Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)

Направленность (профиль) подготовки: Проблемы теоретической физики

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ГОДЕНА

(магистерская диссертация)

Студент:
Трунина Елизавета Сергеевна

Научный руководитель:
Зотов Андрей Владимирович,
д-р физ.-мат. наук

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Классические интегрируемые системы представляют собой узкий класс точно решаемых задач. Лиувиллем в [1] была сформулирована теорема, согласно которой, если система живет на симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2N$ и имеет N независимых интегралов движения в инволюции, то уравнения движения этой системы разрешаются в квадратурах. Эта теорема, несмотря на всю свою полезность, не является панацеей. Хотя она и позволяет определить, является ли данная модель точно решаемой или нет, тем не менее она не предлагает конкретных механизмов решения уравнений движения. Более того, на практике сложности начинаются уже на стадии применения теоремы. Одна из основных проблем — поиск нужного количества независимых первых интегралов движения, находящихся в инволюции.

Распространенный метод решения этой проблемы был впервые предложен Лаксом в [2] для уравнения Кортевега — де Фриза. Суть этого метода заключается в том, что если существуют две таких матрицы L, M (конечно или бесконечномерные), что уравнение:

$$\frac{d}{dt}L = [L, M] \tag{1.1}$$

эквивалентно уравнениям движения рассматриваемой нами системы, то собственные значения матрицы L являются первыми интегралами. Это свойство позволяет нам сразу же получить большое количество сохраняющихся со временем величин. Заметим, что представление Лакса для некоторой системы не является единственным, как видно из самого уравнения Лакса (1.1), при калибровочных преобразованиях:

$$L \to gLg^{-1}, \quad M \to gMg^{-1} - \partial_t g g^{-1} \tag{1.2}$$

уравнение не меняет свой вид. На практике, в качестве сохраняющихся величин обычно рассматривают следы степеней матрицы Лакса $\mathrm{Tr}L^k$, которые также сохраняются во времени, поскольку являются функциями собственных значений. В частности, гамильтониану системы обычно соответствует $\mathrm{Tr}L^2$.

Описанный нами способ позволяет сразу найти большое количество первых интегралов, однако не факт, что они окажутся независимыми или тем более в инволюции друг с другом. Поэтому в уравнение Лакса часто вводят дополнительную зависимость от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$: $L(z)$, $M(z)$. В этом случае, в качестве гамильтониана и первых интегралов обычно выступают коэффициенты разложения $\mathrm{Tr}L^k$ в ряд по спектральному параметру. Это нужно для того, чтобы исключить заисимость от z из уравнений движения модели, поскольку спектральный параметр не имеет физической интерпретации.

Одним из самых хорошо известных примеров интегрируемости является система Калоджеро-Мозера [3]. Эта система описывает N взаимодействующих друг с другом частиц:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \nu^2 \sum_{i>j} \wp(q_i - q_j), \tag{1.3}$$

где p_i, q_i - канонические переменные $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, а потенциал описывается $\wp$-функцией Вейерштрасса. Эта система допускает спиновое обобщение, котором будет рассказано далее.

Хитчином впервые в [4] был рассмотрен широкий класс интегрируемых моделей, чьи матрицы Лакса лежат в сечении некоторого голоморфного векторного расслоения над спектральной кривой со значениями в некоторой алгебре или группе Ли. В статьях [5–8] был показано, что многие из уже хорошо известных моделей или их обобщения принаждлежат случаю $SL(N,\mathbb{C})$ расслоения над эллиптической кривой: $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$ (z — локальная координата на этой кривой). Матрицы Лакса таких моделей описываются тремя параметрами — рангом векторного расслоения N, степенью расслоения k и количеством отмеченных точек на эллиптической кривой n. Этому случаю принадлежит большое количество хорошо известных интегрируемых моделей. Приведем несколько примеров.

Случай, когда степень расслоения k равна нулю (mod N), соответствует эллиптической модели Годена [5]. Матрица Лакса этой системы, после фиксации калибровочной свободы, принимает вид:

$$L^G_{ij} = \delta_{ij}(p_i + \sum_{a=1}^{n} S^a_{ii} E_1(z-z_a)) + (1-\delta_{ij})\sum_{a=1}^{n} S^a_{ij}\phi(z-z_a,q_{ij}),\ i=\overline{1,N}. \tag{1.4}$$

Помимо привычных нам динамических переменнных q_i, p_i с канонической скобкой Пуассона $\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}$, в этой модели в каждой отмеченной точке z_a возникает динамическая переменная классического спина $S^a\in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$ с линейной скобкой Пуассона: $\{S^a_{ij},S^b_{km}\} = \delta_{ab}(\delta_{im}S_{kj}-\delta_{kj}S_{im})$. Матрица $\mathcal{L}$ имеет n полюсов на эллиптической кривой — в каждой отмеченной точке. Её вычет в этих точках равен матрице спина, "сидящего" в этой точке:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_a} L^G(z) = S^a \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}). \tag{1.5}$$

При описании модели Годена (и всех последующих в этой работе моделей) естественным образом возникают эллиптические функции [9], квазипериодичные по своему аргументу с периодами 1, τ. Более подробное описание их свойств и набор необходимых тождеств см. в **приложении A**.

В случае модели Годена гамильтонианы, задающие интегрируемые уравнения движения, получаются разложением следа квадрата матрицы Лакса по базису эллиптических функций:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}L^G = H_0 + \sum_{a=1}^{n} H_{1,a}E_1(z-z_a) + \sum_{a=1}^{n} H_{2,a}E_2(z-z_a). \tag{1.6}$$

Гамильтониан $H_{2,a}$ на самом деле является оператором Казимира [5], а гамильтонианы H_0 и $H_{1,a}$ выглядят следующим образом:

$$2H_0 = \sum_i p_i^2 + \sum_i \sum_{a,b:a\neq b} S^a_{ii}S^b_{ii}\rho(z_{ab}) - \sum_{i,j:i\neq j}\sum_a S^a_{ij}S^a_{ji}E_2(q_{ij}) + \sum_{i,j:i\neq j}\sum_{a,b:a\neq b} S^a_{ij}S^b_{ji}f(z_{ba},q_{ij}), \tag{1.7}$$

$$H_{1,a} = \sum_i p_i S^a_{ii} + \sum_i \sum_{b:b\neq a} S^a_{ii}S^b_{ii}E_1(z_{ab}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j:i\neq j}\sum_{b:b\neq a}\left(S^b_{ij}S^a_{ji}\phi(z_{ab},q_{ij}) - S^a_{ij}S^b_{ji}\phi(z_{ba},q_{ij})\right), \tag{1.8}$$

где $z_{ab}=z_a-z_b$. Уравнение Лакса для матрицы L^G и матриц:

$$M_0 = \delta_{ij}\sum_a S^a_{ii}\rho(z-z_a) - (1-\delta_{ij})\sum_a S^a_{ij}f(z-z_a,q_{ij}), \tag{1.9}$$

$$M_{1,a} = -\delta_{ij}S^a_{ii}E_1(z-z_a) - (1-\delta_{ij})S^a_{ij}\phi(z-z_a,q_{ij}), \tag{1.10}$$

эквивалентно уравнениям движения для гамильтонианов H_0 и $H_{1,a}$ соответственно, при условии:

$$\sum_{a=1}^{n} S^a_{ii} = \mathrm{const},\ i=\overline{1,N}. \tag{1.11}$$

Частным случаем эллиптической модели Годена является спиновая модель Калоджеро-Мозера [10], в которую она переходит в случае одной отмеченной точки. Если же дополнительно наложить условие $\mathrm{rk}S = 1$, эта система превратится в обычную эллиптическую модель Калоджеро-Мозера .

Другим важным частным случаем систем, построенных через описанные выше расслоения, является $sl(N, \mathbb{C})$ эллиптическая система Годена [7, 11, 12]. Эта система соответствует степени расслоения $k = 1 \pmod N$ и n отмеченным точкам. Её матрица Лакса имеет вид:

$$L(z) = \sum_a \sum_{\alpha \neq 0} S^a_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha), \tag{1.12}$$

где мы использовали специальный базис в $sl(N, \mathbb{C})$ — T_α. Подробнее о нем и о доопределённых эллиптических функциях φ_α и f_α см. **приложение B**. Также как и в предыдущем случае обычной эллиптической модели Годена, этой матрице Лакса соответствуют два гамильтониана H_0 и $H_{1,a}$. Эти гамильтонианы тоже получаются разложением по базису эллиптических функций (1.6), вычислительные подробности см. [12]. Парные матрицы Лакса для этих гамильтонианов выглядят как:

$$M_0(z) = -\sum_a \sum_{\alpha \neq 0} S^a_\alpha T_\alpha f_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha), \quad M_{1,a}(z) = \sum_{\alpha \neq 0} S^a_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha). \tag{1.13}$$

В случае одной отмеченной точки эта система переходит в эллиптический $sl(N, \mathbb{C})$ волчок — обощенную версию волчка Эйлера [6, 11, 13]. Как и у всех моделей, описывающих волчки, уравнения движения этой системы принимают вид:

$$\dot{S} = [S, J], \quad J(S) = -\sum_{\alpha \neq 0} S_\alpha T_\alpha E_2(\omega_\alpha), \quad S = \sum_{\alpha \neq 0} S_\alpha T_\alpha. \tag{1.14}$$

Здесь J — тензор инерции, а S_α — компоненты переменной спина в базисе T_α. Стоит заметить, что матрицы T_α при $\alpha \neq (0, 0)$ образуют базис только в алгебре $sl(N, \mathbb{C})$. В дальнейшем мы будем рассматривать группу $GL(N, \mathbb{C})$, базис в ней будет задаваться матрицами T_α, где α пробегает все значения из $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$.

Наиболее общим примером является рассмотренная в статьях [6, 7, 14] $GL(NM)$ интегрируемая модель, чей случай соответствует просто одной отмеченной точке. Эта модель описывается блочной матрицей Лакса размерностью $NM \times NM$:

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{i,j=1}^{M} E_{ij} \otimes \mathcal{L}^{ij}(z) \in \mathrm{Mat}(NM, \mathbb{C}), \quad \mathcal{L}^{ij}(z) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}), \tag{1.15}$$

каждый блок ij размера $N \times N$ имеет вид:

$$\mathcal{L}^{ij} = \delta_{ij}\big(p_i 1_N + \mathcal{S}^{ii}_{0,0} 1_N E_1(z) + \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}^{ii}_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha)\big) + (1 - \delta_{ij}) \sum_\alpha \mathcal{S}^{ij}_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + q_{ij}). \tag{1.16}$$

При этом:

$$\mathcal{S} = \operatorname*{Res}_{z=0} \mathcal{L}(z) \in GL(NM) \tag{1.17}$$

Элементы матрицы спина $\mathcal{S}^{ij}_\alpha$: $i, j = \overline{1, M}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_N \times Z_N$, в блочной структуре раскладываются по обычному матричному базису $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ki}\delta_{jl}$, а внутри самого блока по базису T_α. Из-за отличного от случая эллиптической модели Годена разложения элементов $\mathcal{S}$, скобка Пуассона для них принимает несколько другой вид:

$$\{\mathcal{S}^{ij}_{\alpha}, \mathcal{S}^{kl}_{\beta}\} = \delta_{il}\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{kj}_{\alpha+\beta} - \delta_{kj}\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{il}_{\alpha+\beta}. \tag{1.18}$$

Гамильтониан этой модели получается стандартным взятием следа квадрата матрицы Лакса, который мы для удобства делим на $2N$ и из которого мы выкидываем слагаемое, отличающееся от оператора Казимира $\mathrm{Tr}\mathcal{S}^2$ только следом:

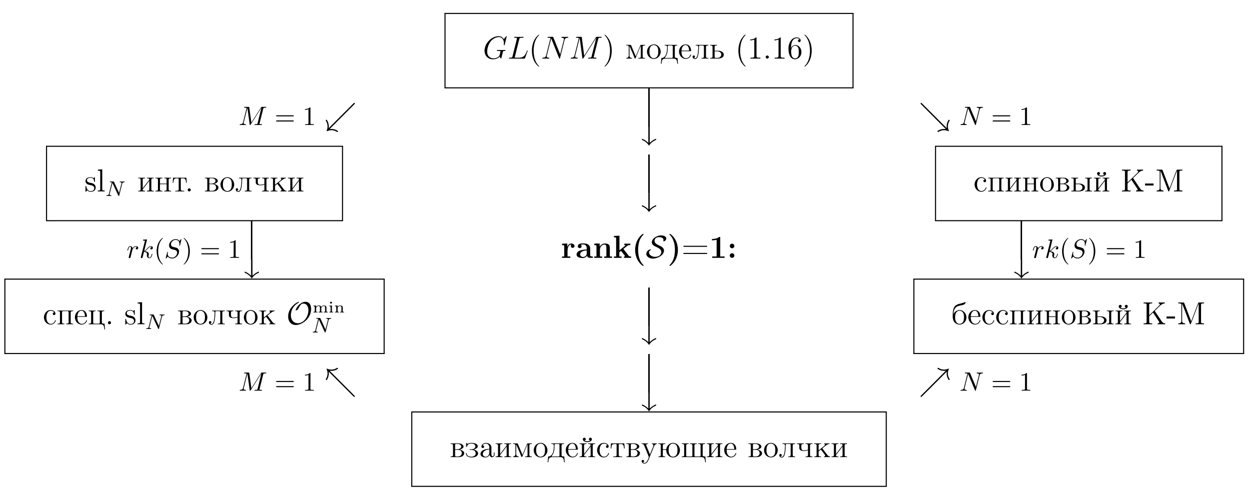
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{\alpha:\alpha\neq 0} \mathcal{S}^{ii}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii}_{-\alpha}E_2(\omega_\alpha) - \frac{1}{2}\sum_{i,j:i\neq j}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij}_{\alpha}\mathcal{S}^{ji}_{-\alpha}E_2(\omega_\alpha + q_{ij}). \tag{1.19}$$

Вторая матрица Лакса $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}^{ij} = \delta_{ij}\big(\mathcal{S}^{ii}_{0,0}1_N\rho(z) + \sum_{\alpha\neq 0}\mathcal{S}^{ii}_{\alpha}T_\alpha f_\alpha(z,\omega_\alpha)\big) + (1-\delta_{ij})\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij}_{\alpha}T_\alpha f_\alpha(z,\omega_\alpha + q_{ij}). \tag{1.20}$$

Уравнения Лакса для этих матриц эквивалентны уравнениям движения для гамильтониана (1.19) при условии $\mathcal{S}^{ii}_{0,0} = \mathrm{const}\ \forall i$.

Эллиптическая $GL(NM)$ модель включает в себя множество других интегрируемых систем. При $N = 1$ эллиптическая модель превращается в спиновый Калоджеро. В случае $\mathrm{rang}(\mathcal{S}) = 1$, эта модель перейдет в систему взаимодействующих интегрируемых волчков [6]. Связь между эллиптической моделью и другими интегрируемыми моделями, наглядно иллюстрирует следующая схема из [14]:



Однако $GL(NM)$ модель обладает всего одной отмеченной точкой $z = 0$. Следующим логичным шагом развития теории было желание рассмотреть обобщение этой модели на случай нескольких отмеченных точек, что мы и делаем в этой работе. В нашей работе мы строим такое обобщение, находим его уравнения движения и строим представление Лакса для этой модели (**секция 2**). Кроме того, описанные выше системы допускают релятивистское обобщение, о котором мы более подробно рассказываем в **секции 3**. Релятивистское обобщение нашей модели, которую мы в дальнейшем называем обобщенной моделью Годена, приведено в **секции 4**.

2 Годеново обобщение нерелятивистской GL(NM) эллиптической модели

Построим модель, которая будет являться обобщением $GL_N \times GL_M$ эллиптической модели (1.16) с несколькими отмеченными точками. Матрица Лакса для такого обобщения также является блочной матрицей размера $NM \times NM$ и выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{i,j=1}^{M} E_{ij} \otimes \mathcal{L}^{ij}(z) \in GL(NM,\mathbb{C}), \quad \mathcal{L}^{ij}(z) \in GL(N,\mathbb{C}), \tag{2.1}$$

напомним, что E_{ij} — стандартный матричный базис в $GL(M,\mathbb{C})$. И каждый блок $N \times N$ матрицы $\mathcal{L}$ принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{ij}(z) = \delta_{ij}(p_i 1_N + \sum_{a=1}^{n} \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a} 1_N E_1(z-z_a) + \sum_{a=1}^{n}\sum_{\alpha\neq 0} \mathcal{S}_{\alpha}^{ii,a} T_\alpha \varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha))+ \\ + (1-\delta_{ij})\sum_{a=1}^{n}\sum_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a} T_\alpha \varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}),\end{aligned} \tag{2.2}$$

где z_a, $a=\overline{1,n}$ - отмеченные точки спектральной кривой. Каждой отмеченной точке теперь соответстсвует своя переменная спина:

$$\mathcal{S}^{ij,a} = \operatorname*{Res}_{z=z_a} \mathcal{L}^{ij}(z) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}). \tag{2.3}$$

Скобки Пуассона для этой модели:

$$\{p_i,p_j\} = \{q_i,q_j\} = 0, \ \{p_i,q_j\} = \delta_{ij}, \tag{2.4}$$

и скобки Пуассона для переменных $\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}$ по-прежнему даются скобками Пуассона-Ли для sin-алгебры (B.6), но при этом скобка не равна нулю только при совпадении отмеченных точек, в которых "сидят" переменные спина:

$$\{\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}, \mathcal{S}_{\beta}^{km,b}\} = \delta_{ab}(\delta_{im}\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha+\beta}^{kj,a} - \delta_{kj}\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\alpha+\beta}^{im,a}). \tag{2.5}$$

Как сразу мы можем видеть, в случае $n=1$ эта матрица Лакса превращается в матрицу Лакса $GL(NM)$ эллиптической модели (1.16).

Для вычисления гамильтонианов нашей обобщенной модели, мы также как для эллиптической модели Годена [5], раскладываем след квадрата матрицы Лакса по базису эллиптических функций:

$$\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^2 = H_0 + \sum_{a=1}^{n} H_{1,a}E_1(z-z_a) + \sum_{a=1}^{n} H_{2,a}E_2(z-z_a). \tag{2.6}$$

Для следа нашей матрицы (2.2) мы получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^2 =& \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a}\mathcal{S}_{0,0}^{ii,b} E_1(z-z_a)E_1(z-z_b) + p_i \sum_{a=1}^{n} \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a} E_1(z-z_a)+ \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n}\sum_{\alpha\neq 0} \mathcal{S}_{\alpha}^{ii,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ii,b}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)\varphi_{-\alpha}(z-z_b,\omega_{-\alpha})+ \\ &+ \frac{1}{2}(1-\delta_{ij})\sum_{a,b=1}^{n}\sum_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ji,b}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_{-\alpha}(z-z_b,\omega_{-\alpha}+q_{ji}),\end{aligned} \tag{2.7}$$

где мы используем тождество (B.5) и опускаем суммирование по i, j для удобства. Применяя (A.19) для второго члена в этом выражении, мы получаем:

$$\frac{1}{2}\sum_{a,b:a\neq b}\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}(E_1^2(z-z_a)+\rho(z_{ab})+2E_1(z_{ab})E_1(z-z_a)-\wp(z-z_a))+\frac{1}{2}\sum_a(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0})^2E_1^2(z-z_a), \quad (2.8)$$

где $z_{ab} = z_a - z_b$. Преобразуя последние два члена в (2.7), мы должны разделить всю сумму на две части $a = b$ и $a \neq b$. Для первой мы используем (A.14), а для второй (B.13). Собирая все слагаемые вместе мы можем выписать наши гамильтонианы:

$$\begin{aligned} H_0 = &\sum_i\frac{p_i^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_i\sum_{a,b:a\neq b}\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}\rho(z_{ab})+\frac{1}{2}\sum_i\sum_{a,b}\sum_{\alpha\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{-\alpha}f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha)+ \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j:i\neq j}\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ji,b}_{-\alpha}f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} H_{1,a} = &\sum_i p_i\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}+\sum_i\sum_{b:b\neq a}\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}E_1(z_{ab})-\sum_i\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{-\alpha}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha)- \\ &-\sum_{i,j:i\neq j}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ji,b}_{-\alpha}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$H_{2,a} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ji,a}_{-\alpha}. \quad (2.11)$$

Как сразу же можно заметить, гамильтониан $H_{2,a}$ является оператором Казимира:

$$\{\sum_{i,j}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ji,a}_{-\alpha},\mathcal{S}^{km,b}_{\beta}\} = 0, \quad \forall\, k,m \in \overline{1,M},\ \beta\in\mathbb{Z}_{\mathbb{N}}\times\mathbb{Z}_{\mathbb{N}},\ b\in\overline{1,n}. \quad (2.12)$$

В тоже время гамильтониан H_0 в случае одной отмеченной точки переходит в гамильтониан $GL(NM)$ эллиптической модели (1.19), а в случае $N = 1$ превращается в первый гамильтониан эллиптической модели Годена (1.7) (см. (A.9)). Гамильтониан $H_{1,a}$ соответственно при $N = 1$ превратиться в (1.8). В случае $M = 1$ оба гамильтониана перейдут в соответствующие гамильтонианы $sl(M)$ модели Годена [12].

2.1 Гамильтониан H_0

Начнем наше рассмотрение с гамильтониана H_0 (2.9). Напомним, что уравнения движения для динамической переменной $\mathcal{A}$, получаются коммутацией гамильтониана и динамической переменной: $\dot{\mathcal{A}} = \{H,\mathcal{A}\}$. Уравнения движения для гамильтониана H_0:

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = \sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ki,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{-\alpha}f'_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ki}), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}^{ij,a}_{\alpha} = &\sum_{b:b\neq a}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0})\rho(z_{ba})+\sum_b\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha-\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})f_\beta(z_{ab},\omega_\beta)+ \\ &+\sum_{k,b}\sum_{\beta}((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})-(1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Мы сразу же можем выписать частные случаи уравнения (2.14), которые мы будем использовать в дальнейшем при доказательстве теоремы:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{S}}^{ii,a}_{\alpha} =&\sum_{b}\sum_{\beta\neq 0}(\kappa_{\alpha,\beta}-\kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta}f_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta})+\\&+\sum_{k:k\neq i}\sum_{b}\sum_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{ki,b}_{\beta}f_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ki})-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{ki,a}_{\alpha-\beta}f_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ik})),\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\dot{\mathcal{S}}^{ii,a}_{0,0}=\sum_{k:k\neq i}\sum_{b}\sum_{\alpha}(\mathcal{S}^{ik,a}_{-\alpha}\mathcal{S}^{ki,b}_{\alpha}f_{\alpha}(z_{ab},\omega_{\alpha}+q_{ki})-\mathcal{S}^{ik,b}_{\alpha}\mathcal{S}^{ki,a}_{-\alpha}f_{\alpha}(z_{ab},\omega_{\alpha}+q_{ik})).\tag{2.16}$$

Как мы можем видеть из (2.16) величины $\sum_a \mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}$ являются интегралами движения, что позволяет нам в дальнейшем зафиксировать их значение.

Мы хотим не только выписать уравнения движения, но и найти их представление Лакса. Рассмотрим матрицу M_0 вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{ij}_0(z)=&\delta_{ij}\sum_{a}\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}1_N\rho(z-z_a)+\delta_{ij}\sum_{a}\sum_{\alpha\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}T_{\alpha}f_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha})+\\&+(1-\delta_{ij})\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}T_{\alpha}f_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ij}).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Имеет место следующая:

Теорема 1 *Уравнения движения* (2.13) *и* (2.14) *- эквивалентны равнению Лакса с дополнительным слагаемым:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(z)=[\mathcal{L}(z),\mathcal{M}(z)]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})E_{ij}\otimes T_{\alpha}f'_{\alpha}(z-z_b,\omega_{\alpha}+q_{ij})\tag{2.18}$$

для матриц (2.2) *и* (2.17)*. При наложенных условиях связи:*

$$\sum_{a=1}^{n}\mathcal{S}^{kk,a}_{0,0}=\mathrm{const},\quad \forall k\in\overline{1,M}\tag{2.19}$$

матрицы (2.2) *и* (2.17) *удовлетворяют уравнению Лакса и таким образом, являются представлением Лакса для системы уравнений* (2.13)-(2.14).

Доказательство:

Для удобства в этом и всех последующих доказательствах мы отдельно рассматриваем диагональную $(i=j)$ и недиагональную $(i\neq j)$ части уравнения (2.18). Дополнительный член мы в дальнейшем обозначаем как $\mathcal{A}$. Начнем с диагонального случая. Для левой части уравнения (2.18) мы имеем:

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dt}\right)_{ii}=\dot{p}_i1_N+\sum_{a}\dot{\mathcal{S}}^{ii,a}_{0,0}1_NE_1(z-z_a)+\sum_{a}\sum_{\alpha\neq 0}\dot{\mathcal{S}}^{ii,a}_{\alpha}T_{\alpha}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}).\tag{2.20}$$

Соответствующая правая часть (2.18):

$$\begin{aligned}[\mathcal{L},\mathcal{M}]_{ii}+\mathcal{A}_{ii}=&\sum_{a,b}\sum_{\alpha\neq 0}\sum_{\beta\neq 0}(\kappa_{\alpha,\beta}-\kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta}T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha})f_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta})+\\&+\sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ki,b}_{\beta}\kappa_{\alpha,\beta}T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ik})f_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+q_{ki})-\\&-\varphi_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+q_{ki})f_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ik})\big).\end{aligned}\tag{2.21}$$

Главным лейтмотивом этого и всех последующих доказательств будет наше желание распутать все произведения эллиптических функций так, чтобы зависимость от спектрального z в каждом слагаемом описывалась лишь одной какой-либо эллиптической функцией. Делается это для того, чтобы, во-первых, сравнивая левые и правые части уравнения Лакса, можно было бы легко получить уравнения движения на наши динамические переменные; а во-вторых, чтобы исключить спектральный параметр из уравнений движения. Основной проблемой, которая будет возникать в наших теоремах, является необходимость отдельно проследить за всеми частями сумм, для которых те или иные тождества на эллиптические функции применять нельзя из-за образования полюсов. Поскольку именно эти преобразования могут вызвать у читателя, незнакомого с темой, сложности, именно их подробное вычисление приводится в данной работе. Вычисление коммутаторов матриц Лакса и сравнение уже преобразованных выражений с уравнениями движения, остается на усмотрение читателя.

В рассматриваемом нами примере диагональной части уравнения (2.18), нам нужно разделить правую часть уравнения Лакса на три части: скалярную по отношению к спектральному параметру, пропорциональную $E_1(z-z_a)$ и пропорциональную $\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)$. Чтобы сделать это, мы должны отдельно рассматривать случай, когда индексы суммирования по $\mathbb{Z}_N\times\mathbb{Z}_N$ равны друг другу с противоположным знаком — иначе при применении, например, тождества (A.12) функции φ_α будут стремится к бесконечности. Первое слагаемое (2.21) в случае $\alpha=-\beta$ равно нулю. Для случая $\alpha\neq-\beta$ мы записываем его в более удобном виде:

$$\sim(1-\delta_{\alpha+\beta})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_\alpha\mathcal{S}^{ii,b}_\beta T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)f_\beta(z-z_b,\omega_\beta)-\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta)f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)\big),\tag{2.22}$$

где мы опустили все суммирования для удобства. Применяя (A.12) мы получаем:

$$\sim(1-\delta_{\alpha+\beta})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_\alpha\mathcal{S}^{ii,b}_\beta T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta})f_\beta(z_{ab},\omega_\beta)-\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_b,\omega_{\alpha+\beta})f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha)\big).$$

Мы используем перестановку индексов ($a\leftrightarrow b$, $\alpha\leftrightarrow\beta$) во второй половине этого слагаемого, чтобы вынести $\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta})$, и затем замену индексов ($\alpha\to\alpha+\beta$, $\beta\to\beta$). В итоге мы получаем:

$$\sum_{a,b}\sum_{\alpha\neq0}\sum_{\beta\neq0}(\kappa_{\alpha,\beta}-\kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{ii,b}_\beta T_\alpha f_\beta(z_{ab},\omega_\beta)\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)\tag{2.23}$$

Заметьте что итоговое суммирование по α не включает в себя $\alpha=0$, из-за отсутствия слагаемого с $\beta=-\alpha$.

Для второго члена в (2.21) мы рассматриваем часть $\beta=-\alpha$ отдельно:

$$\sim\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{ki,b}_{-\alpha}1_N\big(\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})f_\alpha(z_b-z,\omega_\alpha+q_{ik})+\varphi_\alpha(z_b-z,\omega_\alpha+q_{ik})f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})\big).\tag{2.24}$$

Выражение в скобках очевидно эквивалентно:

$$\frac{\partial\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})\varphi_\alpha(z_b-z,\omega_\alpha+q_{ik})}{\partial\omega_\alpha+q_{ik}}.\tag{2.25}$$

Используя (B.13) превращаем это выражение в:

$$f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ik})\big(E_1(z-z_a)-E_1(z-z_b)\big)-f'_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ik}),\tag{2.26}$$

и слагаемое (2.24) принимает вид:

$$\begin{gathered}\sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_\alpha\big(\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{ki,b}_{-\alpha}f_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ki})-\mathcal{S}^{ik,b}_\alpha\mathcal{S}^{ki,a}_{-\alpha}f_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ik})\big)1_NE_1(z-z_a)+\\+\sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_\alpha\mathcal{S}^{ki,a}_\alpha\mathcal{S}^{ik,b}_{-\alpha}1_Nf'_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ki}),\end{gathered}\tag{2.27}$$

где мы использовали нашу возможность менять местами индексы a, b и знак у индеса α.

Случай $\alpha \neq -\beta$ рассматривается также, как случай первого слагаемого. Мы делаем те же самые замены индексов и используем формулу (A.12):

$$\sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_{\alpha\neq 0,\beta}\big(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{ki,b}_{\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ki})-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{ki,a}_{\alpha-\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha) \quad (2.28)$$

Собирая вместе все преобразованные слагаемые (2.23), (2.27)-(2.28) правой части уравнения (2.21), мы сравниваем их с производной матрицы $\mathcal{L}$ по времени (2.20). Легко видеть, что получившееся выражение точно воспроизводит уравнения движения (2.13), (2.16)-(2.15).

Рассмотрим недиагональные блоки уравнения Лакса $i \neq j$. Его левая часть при этом принимает вид:

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dt}\right)_{ij}=\sum_a\sum_\alpha\dot{\mathcal{S}}^{ij,a}_\alpha T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\dot{q}_{ij}\sum_a\sum_\alpha\mathcal{S}^{ij,a}_\alpha T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}), \qquad (2.29)$$

соответствующая правая часть (2.18):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L},\mathcal{M}]_{ij}+\mathcal{A}_{ij}=&\,p_{ij}\sum_a\sum_\alpha\mathcal{S}^{ij,a}_\alpha T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\sum_{a,b}\sum_\alpha\mathcal{S}^{ij,a}_\alpha(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})T_\alpha\big(f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_b)-\\
&-\rho(z-z_b)\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\big)+\\
&+\sum_{a,b}\sum_\alpha\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_\alpha(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_\beta-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_\beta)T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})f_\beta(z-z_b,\omega_\beta)-\\
&-f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta)\big)+\\
&+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{kj,b}_\beta T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})f_\beta(z-z_b,\omega_\beta+q_{kj})-\\
&-f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta+q_{kj})\big)+\\
&+\frac{1}{2}\sum_{a,b}\sum_\alpha\mathcal{S}^{ij,b}_\alpha(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_\alpha f'_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij}).
\end{aligned} \qquad (2.30)$$

Чтобы получить уравнения движния для p_i и $\mathcal{S}^{ij,a}_\alpha$ нам нужно преобразовать третье и четвертое слагаемые с помощью (A.12). Начнём с третьего слагаемого:

$$\begin{aligned}
\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{kj,b}_\beta T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})-\\
-f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ik})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_b,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})\big).
\end{aligned} \qquad (2.31)$$

Используя замену индексов $a \leftrightarrow b$ и $\alpha+\beta \to \alpha$ и изменяя порядок суммирования по k мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\sum_k\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_\beta f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})-(1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_\beta\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha-\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})\big)T_\alpha\\
&\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})-\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_\beta\big(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha-\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha-\beta}\big)T_\alpha f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij})\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}).
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

Для четвертого слагаемого мы делаем те же преобразования и для удобства выделяем часть суммирования, соответствующую $\beta = 0$. Получившееся выражение выглядит как:

$$\begin{gathered}
\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha-\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})f_\beta(z_{ab},\omega_\beta)+\\
+\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
+\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0})T_\alpha f_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}).
\end{gathered}\tag{2.33}$$

Как мы можем видеть, после суммирования (2.32) и (2.33) члены пропорциональные $f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij})$ сокращаются. Последнее, что нам нужно сделать, чтобы получить уравнения движения, это посмотреть, что произойдет, когда мы объединим все члены с $(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})$:

$$\begin{gathered}
\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})T_\alpha\big(f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_b)-\rho(z-z_b)\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})-\\
-f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})+\frac{1}{2}f'_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\big)=\\
=\sum_{a,b:a\neq b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0})T_\alpha\,\rho(z_{ab})\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}),
\end{gathered}$$

де мы использовали (A.17) и (A.20). После всех преобразований для недиагонального случая правой части (2.18) мы получаем:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L},\mathcal{M}]_{ij}+\mathcal{A}_{ij}=&\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha-\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_\alpha f_\beta(z_{ab},\omega_\beta)\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0})T_\alpha\,\rho(z_{ab})\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+p_{ij}\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\sum_{k}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})-\\
&-(1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha-\beta}f_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}).
\end{aligned}\tag{2.34}$$

Сравнивая поведение получившегося выражения по z с левой частью (2.18) мы в итоге получаем уравнения движения для $\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}$ (2.14) и q_i (2.13). ■

2.2 Гамильтониан $H_{1,a}$

Для гамильтониана $H_{1,a}$ мы также ищем уравнения движения, а затем представление Лакса для них. Основным отличием этого случая от случая гамильтониана H_0 является зависимость уравнения Лакса и уравнений движения от индекса a. Эта зависимость не позволяет переставлять индексы суммирования по выделенным точкам также просто, как в предыдущей подсекции.

Напомним, что полученный нами гамильтониан выглядит как:

$$
\begin{aligned}
H_{1,a} = &\sum_i p_i \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a} + \sum_i \sum_{b:b\neq a} \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a}\mathcal{S}_{0,0}^{ii,b} E_1(z_{ab}) - \sum_i \sum_{b:b\neq a} \sum_{\alpha\neq 0} \mathcal{S}_{\alpha}^{ii,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ii,b}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha) - \\
&- \sum_{i,j:i\neq j} \sum_{b:b\neq a} \sum_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ji,b}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha + q_{ij}).
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

Уравнения движения для этого гамильтониана:

$$
\dot{q}_i = \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a}, \quad \dot{p}_i = \sum_{k:k\neq i} \sum_{b:b\neq a} \sum_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}^{ik,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ki,b} f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha + q_{ik}) - \mathcal{S}_{\alpha}^{ki,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ik,b} f_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha + q_{ki}), \tag{2.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{S}}_{\alpha}^{ij,b} = &\delta_{ab} p_{ji} \mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a} + (1-\delta_{ab})\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,b}(\mathcal{S}_{0,0}^{jj,a} - \mathcal{S}_{0,0}^{ii,a})E_1(z_{ab}) + \sum_{c:c\neq a} \delta_{ab}\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}(\mathcal{S}_{0,0}^{jj,c} - \mathcal{S}_{0,0}^{ii,c})E_1(z_{ac}) + \\
&+ \sum_{\beta\neq 0}(1-\delta_{ab})\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ij,b}(\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\beta}^{ii,a} - \kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\beta}^{jj,a})\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta) + \\
&+ \sum_{c:c\neq a} \sum_{\beta\neq 0} \delta_{ab}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ij,a}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\beta}^{jj,c} - \kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\beta}^{ii,c})\varphi_\beta(z_{ac},\omega_\beta) + \\
&+ \sum_k \sum_\beta (1-\delta_{ab})\big((1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{kj,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{ik}) - \\
&- (1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\beta}^{kj,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{kj})\big) + \\
&+ \sum_k \sum_{c:c\neq a} \sum_\beta \delta_{ab}((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ik,a}\mathcal{S}_{\beta}^{kj,c}\varphi_\beta(z_{ac},\omega_\beta + q_{kj}) - \\
&- (1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{kj,a}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,c}\varphi_\beta(z_{ac},\omega_\beta + q_{ik})).
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Частные случаи уравнения движения для $\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,b}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{S}}_{\alpha}^{ii,b} = &\sum_{\beta\neq 0}(\kappa_{\beta,\alpha} - \kappa_{\alpha,\beta})\big((1-\delta_{ab})\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ii,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ii,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta) - \sum_{c:c\neq a}\delta_{ab}\mathcal{S}_{\alpha+\beta}^{ii,a}\mathcal{S}_{-\beta}^{ii,c}\varphi_\beta(z_{ca},\omega_\beta)\big) + \\
&+ \sum_{k:k\neq i}\sum_\beta (1-\delta_{ab})(\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ki,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{ik}) - \kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ki,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{ki})) + \\
&+ \sum_{k:k\neq i}\sum_\beta\sum_{c:c\neq a}\delta_{ab}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha+\beta}^{ki,a}\mathcal{S}_{-\beta}^{ik,c}\varphi_\beta(z_{ca},\omega_\beta + q_{ki}) - \kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\alpha+\beta}^{ik,a}\mathcal{S}_{-\beta}^{ki,c}\varphi_\beta(z_{ca},\omega_\beta + q_{ik})),
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{S}}_{0,0}^{ii,b} = &\sum_{k:k\neq i}\sum_\beta (1-\delta_{ab})(\mathcal{S}_{-\beta}^{ki,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{ik}) - \mathcal{S}_{-\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ki,a}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta + q_{ki})) + \\
&+ \sum_{k:k\neq i}\sum_{c:c\neq a}\sum_\beta \delta_{ab}(\mathcal{S}_{\beta}^{ki,a}\mathcal{S}_{-\beta}^{ik,c}\varphi_\beta(z_{ca},\omega_\beta + q_{ki}) - \mathcal{S}_{\beta}^{ik,a}\mathcal{S}_{-\beta}^{ki,c}\varphi_\beta(z_{ca},\omega_\beta + q_{ik})).
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

Рассмотрим матрицу Лакса $M_{1,a}$, зависящую от индекса a:

$$
\mathcal{M}_{1,a}(z) = \sum_{i,j=1}^{M} E_{ij}\otimes \mathcal{M}_{1,a}^{ij}(z), \tag{2.40}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1,a}^{ij}(z) = &- \delta_{ij}\mathcal{S}_{0,0}^{ii,a} 1_N E_1(z-z_a) - \delta_{ij}\sum_{\alpha\neq 0}\mathcal{S}_{\alpha}^{ii,a} T_\alpha \varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha) - \\
&- (1-\delta_{ij})\sum_\alpha \mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a} T_\alpha \varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha + q_{ij}).
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Имеет место следующая:

Теорема 2 *Уравнения движения* (2.36) *и* (2.37) *- эквивалентны уравнению Лакса с дополнительным слагаемым:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(z) = [\mathcal{L}(z), \mathcal{M}_{1,a}(z)] + \sum_{i,j}\sum_{b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}_{\alpha}^{ij,a}(\mathcal{S}_{0,0}^{ii,b} - \mathcal{S}_{0,0}^{jj,b})E_{ij}\otimes T_{\alpha}f_{\alpha}(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ij}) \tag{2.42}$$

для матриц (2.2) *и* (2.40). *При наложенных условиях связи:*

$$\sum_{a=1}^{n}\mathcal{S}_{0,0}^{kk,a} = \mathrm{const}, \quad \forall k \in \overline{1, M} \tag{2.43}$$

матрицы (2.2) *и* (2.40) *удовлетворяют уравнению Лакса и таким образом, являются представлением Лакса для системы уравнений* (2.36)-(2.37).
<u>*Доказательство:*</u>
Как и в предыдущем доказательстве, мы отдельно рассматриваем уравнения, получающиеся для диагональных и недиагональных элементов $\dot{L}$. В дальнейшем для удобства мы обозначаем дополнительное слагаемое в (2.42) как $\mathcal{B}_{ij}$. Начнем с диагонального случая $i = j$. Правая часть уравнения (2.42) при $i = j$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}, \mathcal{M}]_{ii} + \mathcal{B}_{ii} = &\sum_{b}\sum_{\substack{\alpha\neq 0\\ \beta\neq 0}}(\kappa_{\alpha,\beta} - \kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}_{\alpha}^{ii,a}\mathcal{S}_{\beta}^{ii,b}T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha)\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta) + \\
&+ \sum_{k:k\neq i}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha}^{ik,a}\mathcal{S}_{\beta}^{ki,b}\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ik})\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta + q_{ki}) - \\
&-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\alpha}^{ki,a}\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ki})\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta + q_{ik}))T_{\alpha+\beta}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Преобразуем это выражение так, чтобы распутать его относительно зависимости по z и разложить по базису эллиптических функций. Обратим внимание, на то что первое слагаемое зануляется как при $b = a$, так и при $\beta = -\alpha$, что позволяет безнаказанно применить тождество Фея (B.11) к этому выражению:

$$\begin{aligned}
&\sum_{b:b\neq a}\sum_{\substack{\alpha\neq 0\\ \beta\neq 0}}(\kappa_{\alpha,\beta} - \kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ii,a}\mathcal{S}_{\beta}^{ii,b}T_\alpha\varphi_\beta(z_{ab}, \omega_\beta)\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha) + \\
&+ \sum_{b:b\neq a}\sum_{\substack{\alpha\neq 0\\ \beta\neq 0}}(\kappa_{\beta,\alpha} - \kappa_{\alpha,\beta})\mathcal{S}_{\beta}^{ii,a}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ii,b}T_\alpha\varphi_\beta(z_{ba}, \omega_\beta)\varphi_\alpha(z - z_b, \omega_\alpha).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Второе слагаемое в (2.44) однако не зануляется при $\beta = -\alpha$ и мы преобразовываем эту часть суммы отдельно с помощью (B.13). Получаем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k:k\neq i}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}_{\alpha}^{ik,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ki,b}1_N f_\alpha(z_{ba}, \omega_\alpha + q_{ik}) - \mathcal{S}_{\alpha}^{ik,b}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ki,a}1_N f_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha + q_{ik}) + \\
&+\big(\mathcal{S}_{\alpha}^{ik,a}\mathcal{S}_{-\alpha}^{ki,b}\varphi_\alpha(z_{ba}, \omega_\alpha + q_{ik}) - \mathcal{S}_{-\alpha}^{ik,b}\mathcal{S}_{\alpha}^{ki,a}\varphi_\alpha(z_{ba}, \omega_\alpha + q_{ik})\big)1_N(E_1(z - z_b) - E_1(z - z_a)).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

К оставшейся части слагаемого мы применяем тождество Фея и получаем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha\neq 0\\ \beta}}(\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,a}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ki,b}\varphi_\beta(z_{ba}, \omega_\beta + q_{ik}) - \kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\beta}^{ki,a}\varphi_\beta(z_{ba}, \omega_\beta + q_{ki}))T_\alpha\varphi_\alpha(z - z_b, \omega_\alpha) + \\
&+(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ik,a}\mathcal{S}_{\beta}^{ki,b}\varphi_\beta(z_{ab}, \omega_\beta + q_{ki}) - \kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}_{\beta}^{ik,b}\mathcal{S}_{\alpha-\beta}^{ki,a}\varphi_\beta(z_{ab}, \omega_\beta + q_{ik}))T_\alpha\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Собирая все слагаемые (2.45)-(2.47) вместе и сравнивая получившееся выражение с левой частью уравнения Лакса (2.20), мы получаем уравнения движения для импульса (2.36) и частные случаи уравнения движения для динамической переменной спина (2.38)-(2.39).

Перейдем к рассмотрению недиагонального случая $i \neq j$. Левая часть (2.42) в таком случае принимает вид:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L},\mathcal{M}]_{ij}+\mathcal{B}_{ij} = p_{ji}\sum_{\alpha}&\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}T_{\alpha}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\sum_b\sum_\alpha \mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_a)+\\
&+\sum_b\sum_\alpha \mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_b)+\\
&+\sum_b\sum_\alpha\sum_{\beta\neq0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta)\\
&+\sum_b\sum_{\alpha\neq0}\sum_{\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha)\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta+q_{ij})\\
&+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\big(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ik})\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta+q_{kj})-\\
&-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha}\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{kj})\varphi_\beta(z-z_b,\omega_\beta+q_{ik})\big)T_{\alpha+\beta}+\mathcal{B}_{ij}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Первое слагаемое в этом предложении мы оставляем без изменений, так как его зависимость от z уже явно видна. Следующие два слагаемых мы преобразуем, используя выражения:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_a) =&\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ij})-\\
&-\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z_{ab})+f_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij}),
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z-z_b) =&\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z_{ab})+f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

которые просто являются частным случаем выражения (B.13). Обратите внимание, что эти слагаемые сокращают друг друга при $b = a$, что делает эти преобразования законными. Сумма, возникающая при функции $f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})$ сокращается с $\mathcal{B}_{ij}$.
К четвертому и пятому слагаемым, которые также сокращаются при $b = a$, мы применяем тождество Фэя и получаем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{b:b\neq a}\sum_\alpha\sum_{\beta\neq0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta)\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
&\qquad+\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_b,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})\big)+\\
&+\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha\neq0}\sum_{\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\big(\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha)\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
&\qquad+\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})\big).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Для последнего слагаемого в (2.48) мы также пользуемся тождеством Фэя и преобразуем сумму по k так, чтобы учитывались все слагаемые, не приводящие к образованию полюсов:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})-\\
&-(1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha-\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})-\\
&-\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
&+\sum_{k}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,a}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\alpha-\beta}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta+q_{ik})-\\
&-(1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,b}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\beta}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta+q_{kj})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})-\\
&-\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha+q_{ij})\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}).
\end{aligned}\tag{2.52}$$

В нашем выражении появилось два новых члена в которых отсутствует суммирование по k. После того как мы сложим все части нашего уравнения вместе (2.49)-(2.52), мы увидим, что эти члены сократятся с слагаемыми пропорциональными произведениям функций φ_α в (2.49)-(2.50) и вторыми половинами слагаемых в (2.51). Итоговое выражение для правой части (2.42) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&p_{ji}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\sum_{b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z_{ab})+\\
&+\sum_{b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}(\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0})T_\alpha\big(\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})E_1(z_{ab})-f_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij})\big)+\\
&+\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta)\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
&+\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha\neq0}\sum_{\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z_{ba},\omega_\alpha)\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij})+\\
&+\sum_{k}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj})\\
&-(1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha-\beta}\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij})+\\
&+\sum_{k}\sum_{b:b\neq a}\sum_{\alpha,\beta}\big((1-\delta_{ik})\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,a}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,b}_{\alpha-\beta}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta+q_{ik})-\\
&-(1-\delta_{kj})\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,b}_{\alpha-\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\beta}\varphi_\beta(z_{ba},\omega_\beta+q_{kj})\big)T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_b,\omega_\alpha+q_{ij}),
\end{aligned}\tag{2.53}$$

сравнивая то что мы получили с (2.29) мы немедленно получаем уравнения движения для q_i (2.36) и $\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}$ (2.37). Обратите внимание, что в недиагональной части доказательства нам не пришлось рассматривать случаи $\beta=-\alpha$ отдельно, поскольку q_{ij} не давало занулится эллиптическим функциям. ■

3 Релятивистские интегрируемые модели

В этой секции мы рассматриваем релятивистские обобщения интегрируемых моделей, описанных во введении.

Спиновая модель Руйсенаарса-Шнайдера. Релятивисткое обобщение модели Калоджеро-Мозера было предложено Руйсенаарсом в [15]. А пара Лакса релятивистской деформации для спинового Калоджеро-Мозера [10] была предложена Кричевером и Забродиным в [16]:

$$\begin{gathered} L_{ij}(z) = S_{ij}\phi(z, q_{ij} + \eta), \quad i, j = \overline{1, M}, \quad \operatorname*{Res}_{z=0} L(z) = S \ \in \mathrm{Mat}(M, \mathbb{C}) \\ M_{ij}(z) = -\delta_{ij}S_{ii}(E_1(z) + E_1(\eta)) - (1 - \delta_{ij})S_{ij}\phi(z, q_{ij}), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где η — релятивистский параметр. Взятие нерелятивистского предела соответствует $\eta \to 0$ и одновременному перемаштабированию переменной времени $t \to t/\eta$.

Подчеркнем, что пуассоново описание эллиптической модели спинового Руйсенаарса-Шнайдера к настоящему времени не известно[1]. Это означает, что мы не можем найти уравнения движения этой модели через скобку Пуассона динамической переменной с гамильтонианом, а также что r-матричная структура для этой модели еще не была построена. Поэтому уравнения движения этой модели и всех последующих релятивистских моделей, которые мы обсуждаем, получаются напрямую из уравнения Лакса.

Уравнения движения, которые получаются из уравнения Лакса для матриц (3.1) при условии $\dot{q}_i = S_{ii}$, имеют вид:

$$\begin{gathered} \dot{S}_{ii} = \sum_{k:k\neq i} S_{ik}S_{ki}(2E_1(q_{ik}) - E_1(q_{ik} + \eta) - E_1(q_{ik} - \eta)) \\ \dot{S}_{ij} = \sum_{k:k\neq j} S_{ik}S_{kj}(E_1(q_{kj} + \eta) - E_1(q_{kj})) - \sum_{k:k\neq i} S_{ik}S_{kj}(E_1(q_{ik} + \eta) - E_1(q_{ik})). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Взяв нерелятивистский предел этих выражений, мы получим уравнения движения спиновой модели эллиптического Калоджеро.

Релятивистские волчки. Релятивистское обобщение есть и у $GL(N)$ модели эллиптических волчков [13,19,20]. Представление Лакса для этого обобщения записывается следующим образом:

$$L(z) = \sum_{\alpha} S_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + \eta), \quad M(z) = -\sum_{\alpha\neq 0} S_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha). \tag{3.3}$$

Уравнения движения также принимают характерный для волчков вид:

$$\dot{S} = [S, J^\eta(S)], \tag{3.4}$$

где J^η — релятивистский аналог тензора инерции (1.14):

$$J^\eta(S) = \sum_{\alpha\neq 0} S_\alpha T_\alpha \big(E_1(\omega_\alpha + \eta) - E_1(\omega_\alpha)\big). \tag{3.5}$$

Вычислим нерялитявистский предел этих уравнений, для этого разложим оператор инерции в ряд по η. Так как $J^0 = 0$, получаем:

$$J^\eta(S) = \eta J(S) + \frac{\eta^2}{2}\partial J(S) + O(\eta^3), \tag{3.6}$$

где производная берется по внутреннему аргументу эллиптических функций. Поскольку в левой части уравнений движения стоит производная по времени, после перемаштобирования

[1] Для рационального [17] и для тригонометрического [18] слачая такое описание существует.

$t \to t/\eta$, в нерелятивистские уравнения движения войдет только первый член ряда. Используя (A.4), мы видим, что он равен:

$$J(S) = -\sum_{\alpha\neq 0} S_\alpha T_\alpha E_2(\omega_\alpha). \tag{3.7}$$

Что в точности дает уравнения движения для нерелятивистского волчка (1.14).

Релятивистское обобщение $GL(NM)$ модели. В статье [19] было предложено $GL(NM)$ обобщение спиновой модели Руйсенаарса-Шнайдера, чьи уравнения движения в нерелятивистском пределе переходят в уже описанную выше эллиптическую $GL(NM)$ модель.

Матрица Лакса этой модели также является блочной, размера $NM \times NM$. ij-ый блок такой матрицы принимает вид:

$$\mathcal{L}^{ij}(z) = \sum_\alpha \mathcal{S}^{ij}_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + q_{ij} + \eta). \tag{3.8}$$

И ij блок сопутствующей $\mathcal{M}$-матрицы:

$$\mathcal{M}^{ij} = -\delta_{ij}\Big(\mathcal{S}^{ii}_{0,0}T_0(E_1(z)+E_1(\eta)) - \sum_{\alpha:\alpha\neq 0} \mathcal{S}^{ii}_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z,\omega_\alpha)\Big) - (1-\delta_{ij})\sum_\alpha \mathcal{S}^{ij}_\alpha T_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + q_{ij}). \tag{3.9}$$

Для удобного описания уравнений движения, получающихся из уравнения Лакса для этих матриц, нам нужно ввести следующее обобщение тензора инерции (3.5):

$$J^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij}) = \sum_\alpha \mathcal{S}^{ij}_\alpha T_\alpha \big(E_1(\omega_\alpha + q_{ij} + \eta) - E_1(\omega_\alpha + q_{ij})\big). \tag{3.10}$$

Тогда, при условии $\dot{q}_i = \mathcal{S}^{ii}_{0,0}$, уравнение Лакса эквивалентно [19]:

$$\dot{\mathcal{S}}^{ii} = [\mathcal{S}^{ii}, J^\eta(\mathcal{S}^{ii})] + \sum_{k:k\neq i} (\mathcal{S}^{ik} J^{\eta, q_{ki}}(\mathcal{S}^{ki}) - J^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik})\mathcal{S}^{ki}), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}^{ij} &= \mathcal{S}^{ij} J^\eta(\mathcal{S}^{jj}) - J^\eta(\mathcal{S}^{ii})\mathcal{S}^{ij} + \mathcal{S}^{ii} J^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij}) - J^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij})\mathcal{S}^{jj} + \\ &+ \sum_{k:k\neq i,j} (\mathcal{S}^{ik} J^{\eta, q_{kj}}(\mathcal{S}^{kj}) - J^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik})\mathcal{S}^{kj}), \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

При $N = 1$ матрицы Лакса и уравнения движения этой модели перейдут в матрицы Лакса и уравнения движения (3.1)-(3.2). При $M = 1$ эта система превратится в модель релятивистского эллиптического волчка (3.3) с той разницей, что в матрице $\mathcal{M}$ появится лишнее слагаемое. Впрочем, это слагаемое пропорционально единичной матрице и потому не влияет на уравнения движения. В случае $\mathrm{rk}(\mathcal{S}) = 1$ эта система превратится в релятивистскую версию модель интегрируемых взаимодействующих волчков. Нерелятивистский передел этой модели даст $GL(NM)$ эллиптическую модель. Подробности см. в [19].

4 Годеново обобщение релятивистской GL(NM) эллиптической модели

Конструируя релятивистскую деформацию обобщенной модели Годена, мы ориентируемся на представление Лакса (3.8) для релятивистской $GL(NM)$ модели. Обобщая матрицу $\mathcal{L}(z)$

на случай нескольких отмеченных точек, мы получаем:

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{i,j=1}^{M} E_{ij} \otimes \mathcal{L}^{ij}(z) \in \mathrm{Mat}(NM, \mathbb{C}), \quad \mathcal{L}^{ij}(z) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}). \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}^{ij}(z) = \sum_{\alpha} \sum_{a=1}^{n} T_\alpha \mathcal{S}_\alpha^{ij,a} \varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ij} + \eta), \quad q_{ij} = q_i - q_j, \quad \omega_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}. \tag{4.2}$$

Так же как и в нерелятивистском случае, матрица Лакса имеет полюс первого порядка в точках z_a, и её вычет в этих точках равен:

$$\mathcal{S}^{ij,a} = \operatorname*{Res}_{z=z_a} \mathcal{L} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}). \tag{4.3}$$

Блок i, j парной матрицы $\mathcal{M}$ принимает вид:

$$\mathcal{M}^{ii}(z) = -\sum_{a=1}^{n} T_0 \mathcal{S}_0^{ii,a}(E_1(z - z_a) + E_1(\eta)) - \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{a=1}^{n} T_\alpha \mathcal{S}_\alpha^{ii,a} \varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{M}^{ij}(z) = -\sum_{\alpha} \sum_{a=1}^{n} T_\alpha \mathcal{S}_\alpha^{ij,a} \varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ij}), \quad i \neq j. \tag{4.5}$$

Для того чтобы упростить запись уравнений движения мы будем использовать определения релятивистского тензора инерции (3.5) и (3.10). Кроме того мы введем два дополнительных оператора, зависящих от точки z_a и действующих на матрицу $\mathcal{S}^{ij,b}$ $(a \neq b)$:

$$\widetilde{J}_a^{\eta}(\mathcal{S}^{ij,b}) = \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}_\alpha^{ij,b} T_\alpha (\varphi_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha + \eta) - \varphi_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha)), \tag{4.6}$$

$$\widetilde{J}_a^{\eta, q_{mn}}(\mathcal{S}^{ij,b}) = \sum_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha^{ij,b} T_\alpha (\varphi_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha + q_{mn} + \eta) - \varphi_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha + q_{mn})). \tag{4.7}$$

В этих обозначениях и при условии (4.11) уравнения движения для этой модели, как будет показано ниже, принимают вид:

$$\begin{gathered}
\dot{\mathcal{S}}^{ij,a} = \mathcal{S}^{ij,a} J^{\eta}(\mathcal{S}^{jj,a}) - J^{\eta}(\mathcal{S}^{ii,a})\mathcal{S}^{ij,a} + \mathcal{S}^{ii,a} J^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij,a}) - J^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij,a})\mathcal{S}^{jj,a} + \\
+ \sum_{b: b \neq a} \mathcal{S}^{ij,a}(\mathcal{S}_{0,0}^{ii,b} - \mathcal{S}_{0,0}^{jj,b})(E_1(\eta) + E_1(z_{ab}) - \phi(z_{ab}, \eta) + \\
+ \sum_{b: b \neq a} (\mathcal{S}^{ij,a} \widetilde{J}_a^{\eta}(\mathcal{S}^{jj,b}) - \widetilde{J}_a^{\eta}(\mathcal{S}^{ii,b})\mathcal{S}^{ij,a}) + \sum_{b: b \neq a} (\mathcal{S}^{ii,a} \widetilde{J}_a^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij,b}) - \widetilde{J}_a^{\eta, q_{ij}}(\mathcal{S}^{ij,b})\mathcal{S}^{jj,a}) + \\
+ \sum_{k: k \neq i,j} \Big(\mathcal{S}^{ik,a} J^{\eta, q_{kj}}(\mathcal{S}^{kj,a}) - J^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik,a})\mathcal{S}^{kj,a} + \sum_{b: b \neq a} (\mathcal{S}^{ik,a} \widetilde{J}_a^{\eta, q_{kj}}(\mathcal{S}^{kj,b}) - \widetilde{J}_a^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik,b})\mathcal{S}^{kj,a})\Big).
\end{gathered} \tag{4.8}$$

В отличие от предыдущих релятивистских моделей волчков, не все слагаеме в уравнениях движения выражаются через тензора инерции. В диагональном случае уравнения принимают вид:

$$\begin{gathered}
\dot{\mathcal{S}}^{ii,a} = \Big[\mathcal{S}^{ii,a}, J^{\eta}(\mathcal{S}^{ii,a})\Big] + \sum_{k: k \neq i} (\mathcal{S}^{ik,a} J^{\eta, q_{ki}}(\mathcal{S}^{ki,a}) - J^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik,a})\mathcal{S}^{ki,a}) + \\
+ \sum_{b: b \neq a} \Big[\mathcal{S}^{ii,a}, \widetilde{J}_a^{\eta}(\mathcal{S}^{ii,b})\Big] + \sum_{k: k \neq i} \sum_{b: b \neq a} (\mathcal{S}^{ik,a} \widetilde{J}_a^{\eta, q_{ki}}(\mathcal{S}^{ki,b}) - \widetilde{J}_a^{\eta, q_{ik}}(\mathcal{S}^{ik,b})\mathcal{S}^{ki,a}).
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Эволюция переменной q_i описывается условиями связи, наложеными на модель (4.11). Мы выбираем их в таком виде, основываясь на условиях связи для релятивистской $GL(NM)$ модели.

Имеет место следующая:

Теорема 3 *Уравнения движения* (4.8) *и* (4.9) *- эквивалентны уравнению Лакса с дополнительным слагаемым:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(z) = [\mathcal{L}(z), \mathcal{M}(z)] + \sum_{i,j}\sum_a\sum_\alpha \mathcal{S}^{ij,a}_\alpha(\mu_i - \mu_j)E_{ij}\otimes T_\alpha f_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ij} + \eta) \qquad (4.10)$$

для матриц (4.2) *и* (4.4)-(4.5)*, где:*

$$\mu_i = \dot{q}_i - \sum_{a=1}^{n}\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}, \quad i = 1, \ldots, M. \qquad (4.11)$$

При наложенных условиях связи: $\mu_i = const$; матрицы (4.2) *и* (4.4)-(4.5) *удовлетворяют уравнению Лакса и таким образом, являются представлением Лакса для системы уравнений* (4.8) *и* (4.9).

Доказательство:

Начнем с диагональной части (4.10). Дополнительное слагаемое в (4.10) мы далее обозначаем C_{ij}, и опускаем его в диагональном случае, поскольку оно зануляется при $i = j$. Левая часть уравнения Лакса принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^{ii}(z) = \sum_a\sum_\alpha T_\alpha\dot{\mathcal{S}}^{ii,a}_\alpha\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + \eta), \qquad (4.12)$$

и соответствующая правая часть:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}, \mathcal{M}]_{ii} = &\sum_{a,b}\sum_{\alpha\neq 0}\sum_\beta(\kappa_{\alpha,\beta} - \kappa_{\beta,\alpha})\mathcal{S}^{ii,a}_\alpha\mathcal{S}^{ii,b}_\beta T_{\alpha+\beta}\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha)\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta + \eta)+ \\
&+\sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{ki,b}_\beta T_{\alpha+\beta}(\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ik})\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta + q_{ki} + \eta)- \\
&-\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha + q_{ik} + \eta)\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta + q_{ki})).
\end{aligned} \qquad (4.13)$$

При применении формулы Фэя к первому слагаемому, полюса в функции φ могут возникнуть при $a = b$ и при $\beta = -\alpha$, однако в последнем случае сама сумма занулится. Во втором слагаемом полюса возникают только при совпадении отмеченных точек. Поэтому мы отдельно рассматриваем только случай $a = b$. Если мы трижды применим (B.12) к (4.13) предполагая что a равно b, мы получим:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}, \mathcal{M}]^{ii}_{a=b} = &\sum_a\sum_\alpha\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_\alpha\mathcal{S}^{ii,a}_\beta T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z - z_a, \omega_{\alpha+\beta} + \eta)(E_1(\omega_\beta + \eta) - E_1(\omega_\beta))- \\
&-\sum_a\sum_{\beta\neq 0}\sum_\alpha\mathcal{S}^{ii,a}_\alpha\mathcal{S}^{ii,a}_\beta T_\beta T_\alpha\varphi_{\alpha+\beta}(z - z_a, \omega_{\alpha+\beta} + \eta)(E_1(\omega_\beta + \eta) - E_1(\omega_\beta))+ \\
&+\sum_{k:k\neq i}\sum_a\sum_{\alpha,\beta}\big(\mathcal{S}^{ik,a}_\alpha\mathcal{S}^{ki,a}_\beta T_\alpha T_\beta(E_1(\omega_\beta + q_{ki} + \eta) - E_1(\omega_\beta + q_{ki}))- \\
&-\mathcal{S}^{ik,a}_\beta\mathcal{S}^{ki,a}_\alpha T_\beta T_\alpha(E_1(\omega_\beta + q_{ik} + \eta) - E_1(\omega_\beta + q_{ik}))\big)\varphi_{\alpha+\beta}(z - z_a, \omega_{\alpha+\beta} + \eta),
\end{aligned} \qquad (4.14)$$

что очевидно является первыми двумя слагаемыми (4.9). При преобразовании первого слагаемого нужно внимательно следить за тем, какие значения пробегает индексы из $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$. Не смотря на то что в первом слагаемом в (4.13), β пробегает все доступные значения в $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$, при $\beta = 0$ все слагамое все равно зануляется. Этот факт позволяет нам спокойно выполнить все преобразования, а потом, ввиду того, что слагаемые с $\alpha = 0$ в (4.14) также сокращают друг друга, снова вернуть суммирование по всем α. Такие осложнения, связанные с суммированием по α, β будут и дальше возникать по ходу доказательства, но их описание мы приводим только здесь.

Рассмотрим случай $a \neq b$. Применяя (B.10) к последней сумме в (4.13), мы получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{k:k\neq i}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha,\beta}\big(\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ki,b}_{\beta}T_{\alpha}T_{\beta}(\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ki}+\eta)-\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ki}))-\\-\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{ki,a}_{\alpha}T_{\beta}T_{\alpha}(\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ik}+\eta)-\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+q_{ik}))\big)\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+\eta),\end{gathered}\tag{4.15}$$

что по сути является последней суммой в (4.9).

Для первого слагаемого в (4.13) случай $a \neq b$ аналогичен рассмотренному выше случаю одинаковых отмеченных точек. Мы делаем те же преобразования относительно всех индексов, но используем (B.10) вместо (B.12):

$$\begin{gathered}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta}T_{\alpha}T_{\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+\eta)(\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+\eta)-\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}))-\\-\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta}T_{\beta}T_{\alpha}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+\eta)(\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta}+\eta)-\varphi_{\beta}(z_{ab},\omega_{\beta})).\end{gathered}\tag{4.16}$$

Эта сумма, после сравнения с левой частью уравнения Лакса дает третье слагаемое в (4.9) — коммутатор обобщенного тензора инерции со спином. Собирая все преобразованные нами слагаемые вместе (4.14) - (4.16), и сравнивая их с $d\mathcal{L}/dt$, мы получаем уравнение движения для диагональной части спина (4.9).

Перейдем к случаю $i \neq j$. Левая часть уравнения Лакса при таком условии принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^{ij}(z)=\sum_{a}\sum_{\alpha}\dot{\mathcal{S}}^{ij,a}_{\alpha}T_{\alpha}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ij}+\eta)+\dot{q}_{ij}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}T_{\alpha}f_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ij}+\eta).\tag{4.17}$$

Для правой части уравнения Лакса с дополнительным слагаемым (которое не зануляется в недиагональном случае) мы получаем:

$$\begin{aligned}[\mathcal{L},\mathcal{M}]_{ij}+C_{ij}=&\sum_{a,b}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_{\alpha}\varphi_{\alpha}(z-z_b,\omega_{\alpha}+q_{ij}+\eta)(E_1(z-z_a)+E_1(\eta))\\&+\sum_{a,b}\sum_{\substack{\alpha\neq 0\\\beta}}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha})\varphi_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+q_{ij}+\eta)\\&+\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,b}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ij})\varphi_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+\eta)\\&+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{a,b}\sum_{\alpha,\beta}T_{\alpha}T_{\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}(\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ik})\varphi_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+q_{kj}+\eta)\\&-\varphi_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ik}+\eta)\varphi_{\beta}(z-z_b,\omega_{\beta}+q_{kj}))\\&+\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mu_i-\mu_j)T_{\alpha}f_{\alpha}(z-z_a,\omega_{\alpha}+q_{ij}+\eta).\end{aligned}\tag{4.18}$$

В суммах включающих в себя суммирование по β (второе, третье и четвертое слагаемые), при применении формулы Фэя, так же как и в диагональном случае, могут возникать полюса. Поэтому мы снова будем отдельно рассматривать два случая: $a = b$ и $a \neq b$. При условии $a = b$ слагаемое с суммированием по k в (4.18) принимает форму:

$$\begin{gathered}\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,a}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+q_{kj}+\eta)-\\ -E_1(\omega_\beta+q_{kj})+E_1(\omega_\alpha+q_{ik})-E_1(\omega_\alpha+q_{ik}+\eta)).\end{gathered}\tag{4.19}$$

Для остальных слагаемых (кроме дополнительного члена) при $a = b$ после применения формулы (B.12) и некоторых перестановок внутри сумм, мы получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{a}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,a}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,a}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+\eta)-E_1(\omega_\beta))\\ +\sum_{a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,a}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+q_{ij}+\eta)-E_1(\omega_\beta+q_{ij}))\\ +\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)(E_1(z-z_a+\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)-E_1(\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)).\end{gathered}$$

Последняя сумма появилась в результате суммы первого слагаемого в (4.18) и членов, появляющихся после преобразования интервалов суммирования для остальных слагаемых. Воспользуемся соотношением (B.9) для функции f. Тогда это выражение преобразуется как:

$$\begin{gathered}\sum_{a}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,a}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,a}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+\eta)-E_1(\omega_\beta))\\ +\sum_{a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,a}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+q_{ij}+\eta)-E_1(\omega_\beta+q_{ij}))\\ +\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta).\end{gathered}$$

Собирая все наши члены вместе, мы видим, что выражение для недиагональных блоков ij коммутатора матриц Лакса при $a = b$ принимает вид:

$$\begin{aligned}&[\mathcal{L},\mathcal{M}]^{ij}_{a=b}=\sum_{a}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,a}_{0,0})T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)+\\ &+\sum_{a}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,a}_{\beta}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\alpha})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(E_1(\omega_\beta+q_{ij}+\eta)-\\ &-E_1(\omega_\beta+q_{ij}))+\sum_{a}\sum_{\alpha;\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{jj,a}_{\beta}-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ii,a}_{\beta})T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)\cdot\\ &\cdot(E_1(\omega_\beta+\eta)-E_1(\omega_\beta))+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{a}\sum_{\alpha,\beta}\big(\kappa_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,a}_{\beta}(E_1(\omega_\beta+q_{kj}+\eta)-E_1(\omega_\beta+q_{kj}))\\ &-\kappa_{\beta,\alpha}\mathcal{S}^{ik,a}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha}(E_1(\omega_\beta+q_{ik}+\eta)-E_1(\omega_\beta+q_{ik}))\big)T_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Первая сумма в этом выражении, как мы в итоге увидим, сокращается с последним слагемым в (4.17), а остальные слагаемые дадут в точности все члены пропорциональные тензорам инерции J^η и $J^{\eta,q_{ij}}$ в (4.8).

В случае a не равном b для уравнения Лакса (4.18) мы делаем все те же самые вычисления, но используем (B.9) вместо (B.12). Член с суммированием по k принимает вид:

$$\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj}+\eta)-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj}))+$$
$$+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{\alpha,\beta}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\mathcal{S}^{ik,b}_{\beta}\mathcal{S}^{kj,a}_{\alpha}T_\beta T_\alpha\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik})-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ik}+\eta)).$$

Для остальных членов в (4.18) проводим точно такие же преобразования, однако возникают новые слагаемые из-за реорганизации сумм по внутреннему индексу блока (напомним, что в тензорах J^η и $\widetilde{J}^\eta_a$ мы суммируем по $\alpha\neq 0$, а в $J^{\eta,q_{ij}}$ и $\widetilde{J}^{\eta,q_{ij}}_a$ по $\alpha\in\mathbb{Z}_N$):

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)(E_1(\eta)+E_1(z_{ab})-\phi(z_{ab},\eta))+\\+\sum_{\alpha}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})T_\alpha f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta),\end{gathered}\tag{4.21}$$

где мы опять воспользовались (B.9). Если мы возьмем последнее слагаемое, сложим его с соответствующим слагаемым, пропорциональным $f_\alpha(z-z_a)$ в (4.20), мы получим:

$$\sum_{\alpha}\sum_{a,b}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})f_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta).\tag{4.22}$$

Вспомнив определение коэффициентов μ_i (4.11), мы увидим, что это слагаемое вместе со вторым членом в (4.17) полностью сокращает дополнительное слагаемое $\mathcal{C}_{ij}$. Сумма оставшихся слагаемых случая $a\neq b$ выглядит как:

$$\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha\neq 0}\sum_{\beta}\mathcal{S}^{ii,b}_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha)-\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+\eta))+$$
$$+\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq 0}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{jj,b}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+\eta)-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta))+$$
$$+\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ii,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,b}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij}+\eta)-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{ij}))+$$
$$+\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ij,b}_{\alpha}\mathcal{S}^{jj,a}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ij})-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ij}+\eta))+$$
$$+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,a}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,b}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj}+\eta)-\varphi_\beta(z_{ab},\omega_\beta+q_{kj}))+$$
$$+\sum_{k:k\neq i,j}\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha,\beta}\mathcal{S}^{ik,b}_{\alpha}\mathcal{S}^{kj,a}_{\beta}T_\alpha T_\beta\varphi_{\alpha+\beta}(z-z_a,\omega_{\alpha+\beta}+q_{ij}+\eta)(\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ik})-\varphi_\alpha(z_{ab},\omega_\alpha+q_{ik}+\eta))+$$
$$+\sum_{\substack{a,b\\a\neq b}}\sum_{\alpha}\mathcal{S}^{ij,a}_{\alpha}(\mathcal{S}^{ii,b}_{0,0}-\mathcal{S}^{jj,b}_{0,0})T_\alpha\varphi_\alpha(z-z_a,\omega_\alpha+q_{ij}+\eta)(E_1(\eta)+E_1(z_{ab})-\phi(z_{ab},\eta)).$$

Это полностью воспроизводит оставшиеся слагаемые в уравнении движения для недиагонального блока спина (4.8) — слагаемые, включающие в себя обобщенный тензор инерции, функции E_1 и ϕ. Это завершает доказательство. ■

Рассмотрим, что произойдет с полученными нами уравнениями движения (4.8)-(4.9) в нерелятивистском пределе $\eta \to 0$, $t \to t/\eta$. По аналогии со случаем релятивистского волчка (3.5)-(3.7), нерелятивистские версии обобщенных тензоров инерции (4.6)-(4.7) принимают вид:

$$\widetilde{J}_a(\mathcal{S}^{ij,b}) = \sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}^{ij,b}_\alpha T_\alpha f_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha), \tag{4.23}$$

$$\widetilde{J}^{q_{mn}}_a(\mathcal{S}^{ij,b}) = \sum_{\alpha} \mathcal{S}^{ij,b}_\alpha T_\alpha f_\alpha(z_{ab}, \omega_\alpha + q_{mn}). \tag{4.24}$$

Нерелятивистский предел тензоров инерции определенных в предыдущей секции:

$$J(\mathcal{S}^{ij,a}) = -\sum_{\alpha \neq 0} \mathcal{S}^{ij,a}_\alpha T_\alpha E_2(\omega_\alpha), \tag{4.25}$$

$$J^{q_{mn}}(\mathcal{S}^{ij,a}) = -\sum_{\alpha} \mathcal{S}^{ij,a}_\alpha T_\alpha E_2(\omega_\alpha + q_{mn}). \tag{4.26}$$

Подставляя эти выражения в уравнение для диагонального блока переменной спина (4.9), мы получаем в точности уравнение (2.15). Для того чтобы взять нерелятивистский предел уравнения для недиагонального блока спина, также нужно разложить в ряд те слагаемые в (4.8), которые не выражаются через тензора инерции. Пользуясь выражениями (A.6)-(A.7), мы получаем: $-\eta\rho(z_{ab}) + O(\eta^3)$. Подставляя это разложение и выражения для тензоров инерции в недиагональное уравнение (4.8), мы получим уравнение движения $GL(NM)$ модели для гамильтониана H_0 (2.14).

Для того чтобы окончательно показать, что наше релятивистское обобщение в пределе $\eta \to 0$ превращается в систему уравнений движения для гамильтониана H_0 (2.9), нам нужно получить динамическое уравнение для $\ddot{q}_i$. Из условия связи (4.11) мы получаем:

$$\ddot{q}_i = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\Big(\sum_{a,b}\Big[\mathcal{S}^{ii,a}, \partial\widetilde{J}_a(\mathcal{S}^{ii,b})\Big] + \sum_{k:k\neq i}\sum_{a,b}\mathcal{S}^{ik,a}\partial\widetilde{J}^{q_{ki}}_a(\mathcal{S}^{ki,b}) - \partial\widetilde{J}^{q_{ik}}_a(\mathcal{S}^{ik,b})\mathcal{S}^{ki,a},\Big) \tag{4.27}$$

где мы воспользовались тем, что $\mathrm{Tr}\,\mathcal{S}^{ii,a} = \mathcal{S}^{ii,a}_{0,0}$. Подставляя сюда определенные выше нерелятивистские значения тензоров инерции, мы получим в точности (2.13).

5 Заключение

В нашей работе была сформулирована обощенная модель Годена, которая является обобщением эллиптической $GL(NM)$ модели на случай нескольких отмеченных точек. Эта модель включает в себя широкий класс других систем, в частности эллиптическую и $sl(N, \mathbb{C})$ модели Годена, которые не входили в множество обобщаемых $GL(NM)$ моделью систем. Более подробно это можно увидеть на иллюстрации (1). Для построенной нами модели мы вычислили уравнения движения и нашли представление Лакса.

Кроме того, мы рассмотрели релятивистскую версию обобщенной модели Годена, нашли её уравнения движения и показали, что в нерелятивистском пределе она действительно переходит в построенную нами систему.

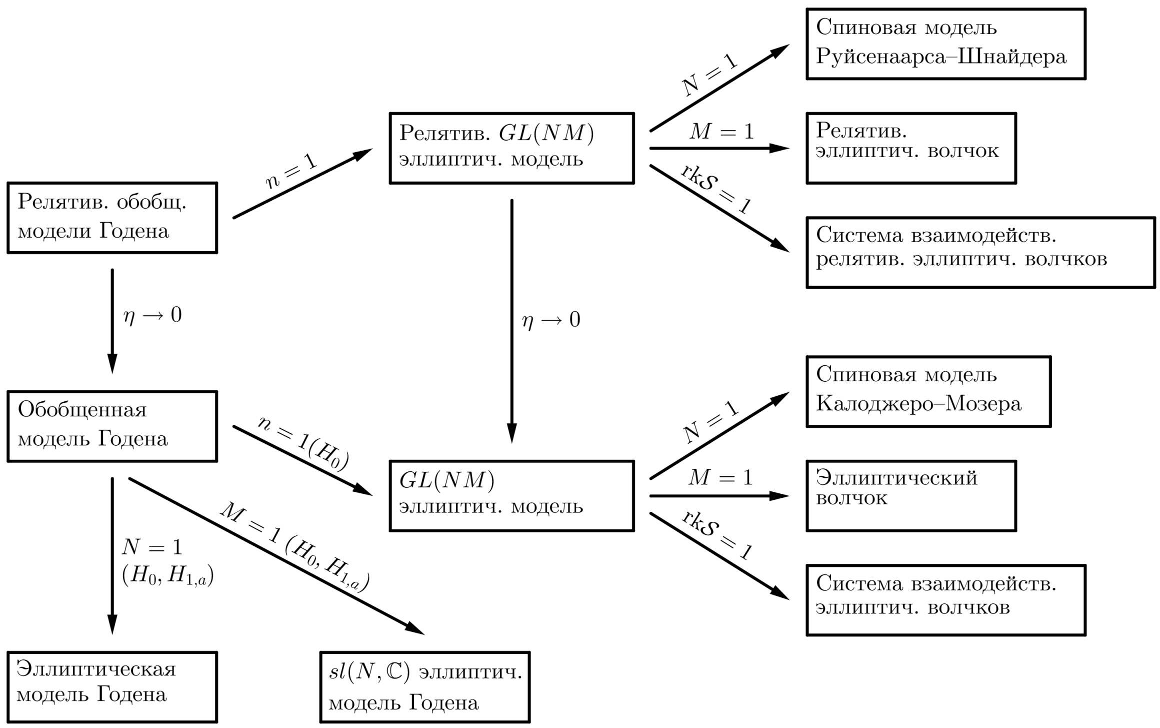


Рис. 1: Взаимосвязи между интегрируемыми моделями.

A Эллиптические функции

В этом приложении мы приводим основные тождества, которые используются в наших вычислениях. С более подробным описанием приведенных здесь формул можно ознакомиться в [9].

Используемые нами эллиптические функции выражаются в терминах тета-функции:

$$\vartheta(z|\tau)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i\tau(k+\frac{1}{2})^2+2\pi i(z+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})\right) \tag{A.1}$$

где τ - параметр эллиптической кривой $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$ ($\mathrm{Im}(\tau)>0$). Функция Кронекера имеет вид:

$$\phi(z,u)=\begin{cases} 1/z+1/u & \text{— рациональный случай}\\ \coth(z)+\coth(u) & \text{— тригонометрический случай}\\ \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+u)}{\vartheta(z)\vartheta(u)} & \text{— эллиптический случай}\end{cases} \tag{A.2}$$

$$\phi(z,u)=\phi(u,z),\quad \phi(-z,-u)=-\phi(z,u). \tag{A.3}$$

Функции Эзенштейна и $\wp$-функция Вейерштрасса:

$$E_1(z)=\begin{cases}1/z\\ \coth(z)\\ \partial_z\ln\vartheta(z)\end{cases},\quad E_2(z)=-\partial_z E_1(z)=\wp(z)+\frac{\vartheta'''(0)}{3\vartheta'(0)} \tag{A.4}$$

$$E_1(-z)=E_1(z),\quad E_2(-z)=E_2(z) \tag{A.5}$$

Функция Кронекера и первая функция Эйзенштейна имеют полюс первого порядка в точке $z = 0$:

$$\phi(z,u) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + O(z^2) \tag{A.6}$$

$$E_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{3}\frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)} + O(z^3) \tag{A.7}$$

соответственно вторая функция Эйзенштейна и $\wp$-функция Вейерштрасса имеют полюс второго порядка в нуле.

Мы используем обозначение: $f(z,u) = \partial_u \varphi(z,u)$, тогда:

$$f(z,u) = \phi(z,u)(E_1(z+u) - E_1(u)), \quad f(-z,-u) = f(z,u). \tag{A.8}$$

Из (A.6) следует:

$$f(0,u) = -E_2(u). \tag{A.9}$$

Эллиптические функции квазипереодичны на эллиптической кривой:

$$\begin{gathered} E_1(z+1) = E_1(z), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \\ E_2(z+1) = E_2(z), \quad E_2(z+\tau) = E_2(z), \\ \phi(z+1,u) = \phi(z,u), \quad \phi(z+\tau,u) = e^{-2\pi i u}\phi(z,u) \\ f(z+1,u) = f(z,u), \quad f(z+\tau,u) = e^{-2\pi i u}(f(z,u) - 2\pi i \phi(z,u)). \end{gathered} \tag{A.10}$$

Главным соотношением для нас является *тождество Фэя*:

$$\phi(z_1,u_1)\phi(z_2,u_2) = \phi(z_1,u_1+u_2)\phi(z_2-z_1,u_2) + \phi(z_2,u_1+u_2)\phi(z_1-z_2,u_1). \tag{A.11}$$

Частным случаем этого выражения являются следующие формулы:

$$f(z_1,u_1)\phi(z_2,u_2) - \phi(z_1,u_1)f(z_2,u_2) = \phi(z_2,u_1+u_2)f(z_{12},u_1) - \phi(z_1,u_1+u_2)f(z_{21},u_2), \tag{A.12}$$

$$f(z,u_1)\phi(z,u_2) - \phi(z,u_1)f(z,u_2) = \phi(z,u_1+u_2)(E_2(u_2) - E_2(u_1)), \tag{A.13}$$

$$\phi(z,u)\phi(z,-u) = E_2(z) - E_2(u), \tag{A.14}$$

$$\phi(z,u_1)\phi(z,u_2) = \phi(z,u_1+u_2)(E_1(z) + E_1(u_1) + E_1(u_2) - E_1(z+u_1+u_2)), \tag{A.15}$$

из предыдущей формулы и (A.8) мы получаем:

$$\phi(z_1,u)\phi(z_2,u) = \phi(z_1+z_2,u)(E_1(z_1) + E_1(z_2)) - f(z_1+z_2,u). \tag{A.16}$$

Еще одна важная формула из тождества Фэя, которую мы используем:

$$\phi(z_1,u)\rho(z_2) - E_1(z_2)f(z_1,u) + \phi(z_2,u)f(z_{12},u) - \phi(z_1,u)\rho(z_{21}) = \frac{1}{2}\partial_u f(z_1,u), \tag{A.17}$$

где ρ:

$$\rho(z) = \frac{E_1^2(z) - \wp(z)}{2}. \tag{A.18}$$

С помощью (A.8) и соотношения:

$$(E_1(u+v) - E_1(u) - E_1(v))^2 = \wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v), \tag{A.19}$$

мы получаем из (A.17):

$$\phi(z,u)\rho(z) - E_1(z)f(z,u) - \phi(z,u)\wp(u) = \frac{1}{2}\partial_u f(z,u). \tag{A.20}$$

B Эллиптические функции и группа GL(N,C)

При описании эллиптического волчка мы пользуемся специальным базисом в группе $GL(N,\mathbb{C})$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$Q_{mn} = \delta_{mn} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} m\right), \quad \Lambda_{mn} = \delta_{m-n+1=0 \bmod N}, \quad Q^N = \Lambda^N = 1, \tag{B.1}$$

или:

$$Q = \mathrm{diag}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \dots, \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \dots, 1\right),$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Тогда базис в терминах этих матриц принимает вид:

$$T_\alpha = \exp\left(\alpha_1 \alpha_2 \frac{\pi i}{N}\right) Q^{\alpha_1} \Lambda^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N, \quad T_0 = 1_N, \tag{B.3}$$

важные соотношения, которые мы используем для этого базиса:

$$T_\alpha T_\beta = \kappa_{\alpha,\beta} T_{\alpha+\beta}, \quad \kappa_{\alpha,\beta} = \exp\left(\frac{\pi i}{N}(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\right), \quad \kappa_{\alpha,\alpha+\beta} = \kappa_{\alpha,\beta}, \quad \kappa_{-\alpha,\beta} = \kappa_{\beta,\alpha}, \tag{B.4}$$

$$\mathrm{Tr}(T_\alpha T_\beta) = N\delta_{\alpha+\beta}, \quad \delta_\alpha = \delta_{\alpha_1,0}\delta_{\alpha_2,0}. \tag{B.5}$$

Если при $\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ матрицы T_α образуют базис в $GL(N,\mathbb{C})$, то при $\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N / \{0,0\}$ эти матрицы образуют базис в алгебре Ли $sl(N,\mathbb{C})$. При этом коммутатор этих матриц принимает вид:

$$[T_\alpha, T_\beta] = (\kappa_{\alpha,\beta} - \kappa_{\beta,\alpha}) T_{\alpha,\beta} = 2i \sin\left(\frac{\pi}{N}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\right) T_{\alpha+\beta}, \tag{B.6}$$

поэтому эту алгебру еще иногда называют синус-алгеброй. Мы доопределяем эллиптические функции следующим образом:

$$\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \exp(2\pi i \frac{\alpha_2}{N} z) \phi(z, \omega_\alpha + u), \quad \omega_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}, \tag{B.7}$$

$$f_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \exp(2\pi i \frac{\alpha_2}{N} z) f(z, \omega_\alpha + u). \tag{B.8}$$

Все основные формулы в этих обозначениях сохраняют свой вид:

$$f_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \partial_u \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u)(E_1(z + \omega_\alpha + u) - E_1(\omega_\alpha + u)), \tag{B.9}$$

в том числе тождество Фэя:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(z_1, \omega_\alpha + u_1)\varphi_\beta(z_2, \omega_\beta + u_2) =& \varphi_\alpha(z_1 - z_2, \omega_\alpha + u_1)\varphi_{\alpha+\beta}(z_2, \omega_{\alpha+\beta} + u_1 + u_2) + \\ &+ \varphi_\beta(z_2 - z_1, \omega_\beta + u_1)\varphi_{\alpha+\beta}(z_1, \omega_{\alpha+\beta} + u_1 + u_2), \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\varphi_\alpha(z - z_a, \omega_\alpha)\varphi_\beta(z - z_b, \omega_\beta) = \varphi_\alpha(z_{ba}, \omega_\alpha)\varphi_{\alpha+\beta}(z - z_b, \omega_{\alpha+\beta}) + \varphi_\beta(z_{ab}, \omega_\beta)\varphi_{\alpha+\beta}(z - z_a, \omega_{\alpha+\beta}), \tag{B.11}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha+u_1)\varphi_\beta(z,\omega_\beta+u_2) =& \varphi_{\alpha+\beta}(z,\omega_{\alpha+\beta}+u_1+u_2)(E_1(z)+\\
&+E_1(\omega_\alpha+u_1)+E_1(\omega_\beta+u_2)-E_1(z+\omega_{\alpha+\beta}+u_1+u_2)),
\end{aligned} \tag{B.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_\alpha(z_1,\omega_\alpha+u)\varphi_\alpha(z_2,\omega_\alpha+u) =\\
&\qquad =\varphi_\alpha(z_1+z_2,\omega_\alpha+u)(E_1(z_1)+E_1(z_2))-f_\alpha(z_1+z_2,\omega_\alpha+u).
\end{aligned} \tag{B.13}
$$

Для доопределенных эллиптических функций выполняются следующие условия переодичности по индексам (см. (A.10), (B.7)-(B.8)):

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\alpha+\beta_1}(z,\omega_{\alpha+\beta_1}+u) &= \exp(2\pi i\frac{\alpha_2}{N}z)\phi(z,\omega_\alpha+1+u)=\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha+u),\\
f_{\alpha+\beta_1}(z,\omega_{\alpha+\beta_1}+u) &= \exp(2\pi i\frac{\alpha_2}{N}z)f(z,\omega_\alpha+1+u)=f_\alpha(z,\omega_\alpha+u),\\
\varphi_{\alpha+\beta_2}(z,\omega_{\alpha+\beta_2}+u) &= \exp(2\pi i\frac{\alpha_2+N}{N}z)\phi(z,\omega_\alpha+\tau+u)=\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha+u),\\
f_{\alpha+\beta_2}(z,\omega_{\alpha+\beta_2}+u) &= f_\alpha(z,\omega_\alpha+u)-2\pi i\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha+u),
\end{aligned} \tag{B.14}
$$

где $\beta_1=(N,0)$ $\beta_2=(0,N)$. Вместе с (B.4), эти условия позволяют нам проводить такие замены индесов суммирования, как, например, $\alpha+\beta\to\alpha$, $\beta\to\beta$ в большинсве используемых нами формул.

Список литературы

[1] J. Liouville, Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, Journal de Mathématiques (Journal de Liouville) XX (1855) 137.

[2] P.D. Lax, Integrals of non-linear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. 21 (1968) 467.

[3] F. Calogero, Exactly solvable one-dimensional many-body problems, Lett. Nuovo Cimento 13 (1975) 411–416; doi:10.1007/BF02790495.

J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connnected with isospectral deformations, Adv. Math. 16 (1975) 197-220; doi:10.1016/0001-8708(75)90151-6.

[4] N. Hitchin, Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J. 54 (1987), no. 1, 91–114.

[5] N. Nekrasov, Holomorphic bundles and many-body systems, Commun. Math. Phys. 180 (1996) 587–603; arXiv:hep-th/9503157.

[6] A. V. Zotov, A. M. Levin, Integrable Model of Interacting Elliptic Tops, Theor. Math. Phys. 146 (2006) 45–52.

[7] A. V. Zotov, A. V. Smirnov, Modifications of bundles, elliptic integrable systems, and related problems, Theor. Math. Phys. 177 (2013) 1281–1338;

[8] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, Characteristic classes of $SL(N)$-bundles and quantum dynamical elliptic R-matrices, J. Phys. A: Math. Th. 46 (2012); arXiv:1208.5750.

[9] A. Weil, Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1976); doi:10.1007/9783642662096.

[10] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, Spin generalization of the Calogero-Moser system and the Matrix KP equation, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 170 (1995) 83-120; arXiv:hep-th/9411160.

[11] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Алгебры Ли и лаксовы уравнения со спектральным параметром на эллиптической кривой, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 150 (1986) 104–118; mathnet/archive.

[12] A. V. Zotov, 1+1 Gaudin Model, SIGMA 7 (2011) 067; arXiv:1012.1072.

[13] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Noncommutative extensions of elliptic integrable Euler–Arnold tops and Painlevé VI equation, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016) 395202; arXiv:1603.06101

[14] A. Grekov, I. Sechin, A. Zotov, Generalized model of interacting integrable tops, J. High Energ. Phys. 81 (2019); arXiv:1905.07820.

[15] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, A New Class of Integrable Systems and Its Relation to Solitons, Annals Phys. 170 (1986) 370-405; doi: 10.1016/0003-4916(86)90097-7.

[16] I. Krichever, A. Zabrodin, Spin generalization of the Ruijsenaars-Schneider model, non-Abelian 2D Toda chain and representations of Sklyanin algebra, Russ. Math. Surveys 50 (1995) 1101; arXiv:hep-th/9505039.

[17] G. E. Arutyunov, S. A. Frolov, On the Hamiltonian structure of the spin Ruijsenaars-Schneider model, J. Phys. A: Math. Gen. 31 18; arXiv:hep-th/9703119.

[18] A. Gorsky, N. Nekrasov, Relativistic Calogero-Moser model as gauged WZW theory, Nucl. Phys. B436 (1995) 582-608; arXiv:hep-th/9401017.

[19] A. V. Zotov, Relativistic Interacting Integrable Elliptic Tops, Theor. Math. Phys. 201 (2019) 1565–1580; arXiv:1910.08246.

[20] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, Relativistic classical integrable tops and quantum R-matrices, J. High Energ. Phys. 2014 12 (2014); arXiv:1405.7523.