$= \sum_{i\neq k} \left( \left( p_i + \frac{1}{z} \right) B_{ik|}(q_i - q_k, w) - B_{ik|}(q_i - q_k, w) \left( p_i + \frac{1}{z} \right) \right) E_{ii} \otimes E_{ki} +$$

$$+ \sum_{i\neq j, k\neq j} \left( P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z} \right) B_{jk|}(q_j - q_k, w) E_{ij} \otimes E_{kj} -$$

$$- \sum_{i\neq j, k\neq i} B_{ik|}(q_i - q_k, w) \left( P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z} \right) E_{ij} \otimes E_{ki}; \quad (2.26)$$

$$[L_2(w), P_{12} r_{12}^{(2)}(w,z) P_{12}] =$$

$$= \sum_{i\neq k} \left( \left( p_i + \frac{1}{w} \right) B_{|ik}(q_i - q_k, z) - B_{|ik}(q_i - q_k, z) \left( p_i + \frac{1}{w} \right) \right) E_{ki} \otimes E_{ii} +$$

$$+ \sum_{i\neq j, k\neq j} \left( P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w} \right) B_{|jk}(q_j - q_k, z) E_{kj} \otimes E_{ij} -$$

$$- \sum_{i\neq j, k\neq i} B_{|ik}(q_i - q_k, z) \left( P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w} \right) E_{ki} \otimes E_{ij}; \quad (2.27)$$

$$[L_1(z), r_{12}^{(3)}(z,w)] = \sum_{k} \left( p_k + \frac{1}{z} \right) C_k(z,w) E_{kk} \otimes E_{kk} -$$

$$- \sum_{k} C_k(z,w) \left( p_k + \frac{1}{z} \right) E_{kk} \otimes E_{kk} + \sum_{i\neq k} \left( P_{ik|} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z} \right) C_k(z,w) E_{ik} \otimes E_{kk} -$$

$$- \sum_{k\neq i} C_k(z,w) \left( P_{ki|} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{z} \right) E_{ki} \otimes E_{kk}; \quad (2.28)$$

$$[L_2(w), P_{12}r_{12}^{(3)}(w,z)P_{12}] = \sum_k \left(p_k + \frac{1}{w}\right) C_k(w,z)E_{kk} \otimes E_{kk} -$$

$$- \sum_k C_k(w,z) \left(p_k + \frac{1}{w}\right) E_{kk} \otimes E_{kk} + \sum_{i\neq k} \left(P_{|ik} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{w}\right) C_k(w,z) E_{kk} \otimes E_{ik} -$$

$$- \sum_{i \neq k} C_k(w,z) \left(P_{|ki} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{w}\right) E_{kk} \otimes E_{ki}. \quad (2.29)$$

Если собрать слагаемые с множителями вида $E_{ik} \otimes E_{kj}$ с $i \neq j \neq k$ (их сумма должна быть равна нулю), то можно получить условия на коэффициенты $A$ и $B$:

$$\left(P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z}\right) B_{jk|}(q_j - q_k, w) = \left(P_{|kj} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right) B_{|ji}(q_j - q_i, z); \quad (2.30)$$

$$\left(P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z}\right) A_{jk|}(q_j - q_k, z - w) + A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left(P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w}\right) -$$

$$- B_{|ki}(q_k - q_i, z) \left(P_{|kj} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right) = 0. \quad (2.31)$$

Введем оператор "большой перестановки": $\mathbf{P} = P_{1|1} P_{2|2} ... P_{N|N}$. Он действует таким образом, что меняет пространство действия оператора:

$$\mathbf{P} P_{ij|} = P_{|ij} \mathbf{P}. \quad (2.32)$$

Квадрат $\mathbf{P}$ равен единице.

Можно предположить, исходя из (2.30) и (2.32), что коэффициент $B$ равен

$$B_{jk|}(q_j - q_k, w) = \mathbf{P} \left(P_{jk|} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right). \quad (2.33)$$

Тогда (2.30) превращается в верное равенство:

$$\left(P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z}\right) \mathbf{P} \left(P_{jk|} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right) = \left(P_{|kj} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right) \mathbf{P} \left(P_{ji|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z}\right),$$

если перенести $\mathbf{P}$ вправо и учесть, что, согласно (2.17), матрицы перестановки, действующие в разных пространствах, коммутируют, и $P_{ij} = P_{ji}$. (2.31) превращается в условие на $A$:

$$\left(P_{ij|} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{z}\right) A_{jk|}(q_j - q_k, z - w) + A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left(P_{|ij} \frac{1}{q_i - q_j} + \frac{1}{w}\right) -$$

$$- \mathbf{P} \left(P_{|ki} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z}\right) \left(P_{|kj} \frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right) = 0. \quad (2.34)$$

Очевидно, коэффициент $A$ тоже зависит от $\mathbf{P}$, но подобрать его вид сложнее. Также для $A$ есть условие, получающееся из слагаемых в (2.24) и (2.25) с множителями вида $E_{ik} \otimes E_{ki}$:

$$p_i A_{ik|}(q_i - q_k, z - w) - A_{ik|}(q_i - q_k, z - w) p_k = \\ = p_k A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) - A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) p_i. \quad (2.35)$$

Слагаемые с множителями вида $E_{kk} \otimes E_{kk}$ в (2.28) и (2.29) сокращаются, если предположить, что $C_k$ коммутирует с $p_k$, что, скорее всего, так и есть.

Остаются лишь слагаемые такого же вида, как в (2.23). Если собрать каждое из них, используя (2.9) для коммутатора $[B_{ij}(q_i - q_j, z), p_k]$, то получаются соотношения:

$$-\sum_{i \neq k} \frac{P_{|ik}}{(q_i - q_k)^2} E_{kk} \otimes E_{ik} = -\sum_{i \neq k} A_{ki|}(q_k - q_i, z - w) \left( P_{ik|} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z} \right) E_{kk} \otimes E_{ik} + \\ + \sum_{i \neq k} \mathbf{P} P_{ki|} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{kk} \otimes E_{ik} - \sum_{i \neq k} \left( P_{|ik} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{w} \right) C_k(w, z) E_{kk} \otimes E_{ik}; \quad (2.36)$$

$$\sum_{i \neq k} \frac{P_{|ki}}{(q_k - q_i)^2} E_{kk} \otimes E_{ki} = \sum_{i \neq k} \left( P_{ki|} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{z} \right) A_{ik|}(q_i - q_k, z - w) E_{kk} \otimes E_{ki} + \\ + \sum_{i \neq k} C_k(w, z) \left( P_{|ki} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{w} \right) E_{kk} \otimes E_{ki}; \quad (2.37)$$

$$-\sum_{i \neq k} \frac{P_{ik|}}{(q_i - q_k)^2} E_{ik} \otimes E_{kk} = \sum_{i \neq k} A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left( P_{|ik} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{w} \right) E_{ik} \otimes E_{kk} - \\ - \sum_{i \neq k} \mathbf{P} P_{ki|} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{ik} \otimes E_{kk} + \sum_{i \neq k} \left( P_{ik|} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z} \right) C_k(z, w) E_{ik} \otimes E_{kk}; \quad (2.38)$$

$$\sum_{i \neq k} \frac{P_{ki|}}{(q_k - q_i)^2} E_{ki} \otimes E_{kk} = -\sum_{i \neq k} \left( P_{|ki} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{w} \right) A_{|ik}(q_i - q_k, w - z) E_{ki} \otimes E_{kk} - \\ - \sum_{k \neq i} C_k(z, w) \left( P_{ki|} \frac{1}{q_k - q_i} + \frac{1}{z} \right) E_{ki} \otimes E_{kk}. \quad (2.39)$$

Таким образом, если положить коэффициент $B$ таким, как в (2.30), то на коэффициент $A$ возникает два условия: (2.31), (2.35). 4 условия выше определяют коэффициент $C$, если знать вид $A$.

## 2.3 Полуклассическая система с классическими импульсами

Рассмотрим систему $N$ взаимодействующих частиц со следующими матрицами Лакса:

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \frac{P_{ij}}{q_i - q_j};$$
$$M_{ij} = \delta_{ij} \left( \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}}{(q_i - q_k)^2} + \frac{1}{2} \sum_k p_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \frac{1 + P_{kl}}{(q_k - q_l)^2} \right) - (1 - \delta_{ij}) \frac{P_{ij}}{(q_i - q_j)^2}. \tag{2.40}$$

Тогда ее гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2} Tr(L^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} L_{ji} = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{(q_i - q_j)^2}. \tag{2.41}$$

Интересно, что этот гамильтониан повторяет гамильтониан (1.1) классической системы Калоджеро-Мозера в рациональном случае, хотя в нашей системе у частиц присутствуют спины.

Уравнение Лакса (1.2) приобретает вид:

$$\dot{L} = [L, M]. \tag{2.42}$$

Если расписать подробно каждую часть этого выражения, пользуясь соотношениями (2.8), то получится:

$$\dot{L}_{ij} = \dot{p}_i \delta_{ij} - (1 - \delta_{ij}) \frac{P_{ij}}{(q_i - q_j)^2} (\dot{q}_i - \dot{q}_j); \tag{2.43}$$

$$[L, M]_{ij} = -2\delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^3} - (1 - \delta_{ij}) \frac{P_{ij}}{(q_i - q_j)^2} (p_i - p_j). \tag{2.44}$$

При условии, что эти выражения равны, получаем классические уравнения движения, получающиеся из гамильтониана (2.41):

$$\dot{p}_i = -2 \sum_{k \neq i} \frac{1}{(q_i - q_k)^3};$$
$$\dot{q}_i = p_i. \tag{2.45}$$

Будем искать $r$-матрицу в том же виде (2.22) для уравнения (1.4). Так как $L$ для обоих случаев одинакова и имеет вид (2.15), то правая часть уравнения будет точно такая же, как в квантовом случае: (2.24)-(2.29). Остается посчитать только левую часть:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = \sum_k \left( \frac{\partial L_1(z)}{\partial p_k} \frac{\partial L_2(w)}{\partial q_k} - \frac{\partial L_2(w)}{\partial p_k} \frac{\partial L_1(z)}{\partial q_k} \right) =$$
$$= - \sum_{i \neq k} P_{|ki} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{kk} \otimes E_{ki} + \sum_{i \neq k} P_{|ik} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{kk} \otimes E_{ik} +$$
$$+ \sum_{i \neq k} P_{ki|} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{ki} \otimes E_{kk} - \sum_{i \neq k} P_{ik|} \frac{1}{(q_i - q_k)^2} E_{ik} \otimes E_{kk}. \quad (2.46)$$

Мы видим, что скобка Пуассона имеет абсолютно тот же вид, что (2.23). Значит, условия на коэффициенты $A$, $B$ и $C$ одинаковые для обоих случаев, за исключением (2.36) и (2.38), так как коммутатор $[B_{ij}(q_i - q_j, z), p_k]$ теперь равен нулю:

$$- \sum_{i \neq k} \frac{P_{|ik}}{(q_i - q_k)^2} E_{kk} \otimes E_{ik} = - \sum_{i \neq k} A_{ki|}(q_k - q_i, z - w) \left( P_{ik|} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z} \right) E_{kk} \otimes E_{ik} -$$
$$- \sum_{i \neq k} \left( P_{|ik} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{w} \right) C_k(w, z) E_{kk} \otimes E_{ik}; \quad (2.47)$$

$$- \sum_{i \neq k} \frac{P_{ik|}}{(q_i - q_k)^2} E_{ik} \otimes E_{kk} = \sum_{i \neq k} A_{|ki}(q_k - q_i, w - z) \left( P_{|ik} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{w} \right) E_{ik} \otimes E_{kk} +$$
$$+ \sum_{i \neq k} \left( P_{ik|} \frac{1}{q_i - q_k} + \frac{1}{z} \right) C_k(z, w) E_{ik} \otimes E_{kk}. \quad (2.48)$$

# 3 Заключение

В данной работе проводился поиск $r$-матриц для систем частиц со спинами, подобных классической системе Калоджеро-Мозера. Так как уже доказано, что системы интегрируемы, то известно, что эта матрица существует.

$r$-матрица должна удовлетворять уравнению (1.4) в случае с классическими импульсами:

$$\{L_1(z), L_2(w)\} = [r_{12}(z,w), L_1(z)] - [r_{21}(w,z), L_2(w)], \tag{3.1}$$

и уравнению (2.14) в случае с квантовыми импульсами:

$$[L_1(z), L_2(w)] = [r_{12}(z,w), L_1(z)] - [r_{21}(w,z), L_2(w)]. \tag{3.2}$$

Для знакомства с техникой проверки уравнения (1.4) оно было проверено для классической системы Калоджеро-Мозера с матрицей Лакса (1.3) и $r$-матрицей (1.5).

Для полуклассической модели с квантовыми импульсами были проверены несколько частных случаев $r$-матрицы: без удвоения квантового пространства матрицы Лакса – (2.18), с удвоением – (2.19)-(2.21). Они не выполняют уравнение (2.14), поэтому искомой матрицей не являются.

Затем $r$-матрица искалась в более общем виде (2.22):

$$\begin{aligned} r_{12}(z,w) = \sum_{i\neq j} A_{ij|}(q_i - q_j, z-w) E_{ij} \otimes E_{ji} - \sum_{i\neq j} B_{ij|}(q_i - q_j, w) E_{ii} \otimes E_{ji} + \\ + \sum_{i\neq j} C_i(z,w) E_{ii} \otimes E_{ii} \equiv r_{12}^{(1)}(z,w) + r_{12}^{(2)}(z,w) + r_{12}^{(3)}(z,w). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Целью было получить уравнения на коэффициенты $A$, $B$ и $C$, исходя из того, что эта $r$-матрица должна удовлетворять уравнению (2.14) для случая с квантовыми импульсами и (1.4) – с классическими.

Был получен явный вид $B$ (2.33), он одинаков для обоих случаев полуклассической модели:

$$B_{jk|}(q_j - q_k, w) = \mathbf{P}\left(P_{jk|}\frac{1}{q_k - q_j} + \frac{1}{w}\right). \tag{3.4}$$

Также были получены условия на $A$ и $C$: (2.34)-(2.39) для случая с квантовыми импульсами:

$$\left(P_{ij|}\frac{1}{q_i-q_j}+\frac{1}{z}\right)A_{jk|}(q_j-q_k,z-w)+A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)\left(P_{|ij}\frac{1}{q_i-q_j}+\frac{1}{w}\right)-\\ -\mathbf{P}\left(P_{|ki}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)\left(P_{|kj}\frac{1}{q_k-q_j}+\frac{1}{w}\right)=0; \quad (3.5)$$

$$p_iA_{ik|}(q_i-q_k,z-w)-A_{ik|}(q_i-q_k,z-w)p_k=\\ =p_kA_{|ki}(q_k-q_i,w-z)-A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)p_i; \quad (3.6)$$

$$-\sum_{i\neq k}\frac{P_{|ik}}{(q_i-q_k)^2}E_{kk}\otimes E_{ik}=-\sum_{i\neq k}A_{ki|}(q_k-q_i,z-w)\left(P_{ik|}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)E_{kk}\otimes E_{ik}+\\ +\sum_{i\neq k}\mathbf{P}P_{ki|}\frac{1}{(q_i-q_k)^2}E_{kk}\otimes E_{ik}-\sum_{i\neq k}\left(P_{|ik}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{w}\right)C_k(w,z)E_{kk}\otimes E_{ik}; \quad (3.7)$$

$$\sum_{i\neq k}\frac{P_{|ki}}{(q_k-q_i)^2}E_{kk}\otimes E_{ki}=\sum_{i\neq k}\left(P_{ki|}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{z}\right)A_{ik|}(q_i-q_k,z-w)E_{kk}\otimes E_{ki}+\\ +\sum_{i\neq k}C_k(w,z)\left(P_{|ki}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{w}\right)E_{kk}\otimes E_{ki}; \quad (3.8)$$

$$-\sum_{i\neq k}\frac{P_{ik|}}{(q_i-q_k)^2}E_{ik}\otimes E_{kk}=\sum_{i\neq k}A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)\left(P_{|ik}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{w}\right)E_{ik}\otimes E_{kk}-\\ -\sum_{i\neq k}\mathbf{P}P_{ki|}\frac{1}{(q_i-q_k)^2}E_{ik}\otimes E_{kk}+\sum_{i\neq k}\left(P_{ik|}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)C_k(z,w)E_{ik}\otimes E_{kk}; \quad (3.9)$$

$$\sum_{i\neq k}\frac{P_{ki|}}{(q_k-q_i)^2}E_{ki}\otimes E_{kk}=-\sum_{i\neq k}\left(P_{|ki}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{w}\right)A_{|ik}(q_i-q_k,w-z)E_{ki}\otimes E_{kk}-\\ -\sum_{k\neq i}C_k(z,w)\left(P_{ki|}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{z}\right)E_{ki}\otimes E_{kk}. \quad (3.10)$$

И (2.34), (2.35), (2.37), (2.39), (2.47), (2.48) для случая с классическими импульсами:

$$\left(P_{ij|}\frac{1}{q_i-q_j}+\frac{1}{z}\right)A_{jk|}(q_j-q_k,z-w)+A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)\left(P_{|ij}\frac{1}{q_i-q_j}+\frac{1}{w}\right)-$$
$$-\mathbf{P}\left(P_{|ki}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)\left(P_{|kj}\frac{1}{q_k-q_j}+\frac{1}{w}\right)=0; \quad (3.11)$$

$$p_iA_{ik|}(q_i-q_k,z-w)-A_{ik|}(q_i-q_k,z-w)p_k=$$
$$=p_kA_{|ki}(q_k-q_i,w-z)-A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)p_i; \quad (3.12)$$

$$-\sum_{i\neq k}\frac{P_{|ik}}{(q_i-q_k)^2}E_{kk}\otimes E_{ik}=-\sum_{i\neq k}A_{ki|}(q_k-q_i,z-w)\left(P_{ik|}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)E_{kk}\otimes E_{ik}-$$
$$-\sum_{i\neq k}\left(P_{|ik}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{w}\right)C_k(w,z)E_{kk}\otimes E_{ik}; \quad (3.13)$$

$$\sum_{i\neq k}\frac{P_{|ki}}{(q_k-q_i)^2}E_{kk}\otimes E_{ki}=\sum_{i\neq k}\left(P_{ki|}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{z}\right)A_{ik|}(q_i-q_k,z-w)E_{kk}\otimes E_{ki}+$$
$$+\sum_{i\neq k}C_k(w,z)\left(P_{|ki}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{w}\right)E_{kk}\otimes E_{ki}; \quad (3.14)$$

$$-\sum_{i\neq k}\frac{P_{ik|}}{(q_i-q_k)^2}E_{ik}\otimes E_{kk}=\sum_{i\neq k}A_{|ki}(q_k-q_i,w-z)\left(P_{|ik}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{w}\right)E_{ik}\otimes E_{kk}+$$
$$+\sum_{i\neq k}\left(P_{ik|}\frac{1}{q_i-q_k}+\frac{1}{z}\right)C_k(z,w)E_{ik}\otimes E_{kk}; \quad (3.15)$$

$$\sum_{i\neq k}\frac{P_{ki|}}{(q_k-q_i)^2}E_{ki}\otimes E_{kk}=-\sum_{i\neq k}\left(P_{|ki}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{w}\right)A_{|ik}(q_i-q_k,w-z)E_{ki}\otimes E_{kk}-$$
$$-\sum_{k\neq i}C_k(z,w)\left(P_{ki|}\frac{1}{q_k-q_i}+\frac{1}{z}\right)E_{ki}\otimes E_{kk}. \quad (3.16)$$

# Список литературы


[1] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras //Phys. Rep. C. – 1981. – Т. 71. – С. 314-400.

[2] Avan J., Talon M. Classical R-matrix structure for the Calogero model //Physics Letters B. – 1993. – Т. 303. – №. 1-2. – С. 33-37.

[3] Hikami K., Wadati M. Integrability of Calogero-Moser spin system //Journal of the Physical Society of Japan. – 1993. – Т. 62. – №. 2. – С. 469-472.

[4] Зотов А. В. Модель Калоджеро–Мозера и R-матричные тождества //Теоретическая и математическая физика. – 2018. – Т. 197. – №. 3. – С. 417-434.

[5] Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1990.

[6] Babelon O., Bernard D., Talon M. Introduction to classical integrable systems. – Cambridge University Press, 2003.

[7] Sklyanin E. K. Dynamical $r$-matrices for the Elliptic Calogero-Moser Model //arXiv preprint hep-th/9308060. – 1993.

[8] Cherednik I. et al. Lectures on Knizhnik-Zamolodchikov equations and Hecke algebras //Quantum many-body problems and representation theory. – Mathematical Society of Japan, 1998. – С. 1-96.

[9] Reshetikhin N. Y., Turaev V. G. Ribbon graphs and their invaraints derived from

quantum groups //Communications in Mathematical Physics. – 1990. – Т. 127. – №. 1. – С. 1-26.

[10] Grekov A., Sechin I., Zotov A. Generalized model of interacting integrable tops //Journal of High Energy Physics. – 2019. – Т. 2019. – №. 10. – С. 81.

[11] Sechin I., Zotov A. R-matrix-valued Lax pairs and long-range spin chains //Physics Letters B. – 2018. – Т. 781. – С. 1-7.

[12] Levin A., Olshanetsky M., Zotov A. Planck constant as spectral parameter in integrable systems and KZB equations //Journal of High Energy Physics. – 2014. – Т. 2014. – №. 10. – С. 109.

[13] Levin A. M., Olshanetsky M. A., Zotov A. V. Quantum Baxter-Belavin R-matrices and multidimensional Lax pairs for Painlevé VI //Theoretical and Mathematical Physics. – 2015. – Т. 184. – №. 1. – С. 924-939.

[14] Вейль А. Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. – Издательство"Мир, 1978.

[15] Hikami K., Wadati M. Integrable spin-12 particle systems with long-range interactions //Physics Letters A. – 1993. – Т. 173. – №. 3. – С. 263-266.

[16] Inozemtsev V. I., Sasaki R. Universal Lax pairs for spin Calogero–Moser models and spin exchange models //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2001. – Т. 34. – №. 37. – С. 7621.

[17] Fomin S., Kirillov A. N. Quadratic algebras, Dunkl elements, and Schubert calculus //Advances in geometry. – Birkhäuser, Boston, MA, 1999. – С. 147-182.