

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

Кафедра теоретической астрофизики
и квантовой теории поля

Симметрии цветных полиномов $U(N)$

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:

студент 621 группы
Целоусов Никита Сергеевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., Слепцов А.В.

Долгопрудный
2020

Содержание

1	Введение	2
2	Цветной полином HOMFLY	2
3	Цветной полином Александера	5
4	Симметрия tug-the-hook	6
5	Уравнения и решения для симметрии tug-the-hook	7
6	Основные результаты	9
6.1	Действие симметрии tug-the-hook на инвариантах Казимира	13
6.2	Описание коэффициентов μ_{Δ}^{Λ}	14
7	Связь с гипотезой о собственных значениях	16
8	Заключение	19
A	Квантовые размерности	20

1 Введение

В данной работе представлена новая симметрия "tug-the-hook" цветного полинома Александра, который является частным случаем квантового инварианта \mathfrak{sl}_N , более известного как цветной полином HOMFLY-PT. В пертурбативном (петлевом) разложении полинома Александра эта симметрия выливается в свойства групповых факторов инварианта. Была решена задача поиска элементов центра универсальной обертывающей алгебры, которые удовлетворяют нужному свойству. Задача формулировалась в терминах полиномиальных уравнений на инварианты Казимира, которые были явно решены, и был найден базис в пространстве всех решений. Тем самым были наложены жесткие ограничения на общий вид структур, которые могут появляться в групповых факторах полинома Александра. Дано комбинаторное описание пространства всех решений. В конце работы обсуждается связь найденной симметрии с гипотезой о собственных значениях, которая говорит в пользу существования обеих, а также дает непертурбативный взгляд на симметрию.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 определяется цветной полином HOMFLY. В разделе 3 определяется цветной полином Александра как частный случай HOMFLY. В разделе 4 представляется новая симметрия цветного полинома Александра и переформулируется как система уравнений, ответ для которой описан в разделе 5. Полное пошаговое решение предьявлено в разделе 6 в комбинаторных терминах. В разделе 7 обсуждается связь симметрии с гипотезой о собственных значениях.

2 Цветной полином HOMFLY

Цветной полином HOMFLY-PT - это топологический инвариант узлов и зацеплений. В настоящее время инварианты HOMFLY привлекают все больше внимания, потому что они возникают в разных областях математической и теоретической физики: квантовая теория поля [5, 6, 7], квантовые группы [11, 12, 8], конформные теории поля [9], топологические струны [10]. Вычисление какого-либо класса полиномов HOMFLY может привести к заметным продвижениям в вышеперечисленных областях.

Цветной HOMFLY представляется как полином от двух формальных переменных q, a и зависит от двух параметров: от узла и от конечномерного представления алгебры $\mathfrak{sl}(N)$, которые нумеруются диаграммами Юнга. Например, полином для узла 3_1 в фундаментальном представлении выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}_{[1]}^{3_1}(q, a) = a^2 q^2 - a^4 + a^2 q^{-2} \quad (1)$$

Поскольку цветной полином HOMFLY появляется в разных областях теоретической физики, он может быть определен различными способами. В работе в основном используются два из них:

- **Трехмерная теория Черна-Саймонса.** Цветной полином HOMFLY для узла \mathcal{K} может быть получен как вакуумное среднее от Вильсоновской петли в трехмерной теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ на трехмерной сфере S^3 [5, 15]:

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \left\langle \text{tr}_R P \exp \left(\oint_{\mathcal{K}} A \right) \right\rangle_{CS}, \quad (2)$$

Здесь R обозначает представление калибровочной группы в нашем конкретном случае $SU(N)$ может быть занумеровано диаграммой Юнга. Действие в теории Черна-Саймонса:

$$S_{CS}[A] = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (3)$$

Переменные полинома параметризованы следующим образом:

$$q = e^{\hbar}, \quad a = e^{N\hbar}, \quad \hbar := \frac{2\pi i}{\kappa + N}. \quad (4)$$

Можно вычислить (2) в голоморфной калибровке $A_x + iA_y = 0$ [18] и получить петлевое разложение полинома HOMFLY [15]

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_m v_{n,m}^{\mathcal{K}} r_{n,m}^R \right) \hbar^n. \quad (5)$$

Замечательный факт, что в этом разложении зависимость от узла и от представления разделяется. Части, которые зависят только от узла $v_{n,m}^{\mathcal{K}}$, выражаются вакуумными средними интегралов полей вдоль узла. Части, которые зависят только от представления $r_{n,m}^R$, обычно называются групповыми факторами и выражаются как следы от генераторов T_i алгебры \mathfrak{sl}_N .

$$r_{n,m}^R \sim \text{tr}_R \left(T_{i_1^{(m)}} T_{i_2^{(m)}} \dots T_{i_{2n}^{(m)}} \right) \quad (6)$$

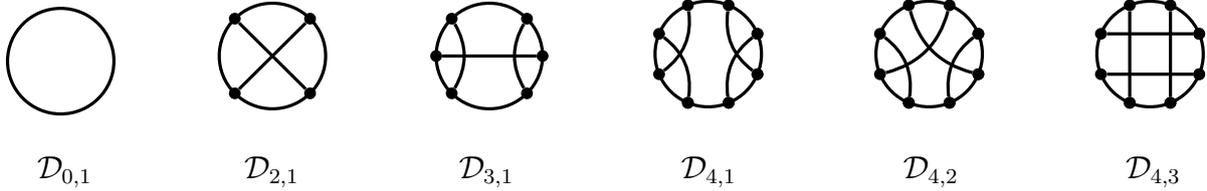
$$v_{n,m}^{\mathcal{K}} \sim \oint dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \left\langle A^{i_1^{(m)}}(x_1) A^{i_2^{(m)}}(x_2) \dots A^{i_n^{(m)}}(x_{2n}) \right\rangle \quad (7)$$

Несколько преобразовав петлевое разложение (5), можно получить выражение в форме интеграла Концевича [18, 21].

Напомним некоторые основные свойства интеграла Концевича и весовых систем алгебр Ли [22] (см. Часть 6). Полное определение интеграла Концевича может быть найдено в [22] (см. Часть 8.2). Для нас сейчас важно, что его значения принадлежат градуированному пополнению (разрешены бесконечные суммы) алгебры хордовых диаграмм $\hat{\mathcal{D}}$ [22] (см. Часть 4)

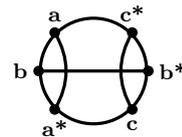
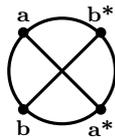
$$Z(\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_m \mathcal{V}(\mathcal{K})_{n,m} \mathcal{D}_{n,m}. \quad (8)$$

Здесь $\mathcal{D}_{n,m}$ - это хордовая диаграмма с n хордами, $\mathcal{V}(\mathcal{K})_{n,m}$ - это коэффициент при соответствующей хордовой диаграмме в интеграле Концевича. Примеры хордовых диаграмм для малых порядков выглядят следующим образом:



Заметим, что в данной алгебре запрещены хордовые диаграммы, содержащие хорды, которые не пересекают другие хорды.

Система весов алгебры Ли $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ - это гомоморфизм из алгебры хордовых диаграмм \mathcal{D} в центр универсальной обертывающей алгебры $ZU(\mathfrak{sl}_N)$. Полное определение системы весов φ и доказательство этого утверждения могут быть найдены в [22] (см. Часть 6). Приведем примеры, которые иллюстрируют отображение $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$:



$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_{2,1}) = \sum_{a,b=1}^{\dim \mathfrak{sl}_N} T_a T_b T_a^* T_b^*$$

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_{3,1}) = \sum_{a,b,c=1}^{\dim \mathfrak{sl}_N} T_a T_b T_a^* T_c T_b^* T_c^*$$

Выбирая неприводимое представление алгебры \mathfrak{sl}_N , соответствующее диаграмме Юнга R , рассмотрим систему весов алгебры Ли, ассоциированную с представлением R

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R : \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{sl}_N}} ZU(\mathfrak{sl}_N) \xrightarrow{\rho_R} \text{End}(V) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{C} \quad (9)$$

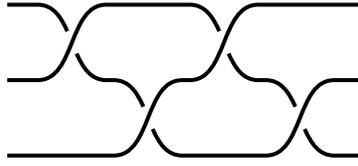
Распространяя действие $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$ по линейности, мы получаем петлевое разложение цветного полинома HOMFLY как специальное значение интеграла Концевича:

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(Z(\mathcal{K})) = H_R^K(q, a) \quad (10)$$

• **Подход Решетихина-Тураева.** Знаменитая теорема Александра тесно связывает узлы и зацепления с косами. Она утверждает, что любой узел (зацепление) может быть представлен как замыкание некоторой косы. В этом формализме [11, 12, 13, 14] мы получаем инвариант узла с помощью представления группы кос. Группа кос B_n на n нитях задана своими генераторами σ_i , где $i = 1, \dots, n-1$, и соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{для } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{для } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Например, замыкание следующей косы есть узел 3_1 - трилистник:



$$\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \in \mathcal{B}_3$$

Заметим, что для получения узла коса в общем случае может быть выбрана неоднозначным образом.

В формализме Решетихина-Тураева i -ой нити n -нитевой косы сопоставляется конечномерное представление V_i квантовой универсальной обертывающей алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_N)$, которое нумеруется диаграммой Юнга R_i . Хорошо известно [19, 20], что с помощью универсальной $\check{\mathcal{R}}$ -матрицы можно построить представление группы кос B_n . В нашем случае параметр квантовой деформации q не равен корню из единицы:

$$\mathcal{R}_i := \pi(\sigma_i) = \mathbf{1}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{1}_{i-1} \otimes P\check{\mathcal{R}} \otimes \mathbf{1}_{i+2} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}_n \in \text{End}(V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_n}). \quad (11)$$

Здесь P - это оператор перестановки, т.е $P(x \otimes y) = y \otimes x$. Операторы \mathcal{R}_i удовлетворяют соотношениям группы кос B_n :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i \mathcal{R}_j &= \mathcal{R}_j \mathcal{R}_i && \text{for } |i - j| \geq 2 \\ \mathcal{R}_i \mathcal{R}_{i+1} \mathcal{R}_i &= \mathcal{R}_{i+1} \mathcal{R}_i \mathcal{R}_{i+1} && \text{for } i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Графически второе из этих соотношений соответствует **третьему движению Рейдемейстера**, в то время как алгебраически это **квантовое уравнение Янга-Бакстера** для квантовых \mathcal{R} -матриц.

Пусть $\beta^K \in B_n$ коса, замыкание которой является узлом \mathcal{K} . В этом случае все нити косы являются частью нити соответствующего узла, поэтому каждой нити соответствует одно и тоже представление и потребуется только одна диаграмма Юнга R , чтобы описать n одинаковых копий V_R . Оперция замыкания косы соответствует взятию квантового следа для получения цветного полинома HOMFLY:

$$H_R^K(q, a) = {}_q \text{tr}_{V_R^{\otimes n}}(\pi(\beta^K)). \quad (12)$$

Для любого $z \in \text{End}(V_R^{\otimes n})$ квантовый след определен следующим образом:

$${}_q \text{tr}_{V_R^{\otimes n}}(z) := \text{tr}_{V_R^{\otimes n}}(K_{2\rho} z),$$

где ρ - это полусумма положительных корней. В терминах простых корней α_i

$$2\rho = \sum_{i=1}^{N-1} n_i \alpha_i, \quad K_{2\rho} := \prod_{i=1}^{N-1} K_i^{n_i}, \quad K_i := q^{(\alpha_i, H)}.$$

Для вычисления цветного полинома HOMFLY удобно разложить $V_R^{\otimes n}$ на неприводимые компоненты:

$$V_R^{\otimes n} = \bigoplus_{Q \vdash n|R} \mathcal{M}_Q \otimes V_Q. \quad (13)$$

Здесь сумма идет по диаграммам Юнга Q , которые появляются в тензорном произведении по правилу Литтлвуда-Ричардсона. Символом V_Q обозначено неприводимое представление соответствующее диаграмме Юнга Q , в то время как \mathcal{M}_Q обозначает пространство старших весов соответствующее диаграмме Q . Размерность пространства \mathcal{M}_Q называется кратностью представления V_Q . Например, рассмотрим разложение тензорного куба фундаментального представления:

$$V_{[1]}^{\otimes 3} = V_{[3]} \oplus V_{[2,1]} \oplus V_{[2,1]} \oplus V_{[1,1,1]}.$$

В этом случае $\mathcal{M}_{[2,1]}$ - это двумерное векторное пространство.

Ключевое свойство квантовых \mathcal{R}_i -матриц - они действуют на представлениях V_Q умножением на единицу:

$$\mathcal{R}_i = \bigoplus_{Q \vdash n|R} (\mathcal{R}_i)_{\mathcal{M}_Q} \otimes \mathbf{1}_{V_Q}. \quad (14)$$

Используя этот факт упростим выражение для цветного полинома HOMFLY. В итоге выражение выглядит как разложение по характеристам:

$$H_R^K = {}_q \text{tr}_{V_R^{\otimes n}} (\pi(\beta^K)) = \sum_{Q \vdash n|R} \text{tr}_{\mathcal{M}_Q} (\pi(\beta^K)) \cdot \text{tr}_{V_Q}(K_{2\rho}) = \sum_{Q \vdash n|R} \sigma_Q(\beta^K) \cdot s_Q^*, \quad (15)$$

где s_Q^* - это квантовые размерности. Квантовые размерности определены как полиномы Шура s_Q в специальной точке [16]:

$$s_Q^* := s_Q(x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_i = q^{N+1-2i}}. \quad (16)$$

Заметим, что при устремлении параметра деформации q к единице мы получаем размерности конечномерных представлений для соответствующих диаграмм.

Стоит отметить, что определенный таким образом H_R^K является не полиномом по переменной q , а рациональной функцией. Чтобы получить полиномиальное выражение, нужно отнормировать на полином от тривиального узла, который на самом деле является квантовой размерностью. Здесь и далее в работе рассматривается **нормированный полином HOMFLY**:

$$\mathcal{H}_R^K := \frac{H_R^K}{H_R^\circ}, \quad H_R^\circ(q, a) = s_R^*(q, a) \quad (17)$$

3 Цветной полином Александера

Рассматривая нормированный цветной полином HOMFLY, можно положить $a = 1$ и получить цветной инвариант узла, который для фундаментального представления $R = [1]$ совпадает со знаменитым полиномом Александера [17]. Определим цветной полином Александера следующим образом:

$$\mathcal{A}_R^K(q) := \mathcal{H}_R^K(q, a = 1). \quad (18)$$

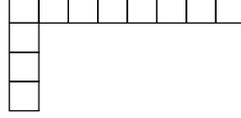
Изучение цветного полинома Александера может улучшить наше понимание более сложного полинома HOMFLY. Интерес к цветному полиному Александера также обусловлен некоторыми интересными свойствами:

- Как функция представления R и параметра квантовой деформации q цветной полином Александра обладает однокрюковым скейлинговым свойством:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}), \quad \text{где} \quad R = [r, 1^L]. \quad (19)$$

Это свойство было предложено как гипотеза [2] и затем доказано для торических узлов [3]. Также в работе [4] было показано, что это свойство следует из гипотезы о собственных значениях.

Пример однокрюковой диаграммы Юнга:



$$R = [8, 1^3].$$

- Существует связь цветного полинома Александра и интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили [29]. Однокрюковое свойство индуцирует так называемые уравнения Александра [1]:

$$X_{n,m}([r, 1^L]) = 0. \quad (20)$$

Эти уравнения являются однородными полиномами по инвариантам Казимира

$$C_1(R), C_2(R), \dots, C_n(R).$$

Градуированное векторное пространство решений уравнений Александра, которое включает члены с четным числом инвариантов Казимира и кольцо полиномов, порожденное **дисперсионными соотношениями односолитной τ -функции**, являются одинаковыми векторными пространствами [1]. Примеры в младших порядках выглядят следующим образом:

Уравнения Александра	Дисперс. соотношения	Уравнения КП
$X_{4,1} = C_1^4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2$	$k_1^4 - 4k_1k_3 + 3k_2^2 = 0$	$[D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2] \tau \otimes \tau = 0$
$X_{5,1} = C_2C_1^3 - 3C_4C_1 + 2C_2C_3$	$k_2k_1^3 - 3k_4k_1 + 2k_2k_3 = 0$	$[D_2D_1^3 - 3D_4D_1 + 2D_2D_3] \tau \otimes \tau = 0$
$X_{5,2} = C_1(C_1^4 - 4C_1C_3 + 3C_2^2)$		

Таблица 1: Однокрюковые решения и связь с КП.

Дисперсионные соотношения односолитного решения могут быть получены заменой производных Хироты D_i на формальные переменные k_i в уравнениях КП в форме Хироты. Поскольку иерархия КП хорошо изучена и обладает замечательными свойствами, это дает надежду, что могут быть найдены другие интересные свойства цветного полинома Александра.

4 Симметрия tug-the-hook

В ходе исследований была найдена еще одна гипотетическая симметрия цветного полинома Александра, которая обобщает однокрюковое свойство для диаграмм с большим количеством

крюков. Чтобы определить симметрию, нам потребуются обозначения Фробениуса [28] для диаграммы Юнга $R = [R_1, R_2, \dots, R_{l(R)}]$. Обозначения Фробениуса отражают красивую графическую интерпретацию действия симметрии на диаграммах Юнга:

$$\alpha_i := R_i - i + 1 \quad \text{и} \quad \beta_i := R'_i - i + 1 \quad (21)$$

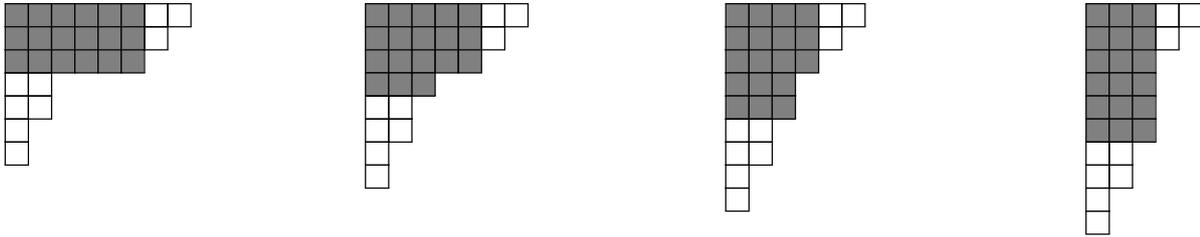
$$R = (\alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \beta_1, \dots, \beta_r)$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r > 0$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r > 0$.

Действие на диаграммах Юнга определено следующим образом:

$$\mathbf{T}_\epsilon(R) = (\alpha_1 + \epsilon, \dots, \alpha_r + \epsilon \mid \beta_1 - \epsilon, \dots, \beta_r - \epsilon), \quad (22)$$

где ϵ - это целое число и $\mathbf{T}_\epsilon(R)$ должно остаться диаграммой Юнга. Заметим, что все крюки сдвинулись на ϵ . Действие явно видно на примере:



$$R = (8, 6, 4 \mid 7, 4, 1) \quad \mathbf{T}_{-1}(R) = (7, 5, 3 \mid 8, 5, 2) \quad \mathbf{T}_{-2}(R) = (6, 4, 2 \mid 9, 6, 3) \quad \mathbf{T}_{-3}(R) = (5, 3, 1 \mid 10, 7, 4)$$

Симметрия tug-the-hook утверждает, что для любых допустимых ϵ выполнено:

$$\boxed{\mathcal{A}_R^\mathcal{K}(q) = \mathcal{A}_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^\mathcal{K}(q)} \quad (23)$$

Эта новая симметрия обобщает однокрюковое свойство (19). Заметим, что однокрюковое свойство утверждает, что полином Александра для однокрюкового представления зависит только от размера диаграммы. Это утверждение может быть получено из (23) подстановкой в R однокрюковой диаграммы. Тем не менее, однокрюковое свойство включает дополнительную информацию, а именно правую часть выражения (19). Аналогичное обобщение для симметрии tug-the-hook еще не найдено.

Стоит подчеркнуть, что однокрюковое свойство и симметрия tug-the-hook не работает для полного полинома HOMFLY, например:

$$\mathcal{H}_{[2]}^\mathcal{K}(q, a) \neq \mathcal{H}_{[1,1]}^\mathcal{K}(q, a), \quad (24)$$

$$\mathcal{H}_{[2]}^\mathcal{K}(q, a) \neq \mathcal{H}_{[1]}^\mathcal{K}(q^2, a). \quad (25)$$

Интересно было бы найти обобщения данных свойств для полинома HOMFLY.

5 Уравнения и решения для симметрии tug-the-hook

Как частный случай инварианта HOMFLY полином Александра наследует его петлевое разложение:

$$\mathcal{A}_R^\mathcal{K} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_m v_{n,m}^\mathcal{K} r_{n,m}^R \Big|_{N=0} \right) \hbar^n. \quad (26)$$

Как было показано во введении, групповые факторы $r_{n,m}^R$ являются образом системы весов, ассоциированной с представлением R . Из отображений (9) следует, что групповые факторы $r_{n,m}^R$

могут быть выражены через собственные значения операторов Казимира, поскольку последние составляют базис в центре универсальной обертывающей алгебры:

$$r_{n,m}^R = \sum_{|\Delta| \leq n} \alpha_{\Delta,m} C_{\Delta}(R), \quad (27)$$

мы обозначаем мономы от C_k диаграммами Юнга по следующему правилу:

$$C_{\Delta} = \prod_{i=1}^{l(\Delta)} C_{\Delta_i}. \quad (28)$$

Равенство (23) выполняется в каждом порядке по \hbar в разложении (26). Более того, поскольку инварианты Васильева зависят только от узла, мы приходим к следующему свойству групповых факторов:

$$r_{n,m}^R \Big|_{N=0} = r_{n,m}^{\mathbf{T}_{\epsilon}(R)} \Big|_{N=0}. \quad (29)$$

В работе ставится более общая задача. Мы рассматриваем линейные комбинации мономов C_{Δ} , которые сохраняются при действии симметрии tug-the-hook. Мы называем эти комбинации **tug-the-hook решения** $Y_{n,m}$. Действительно, групповые факторы $r_{n,m}^R$ - это частный случай этих решений.

Оказывается, что инварианты Казимира C_k преобразуются очень простым образом при действии симметрии tug-the-hook. В следующем разделе 5.1 будут написаны явные формулы и будет показано, что tug-the-hook решения являются однородными полиномами по инвариантам Казимира C_k . Tug-the-hook решения имеют следующий вид:

$$Y_{n,m}(R) := \sum_{|\Delta|=n} \xi_{\Delta}^{(m)} C_{\Delta}(R), \quad (30)$$

$$\boxed{Y_{n,m}(R) = Y_{n,m}(\mathbf{T}_{\epsilon}(R))} \quad (31)$$

где m нумерует независимые решения на уровне n . Обозначим подпространство, натянутое на tug-the-hook решения порядка n , как \mathbf{Y}_n . Тогда m изменяется в пределах $m = 1, \dots, \dim \mathbf{Y}_n$.

$$\mathbf{Y}_n := \text{Span} \left(\bigoplus_m Y_{n,m} \right) \quad (32)$$

Определим градуированное пространство всех tug-the-hook решений

$$\mathbf{Y} := \bigoplus_n \mathbf{Y}_n \quad (33)$$

В данной работе исследуется пространство всех решений \mathbf{Y} . Более точно цели работы могут быть сформулированы следующим образом:

- **Найти число независимых решений на уровне $\dim \mathbf{Y}_n$.**
- **Найти явное выражение для коэффициентов ξ_{Δ} .**

Основная мотивация изучать пространство \mathbf{Y} - это тот факт, что *групповые факторы $r_{n,m}^R$ полинома Александра являются линейными комбинациями tug-the-hook решений*:

$$r_{n,m}^R = \sum_{k \leq n} \sum_{l_k} v_{k,l_k} Y_{k,l_k} \in \bigoplus_{k \leq n} \mathbf{Y}_k \quad (34)$$

Коэффициенты v_{k,l_k} на данный момент нам **неизвестны**, этот вопрос оставлен для будущих исследований.

6 Основные результаты

В этом разделе показано, что построение пространства всех tug-the-hook решений \mathbf{Y} сводится к чистой комбинаторике.

Начнем с количества независимых решений на уровне n :

$$\boxed{\dim \mathbf{Y}_n = p(n) - p(n-1)} \quad (35)$$

где $p(n)$ - это количество диаграмм Юнга с n ящиками. Для малых порядков:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\dim \mathbf{Y}_n$	1	1	1	2	2	4	4	7	8	12	14	21	24	34	41

(36)

Несколько изменим обозначения, чтобы упростить формулы. Здесь и далее в работе используется Y_Λ вместо $Y_{n,m}$, где Λ - это диаграмма Юнга. Тогда формула (30) выглядит следующим образом:

$$Y_\Lambda = \sum_{|\Delta|=|\Lambda|} \xi_\Delta^\Lambda C_\Delta. \quad (37)$$

Построены два линейных базиса в \mathbf{Y}_n . Далее перечислены свойства первого из них:

1. Y_Λ занумеровано диаграммой Юнга вида $\Lambda = [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r]$, где $\Lambda_1 = \Lambda_2 \geq \Lambda_3 \dots \geq \Lambda_r$. Заметим, что первые две строчки диаграммы одинаковой длины.

Этот факт находится в полном соответствии с формулой для размерности (35). Действительно, базисные диаграммы в \mathbf{Y}_n не содержат диаграммы, которые могут быть получены приклеиванием одного дополнительного ящика к первой строчке любой диаграммы на уровне $n-1$. Заметим, что случай $n=1$ - исключение.

Приведены базисные диаграммы вплоть до 8-го уровня:

\mathbf{Y}_1 :

$$\square : Y_{[1]}$$

\mathbf{Y}_2 :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} : Y_{[1,1]}$$

\mathbf{Y}_3 :

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} : Y_{[1,1,1]}$$

\mathbf{Y}_4 :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} : Y_{[2,2]} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} : Y_{[1,1,1,1]}$$

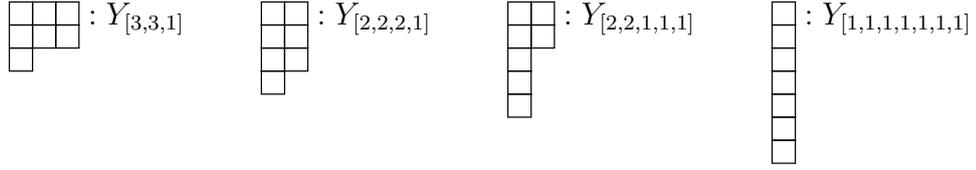
\mathbf{Y}_5 :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} : Y_{[2,2,1]} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} : Y_{[1,1,1,1,1]}$$

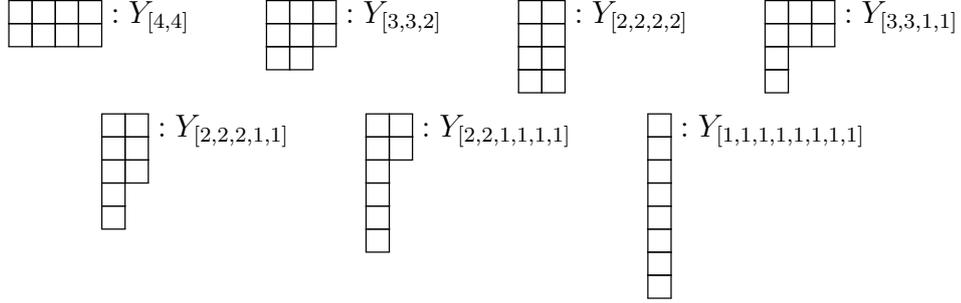
\mathbf{Y}_6 :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} : Y_{[3,3]} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} : Y_{[2,2,2]} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} : Y_{[2,2,1,1]} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} : Y_{[1,1,1,1,1,1]}$$

$Y_7 :$



$Y_8 :$



2. Сумма в формуле (37) сужена на диаграммы Δ со свойством $l(\Delta) = l(\Lambda)$ и $\Delta \geq \Lambda$, где \geq означает лексикографический порядок.

$$Y_\Lambda = \sum_{\substack{|\Delta|=|\Lambda| \\ l(\Delta)=l(\Lambda) \\ \Delta \geq \Lambda}} \xi_\Delta^\Lambda C_\Delta \quad (38)$$

3. Коэффициенты ξ_Δ^Λ устроены следующим образом:

$$\xi_\Delta^\Lambda = (-1)^{\Delta_1 - \Lambda_1} \frac{\mu_\Delta^\Lambda}{\prod_i \Delta_i!} \quad (39)$$

где μ_Δ^Λ - это целочисленный коэффициент, его описание будет дано в разделе 5.2.

Для наглядности приведен линейный базис вплоть до 8-го порядка:

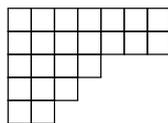
$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_1 : Y_{[1]} &= C_{[1]} \\
\mathbf{Y}_2 : Y_{[1,1]} &= C_{[1,1]} \\
\mathbf{Y}_3 : Y_{[1,1,1]} &= C_{[1,1,1]} \\
\mathbf{Y}_4 : Y_{[2,2]} &= \frac{1}{2!2!}C_{[2,2]} - \frac{2}{3!}C_{[3,1]} \\
Y_{[1,1,1,1]} &= C_{[1,1,1,1]} \\
\mathbf{Y}_5 : Y_{[2,2,1]} &= \frac{1}{2!2!}C_{[2,2,1]} - \frac{2}{3!}C_{[3,1,1]} \\
Y_{[1,1,1,1,1]} &= C_{[1,1,1,1,1]} \\
\mathbf{Y}_6 : Y_{[3,3]} &= \frac{1}{3!3!}C_{[3,3]} - \frac{2}{4!2!}C_{[4,2]} + \frac{2}{5!}C_{[5,1]} \\
Y_{[2,2,2]} &= \frac{1}{2!2!2!}C_{[2,2,2]} - \frac{3}{3!2!}C_{[3,2,1]} + \frac{3}{4!}C_{[4,1,1]} \\
Y_{[2,2,1,1]} &= \frac{1}{2!2!}C_{[2,2,1,1]} - \frac{2}{3!}C_{[3,1,1,1]} \\
Y_{[1,1,1,1,1,1]} &= C_{[1,1,1,1,1,1]} \\
\mathbf{Y}_7 : Y_{[3,3,1]} &= \frac{1}{3!3!}C_{[3,3,1]} - \frac{2}{4!2!}C_{[4,2,1]} + \frac{2}{5!}C_{[5,1,1]} \\
Y_{[2,2,2,1]} &= \frac{1}{2!2!2!}C_{[2,2,2,1]} - \frac{3}{3!2!}C_{[3,2,1,1]} + \frac{3}{4!}C_{[4,1,1,1]} \\
Y_{[2,2,1,1,1]} &= \frac{1}{2!2!}C_{[2,2,1,1,1]} - \frac{2}{3!}C_{[3,1,1,1,1]} \\
Y_{[1,1,1,1,1,1,1]} &= C_{[1,1,1,1,1,1,1]} \\
\mathbf{Y}_8 : Y_{[4,4]} &= \frac{1}{4!4!}C_{[4,4]} - \frac{2}{5!3!}C_{[5,3]} + \frac{2}{6!2!}C_{[6,2]} - \frac{2}{7!}C_{[7,1]} \\
Y_{[3,3,2]} &= \frac{1}{3!3!2!}C_{[3,3,2]} - \frac{2}{4!2!2!}C_{[4,2,2]} - \frac{1}{4!3!}C_{[4,3,1]} + \frac{5}{5!2!}C_{[5,2,1]} - \frac{5}{6!}C_{[6,1,1]} \\
Y_{[3,3,1,1]} &= \frac{1}{3!3!}C_{[3,3,1,1]} - \frac{2}{4!2!}C_{[4,2,1,1]} + \frac{2}{5!}C_{[5,1,1,1]} \\
Y_{[2,2,2,2]} &= \frac{1}{2!2!2!2!}C_{[2,2,2,2]} - \frac{4}{3!2!2!}C_{[3,2,2,1]} + \frac{8}{4!2!}C_{[4,2,1,1]} - \frac{8}{5!}C_{[5,1,1,1]} \\
Y_{[2,2,2,1,1]} &= \frac{1}{2!2!2!}C_{[2,2,2,1,1]} - \frac{3}{3!2!}C_{[3,2,1,1,1]} + \frac{3}{4!}C_{[4,1,1,1,1]} \\
Y_{[2,2,1,1,1,1]} &= \frac{1}{2!2!}C_{[2,2,1,1,1,1]} - \frac{2}{3!}C_{[3,1,1,1,1,1]} \\
Y_{[1,1,1,1,1,1,1,1]} &= C_{[1,1,1,1,1,1,1,1]}
\end{aligned}$$

Переходим ко второму линейному базису. Пространство всех решений \mathbf{Y} имеет структуру градуированной алгебры полиномов

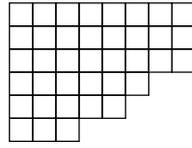
$$\mathbf{Y}_n \times \mathbf{Y}_m \rightarrow \mathbf{Y}_{n+m}. \quad (40)$$

Далее представлен мультипликативный базис в \mathbf{Y} . Этот базис является подмножеством первого линейного базиса, элементы мультипликативного базиса занумерованы диаграммами трех типов:

- Диаграммы с двумя первыми одинаковыми строчками, длины остальных строчек строго убывают:
 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$, где $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_r \geq 2$



- Диаграммы с тремя первыми одинаковыми строчками, длины остальных строчек строго убывают:
 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]$, где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > \dots > \lambda_r \geq 2$



- $\lambda = [1]$

□

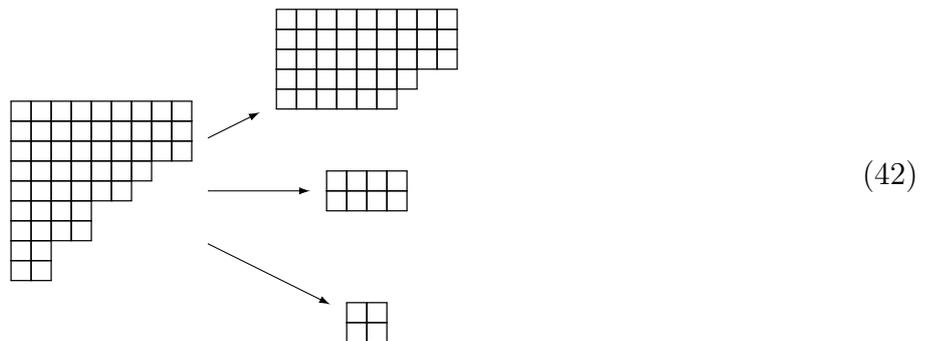
Базисные элементы второго линейного базиса выражаются как произведения элементов мультипликативного базиса. Перечислим элементы мультипликативного базиса вплоть до 8-го порядка:

$$Y_{[1]}, \quad Y_{[2,2]}, \quad Y_{[3,3]}, \quad Y_{[2,2,2]}, \quad Y_{[3,3,2]}, \quad Y_{[4,4]}. \quad (41)$$

Используя их, можно построить базисные элементы второго линейного базиса вплоть до 8-го порядка:

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
$Y_{[1]}$	$Y_{[1]}^2$	$Y_{[1]}^3$	$Y_{[1]}^4$	$Y_{[1]}^5$	$Y_{[1]}^6$	$Y_{[1]}^7$	$Y_{[1]}^8$
			$Y_{[2,2]}$	$Y_{[2,2]}Y_{[1]}$	$Y_{[2,2]}Y_{[1]}^2$	$Y_{[2,2]}Y_{[1]}^3$	$Y_{[2,2]}Y_{[1]}^4$
					$Y_{[2,2,2]}$	$Y_{[2,2,2]}Y_{[1]}$	$Y_{[2,2,2]}Y_{[1]}^2$
					$Y_{[3,3]}$	$Y_{[3,3]}Y_{[1]}$	$Y_{[3,3]}Y_{[1]}^2$
							$Y_{[2,2]}^2$
							$Y_{[3,3,2]}$
							$Y_{[4,4]}$

Во втором линейном базисе просматривается красивая структура, которая дает алгоритм вычисления элементов линейного базиса и может быть обобщена на любой порядок n . Рассмотрим любую диаграмму, соответствующую элементу из первого линейного базиса. "Разрежем" эту диаграмму на диаграммы из мультипликативного базиса:



Используя формулы (38) и (39), получим явные выражения для элементов мультипликативного базиса. Перемножая их, получаем выражения для элементов линейного базиса.

6.1 Действие симметрии tug-the-hook на инвариантах Казимира

В этом разделе обсуждается метод явного вычисления решений tug-the-hook. Для этого мы выбираем базис в центре универсальной обертывающей алгебры $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ в следующей форме:

$$C_n(R) = \sum_{i=1}^{l(R)} (R_i - i + 1/2)^n - (-i + 1/2)^n. \quad (43)$$

Этот конкретный вид базиса выделен по следующим причинам. Соответствующая статсумма Гурвица [25] становится τ -функцией иерархии КП [23], и в терминах статсуммы Гурвица этот базис соответствует полным циклам и устанавливает связь с теорией Громова-Виттена [24]. Последующие вычисления становятся проще в обозначениях Фробениуса (21). Обозначим количество крюков в диаграмме Юнга R как $h(R)$, тогда

$$C_n(R) = \sum_{k=1}^{h(R)} (\alpha_k - 1/2)^n - (-\beta_k + 1/2)^n. \quad (44)$$

Симметрия tug-the-hook действует на инвариантах Казимира как **трансляция**:

$$C_n(\mathbf{T}_\epsilon(R)) = \sum_i (\alpha_i + \epsilon - 1/2)^n - (-\beta_i - (-\epsilon) + 1/2)^n = \sum_{p=0}^{n-1} \epsilon^p \binom{n}{p} C_{n-p}(R). \quad (45)$$

Эта формула позволяет изучать действие симметрии tug-the-hook на произвольных мономах от инвариантов Казимира:

$$C_\Delta(\mathbf{T}_\epsilon(R)) = \sum_{p=0}^n \sum_{k_1+\dots+k_{l(\Delta)}=p} \epsilon^p \left[\prod_{i=1}^{l(\Delta)} \binom{\Delta_i}{k_i} C_{\Delta_i-k_i}(R) \right]. \quad (46)$$

Рассмотрим уравнения симметрии порядка n (31) и найдем условия на коэффициенты ξ_Δ . По определению tug-the-hook решения сохраняются при действии симметрии. При этом мономы от инвариантов Казимира становятся полиномами по переменной ϵ (46). Мы требуем зануления коэффициентов при всех положительных степенях ϵ , чтобы получить инвариантные комбинации.

Прямое вычисление показывает, что независимые условия приходят только из коэффициента при ϵ^1 , а другие условия являются их линейными комбинациями. Из этого факта можно заключить, что сумма в (30) включает в себя только слагаемые с диаграммами Юнга порядка n . Получается, что независимые условия приходят только из зануления коэффициента при ϵ^1 :

$$0 = \sum_{|\Delta|=n} \xi_\Delta \sum_{j=1}^{l(\Delta)} \binom{\Delta_j}{1} C_{\Delta_j-1} \prod_{i \neq j} C_{\Delta_i}. \quad (47)$$

В (47) сумма идет по диаграммам на уровне $|\Delta|$. Вся сумма является на самом деле линейной комбинацией инвариантов Казимира на уровне $(|\Delta| - 1)$. Представим (47) в матричном виде:

$$\sum_{|\Delta|=n} \mathbf{M}_{\delta,\Delta}^{(n)} \xi_\Delta = 0, \quad (48)$$

где $|\delta| = n - 1$. У матрицы $\mathbf{M}_{\delta,\Delta}^{(n)}$ есть два индекса δ, Δ , которые являются диаграммами Юнга. Диаграммы δ упорядочены в наборы возрастающей длины $l(\delta)$. В каждом таком наборе фиксированной длины $l(\delta)$ диаграммы упорядочены в лексикографическом порядке. Диаграммы Δ разбиты на два поднабора. В первый поднабор входят диаграммы с разной длиной первой и второй строк. Во второй поднабор входят оставшиеся диаграммы на уровне. Диаграммы в каждом поднаборе упорядочены в лексикографическом порядке δ . Пример в 6 порядке $\mathbf{M}^{(6)}$:

$\delta \backslash \Delta$											
	$\binom{6}{1}$										
		$\binom{5}{1}$	$\binom{2}{1}$								
			$\binom{4}{1}$					$2 \cdot \binom{3}{1}$			
				$\binom{4}{1}$	$\binom{2}{1}$						
					$\binom{3}{1}$				$3 \cdot \binom{2}{1}$		
						$\binom{3}{1}$				$2 \cdot \binom{2}{1}$	
							$\binom{2}{1}$				

В пустых клетках опущены нули. На пересечении столбца $[3, 3]$ и строки $[3, 2]$ стоит число $2 \cdot 3$, потому что в сумме (47) есть два ненулевых члена для $j = 1$ и $j = 2$.

Мы расположили диаграммы δ, Δ в матрице в правильном порядке, поэтому занулились элементы под диагональю. Решения просто получаются из линейной алгебры. Становится понятно, почему диаграммы с одинаковой длиной первой и второй строки нумеруют решения. Из вида матрицы также видно происхождение формулы для размерности пространства решений (35).

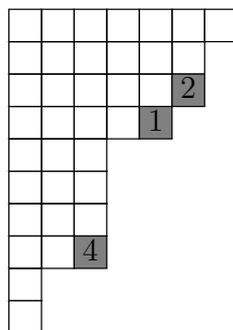
6.2 Описание коэффициентов μ_{Δ}^{Λ}

Форма коэффициентов μ_{Δ}^{Λ} следует из явного вида матриц $\mathbf{M}^{(n)}$. В этом разделе определение данных коэффициентов будет переформулировано в терминах чистой комбинаторики.

Мы строим взвешенный граф Γ_{Δ} . Вершины графа - это диаграммы Юнга Δ из суммы (38). Граф имеет уровни слева направо согласно количеству ящиков в первой строке диаграммы, т.е. диаграмма Λ находится в самой левой вершине.

Количество выходящих ребер e в каждой вершине равно количеству **угловых ящиков**. Угловой ящик определен следующим образом: слева и сверху от него есть соседние ящики, а снизу и справа нет соседних.

Определим **валентность** углового ящика. Валентность определяется как количество строчек в диаграмме, которые имеют ту же длину, что и строчка с угловым ящиком. Чтобы продемонстрировать новые определения, приведем пример:



Здесь выделены угловые ящики и их валентность.

Как было сказано, есть соответствие между угловыми ящиками и выходящими ребрами диаграммы в каждой вершине. Каждое ребро соединяет две диаграммы в вершинах и взвешено с весом, равным валентности углового ящика w_e . Диаграмма в конце каждого ребра получена из диаграммы в начале ребра следующим образом: соответствующий угловой ящик вырезан и приклеен в первую строчку диаграммы. Заметим, что самая правая диаграмма в каждом графе однокрюковая, потому что она не содержит угловых ящиков.

Ответ для коэффициента μ_{Δ}^{Λ} получается как сумма взвешенных путей из вершины Λ в вершину Δ на графе Γ_{Λ} :

$$\mu_{\Delta}^{\Lambda} = \sum_{\text{paths } \Lambda \rightarrow \Delta} \prod_{e \in \text{path}} w_e \quad (49)$$

Если граф Γ_{Λ} не включает вершину Δ , значит путей нет и $\mu_{\Delta}^{\Lambda} = 0$. Приведем примеры вычисления:

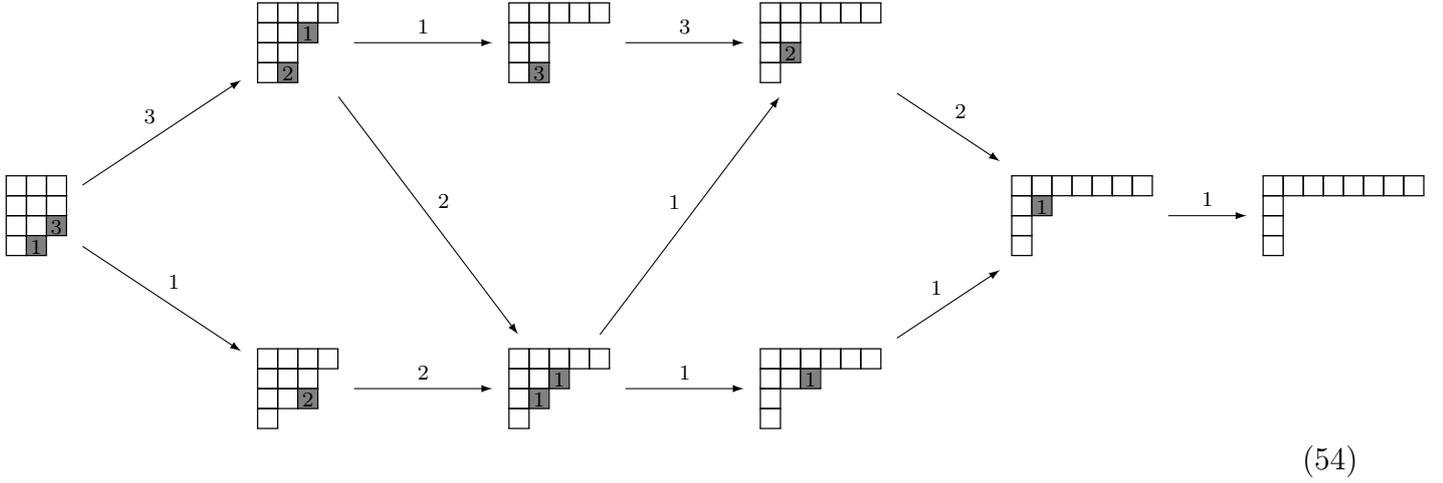
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{2} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{2} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \mu_{[3,1]}^{[2,2]} & = & 2 \end{array} \quad (50)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{2} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{2} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{1} & \square \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \mu_{[4,2]}^{[3,3]} & = & 2 & \quad & \mu_{[5,1]}^{[3,3]} & = & 2 \cdot 1 \end{array} \quad (51)$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{3} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{3} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{1} & \square \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \\ \mu_{[3,2,1]}^{[2,2,2]} & = & 3 & \quad & \mu_{[4,1,1]}^{[2,2,2]} & = & 3 \cdot 1 \end{array} \quad (52)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{2} & \square \\ \hline \end{array} & & \\ & \nearrow 2 & & \searrow 2 & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{2} \\ \hline \square & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} & & & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \mathbf{1} & \square & \square \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{1} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} \\ & \searrow 1 & & \nearrow 1 & & \\ & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} & & \end{array} \quad (53)$$

$$\mu_{[4,2,2]}^{[3,3,2]} = 2 \quad \mu_{[4,3,1]}^{[3,3,2]} = 1 \quad \mu_{[5,2,1]}^{[3,3,2]} = (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) \quad \mu_{[6,1,1]}^{[3,3,2]} = (2 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 1)$$



$$\begin{aligned}
\mu_{[4,3,2,2]}^{[3,3,3,2]} &= 3 & \mu_{[4,3,3,1]}^{[3,3,3,2]} &= 1 & \mu_{[5,2,2,2]}^{[3,3,3,2]} &= 3 \cdot 1 & \mu_{[5,3,2,1]}^{[3,3,3,2]} &= (3 \cdot 2) + (1 \cdot 2) \\
\mu_{[6,2,2,1]}^{[3,3,3,2]} &= (3 \cdot 1 \cdot 3) + (3 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1) & \mu_{[6,3,1,1]}^{[3,3,3,2]} &= (3 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1) \\
\mu_{[7,2,1,1]}^{[3,3,3,2]} &= (3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2) + (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) \\
\mu_{[8,1,1,1]}^{[3,3,3,2]} &= (3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1)
\end{aligned}$$

7 Связь с гипотезой о собственных значениях

На данном этапе исследований мы не располагаем полным математическим доказательством существования у полинома Александра симметрии tug-the-hook. Используя подход Решетихина-Тураева, мы рассматриваем две компоненты в общей формуле для цветного полинома Александра: следы по пространству кратностей и квантовые размерности. Можно показать, что квантовые размерности сохраняются при действии симметрии. Инвариантность следов следует из гипотезы о собственных значениях.

Согласно формуле (15) мы получаем выражение для цветного полинома Александра для n -нитевого узла раскрашено представлением R как сумму по диаграммам Юнга, которые появляются в n -ой тензорной степени R :

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) = \sum_{\substack{Q \vdash n|R| \\ h(Q)=h(R)}} \sigma_Q(\beta^{\mathcal{K}}) \frac{s_Q^*}{s_R^*}, \quad (55)$$

где $h(R)$ - это количество крюков в диаграмме R и s_R^* - это квантовые размерности (16). Оказывается, что разложение для $\mathcal{A}_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^{\mathcal{K}}$ может быть получено следующей подстановкой в формулу (55):

$$Q \rightarrow \mathbf{T}_{n,\epsilon}(Q), \quad R \rightarrow \mathbf{T}_\epsilon(R). \quad (56)$$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^{\mathcal{K}}(q) = \sum_{\substack{Q \vdash n|R| \\ h(Q)=h(R)}} \sigma_{\mathbf{T}_{n,\epsilon}(Q)}(\beta^{\mathcal{K}}) \frac{s_{\mathbf{T}_{n,\epsilon}(Q)}^*}{s_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^*} \quad (57)$$

Заметим, что представление R деформировано с параметром ϵ , в то время как представление Q деформировано с $n\epsilon$. Симметрия tug-the-hook (23) говорит о том, что суммы (55) и (57) равны. Неожиданно получается, что эти суммы равны **почленно**:

$$\sigma_Q(\beta^{\mathcal{K}}) = (-1)^{\epsilon \cdot (n-1) \cdot h(R)} \sigma_{\mathbf{T}_{n,\epsilon}(Q)}(\beta^{\mathcal{K}}) \quad (58)$$

$$\left. \frac{s_Q^*}{s_R^*} \right|_{N=0} = (-1)^{\epsilon \cdot (n-1) \cdot h(R)} \left. \frac{s_{\mathbf{T}_{n\epsilon}(Q)}^*}{s_{\mathbf{T}_{\epsilon}(R)}^*} \right|_{N=0} \quad (59)$$

Заметим, что знаки в формуле для следов и квантовых размерностей точно сокращаются. Обсудим некоторые моменты более детально:

- Самая простая часть - это квантовые размерности. Явная формула обобщает известную формулу крюков для размерности классических представлений $SU(N)$:

$$s_Q^* = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{[N - i + j]}{[h_{ij}]} \quad (60)$$

$$h_{ij} := Q_i - i + Q'_j - j + 1, \quad [n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

В случае полинома Александра в этой формуле мы должны взять предел $N \rightarrow 0$. В этом пределе все квантовые размерности формально нули, тем не менее в формулу (55) входят лишь отношения квантовых размерностей, которые могут быть ненулевыми. В аппендиксе А показано, что для произвольного представления R квантовая размерность может лишь изменить знак под действием симметрии:

$$\boxed{\left. \frac{s_{\mathbf{T}_{\epsilon}(R)}^*}{s_R^*} \right|_{N=0} = (-1)^{\epsilon \cdot h(R)} \quad (61)}$$

Из этого свойства квантовых размерностей следует, что выполнено (59).

- Напомним, что количество крюков в диаграмме обозначено как $h(R)$. Заметим, что $h(Q) \geq h(R)$ для диаграмм Q , которые входят в тензорное произведение $R^{\otimes n}$ по правилу Литтлвуда-Ричардсона. Из явной формулы для квантовых размерностей (60) в случае $N = 0$ числитель обращается в ноль на диагональных ящиках. Это значит, что отношение s_Q^*/s_R^* имеет ноль в степени $h(Q) - h(R)$, поэтому в сумме (55) выживают лишь члены, для которых выполнено $h(Q) = h(R)$.
- Гипотеза о собственных значениях была сформулирована в работе [26]. Одна из возможных формулировок выглядит следующим образом: **набор квантовых \mathcal{R}_i -матриц полностью задается нормированными собственными значениями универсальной $\tilde{\mathcal{R}}$ -матрицы.**
- Собственные значения λ_W \mathcal{R} -матрицы обречены на неприводимыми представлениями V_W , которые появляются в тензорном квадрате V_R :

$$V_R^{\otimes 2} = \bigoplus_{W \vdash 2|R|} V_W \quad (62)$$

$$\lambda_W := \pm q^{\varkappa(W) - 4\varkappa(R) - N|R|} \Big|_{N=0} \quad (63)$$

$$\varkappa(W) := \sum_{(i,j) \in W} (j - i) \quad (64)$$

Знак в формуле (63) зависит от того, принадлежит W симметрической или антисимметрической части тензорного квадрата. Напомним, что в случае полинома Александра мы

кладем $N = 0$.

Обозначим за $\{\lambda\}_R$ множество собственных значений \mathcal{R} -матрицы, которые возникают в полиноме Александера с представлением R . Нам важны только собственные значения λ_W , для которых выполнено $h(W) = h(R)$, поэтому в формуле (55) сумма идет по представлениям Q , для которых выполнено условие $h(Q) = h(R)$.

$$\{\lambda\}_R = \{\lambda_W \mid V_W \in V_R^{\otimes 2}, h(W) = h(R)\} \quad (65)$$

Было обнаружено, что аналогичное множество собственных значений для полинома Александера с представлением $\mathbf{T}_\epsilon(R)$ устроено следующим образом

$$\{\lambda\}_{\mathbf{T}_\epsilon(R)} = \{\lambda_{\hat{W}} \mid V_{\hat{W}} \in V_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^{\otimes 2}, h(\hat{W}) = h(R)\} \quad (66)$$

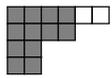
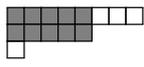
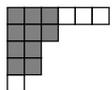
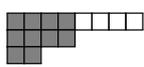
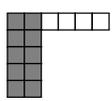
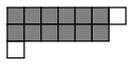
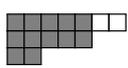
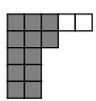
где

$$\hat{W} = \mathbf{T}_{2,\epsilon}(W). \quad (67)$$

Из формул (67) и (45) и того факта, что $\varkappa(W)$ пропорциональна второму Казимиру $C_2(W)$, мы заключаем, что собственные значения совпадают в этих случаях

$$\boxed{\lambda_W = \lambda_{\mathbf{T}_{2,\epsilon}(W)}}. \quad (68)$$

Приведем примеры для представлений $\mathbf{T}_{-1}([4, 3]) = [3, 2, 2]$. Ниже перечислены диаграммы, которые возникают в полиноме Александера. Левая колонка соответствует случаю $[4, 3]$, а правая $[3, 2, 2]$.

		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-1}}$		
$\lambda_{[8,6]} = q^{13}$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[6,4,2,2]} = q^{13}$
$\lambda_{[8,5,1]} = -q^7$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[6,3,2,2,1]} = -q^7$
$\lambda_{[8,4,2]} = q^3$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[6,2,2,2,2]} = q^3$
$\lambda_{[7,7]} = -q^{11}$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[5,5,2,2]} = -q^{11}$
$\lambda_{[7,6,1]} = q^4$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[5,4,2,2,1]} = q^4$
$\lambda_{[7,5,2]} = q^{-1}$		$\xrightarrow{\mathbf{T}_{-2}}$		$\lambda_{[5,3,2,2,2]} = q^{-1}$

$\lambda_{[7,5,1,1]} = q^{-3}$		$\lambda_{[5,3,2,2,1,1]} = q^{-3}$
$\lambda_{[7,4,2,1]} = -q^{-7}$		$\lambda_{[5,2,2,2,2,1]} = -q^{-7}$
$\lambda_{[6,6,2]} = q^{-3}$		$\lambda_{[4,4,2,2,2]} = q^{-3}$
$\lambda_{[6,6,1,1]} = -q^{-5}$		$\lambda_{[4,4,2,2,1,1]} = -q^{-5}$
$\lambda_{[6,5,2,1]} = q^{-10}$		$\lambda_{[4,3,2,2,2,1]} = q^{-10}$
$\lambda_{[6,4,2,2]} = q^{-15}$		$\lambda_{[4,2,2,2,2,2]} = q^{-15}$
$\lambda_{[5,5,2,2]} = -q^{-17}$		$\lambda_{[3,3,2,2,2,2]} = -q^{-17}$

Из формулы (68) мы заключаем, что множества собственных значений совпадают:

$$\{\lambda\}_R = \{\lambda\}_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}. \quad (69)$$

Это позволяет нам применить гипотезу о собственных значениях и получить (58):

$$\sigma_Q(\beta^K) = (-1)^{\epsilon \cdot (n-1) \cdot h(R)} \sigma_{\mathbf{T}_{n,\epsilon}(Q)}(\beta^K) \quad (70)$$

Заметим, что более аккуратное вычисление показывает, что знак, который появляется при действии симметрии tug-the-hook, точно сокращается со знаком, который приходит из квантовых размерностей.

8 Заключение

В заключение кратко приведем факты, говорящие в пользу существования данной симметрии:

- Компьютерная проверка подтверждает существование симметрии для множества классов полиномов Александера. В основном мы проверили симметрию для торических узлов для большого количества представлений.
- Симметрия объясняет зануление коэффициента при \hbar^5 в петлевом разложении полинома Александера. Этот факт точно известен из подхода, использующего подсчет тривалентных диаграмм. Все тривалентные диаграммы в пятом порядке известны, и явно видно зануление соответствующего коэффициента. Тем не менее, это не очевидно *a priori*, без явного вычисления всех тривалентных диаграмм. Симметрия tug-the-hook вместе с другими свойствами полинома Александера (однокрюковое свойство) отбрасывают все полиномы от инвариантов Казимира на пятом уровне.

Действительно, в работе [1] было показано, что решения для однокрюкового свойства, которые могут появиться в пятом порядке могут быть только линейной комбинацией полиномов в Таблице 1. Также было показано, что из-за rank-level дуальности на пятом

уровне может появиться только $X_{5,1}$. В конце концов, симметрия tug-the-hook запрещает это решение, потому что оно не уважает симметрию tug-the-hook.

Этот замечательный факт говорит в поддержку симметрии tug-the-hook.

- Симметрия тесно связана с гипотезой о собственных значениях. Можно привести аргумент в пользу гипотезы о собственных значениях, основанный на существовании симметрии tug-the-hook, этот аргумент работает и в другую сторону. Гипотеза о собственных значениях проверена во множестве случаев (см. раздел 2.3 в [27] для обзора проверок гипотезы о собственных значениях). В разделе 6 мы показали, что симметрия - это следствие гипотезы о собственных значениях, что говорит в пользу существования симметрии.

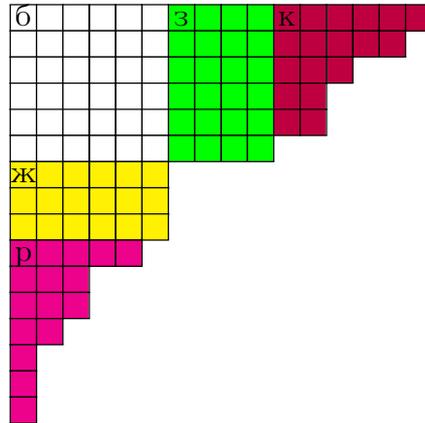
Тем не менее, эти факты не доказывают существование симметрии tug-the-hook, однако дают разумное объяснение ее правдивости. Доказательство оставлено для будущих исследований.

А Квантовые размерности

В этом разделе показано, что квантовые размерности могут лишь изменить знак под действием симметрии tug-the-hook.

Рассмотрим произвольную диаграмму R как объединение 5 частей.

1. Белая часть размера $h \times h$, где h - это количество крюков
2. Зеленая часть размера $g \times h$
3. Желтая часть размера $y \times h$
4. Красная часть состоит из $h - 1$ строчек длины r_1, r_2, \dots, r_{h-1} соответственно
5. Розовая часть состоит из $h - 1$ столбцов высоты p_1, p_2, \dots, p_{h-1} соответственно



Формула для квантовой размерности неприводимого представления R

$$s_R^* = \prod_{(i,j) \in R} \frac{[N - i + j]}{[h_{ij}]} = \prod_{\text{color parts}} \prod_{(i,j) \in \text{part}} \frac{[N - i + j]}{[h_{ij}]} \quad (71)$$

Нас интересует случай $N = 0$. Заметим, что:

1. **Белая** часть в произведении (71) не изменяется при действии симметрии.
2. Крюковая часть (знаменатели), соответствующая **красной** и **розовой** частям, не изменяются при действии симметрии.

Рассмотрим **зеленую** и **желтую** части полностью и числители **красной** и **розовой** частей. Для этого рассмотрим i -ую строку в **красной** части и соответствующую строку в **зеленой** части. Вклад в произведение от этих строк:

$$\left(\frac{[r_i + g + h - i]!}{[h - i]!} \right)_{\text{крас. и зел. числ.}} \left(\frac{[r_i + h - i]!}{[r_i + g + h - i]!} \right)_{\text{желт. знам.}} = \frac{[r_i + h - i]!}{[h - i]!}. \quad (72)$$

Видно, что данный вклад в произведение **не зависит** от **зеленой** и **желтой** частей, а именно g, y не появляются в ответе. Это означает, что эта часть сохраняется при действии симметрии. Далее, рассмотрим i -ый столбец в розовой части и соответствующий столбец в желтой:

$$\left((-1)^{p_i+y} \frac{[p_i + y + h - i]!}{[h - i]!} \right)_{\text{роз. и желт. числ.}} \left(\frac{[p_i + h - i]!}{[p_i + y + h - i]!} \right)_{\text{желт. знам.}} = (-1)^{p_i+y} \frac{[p_i + h - i]!}{[h - i]!}. \quad (73)$$

Вклад зависит от y как $(-1)^y$. Этот множитель $(-1)^y$ приходит из каждого **желтого** столбца, и результирующий фактор будет $(-1)^{yh}$. Под действием симметрии изменяются только y, g , они сдвигаются как $y \rightarrow y - \epsilon$ и $g \rightarrow g + \epsilon$. Рассматривая отношение квантовых размерностей, получаем

$$\left. \frac{s_{\mathbf{T}_\epsilon(R)}^*}{s_R^*} \right|_{N=0} = (-1)^{\epsilon \cdot h(R)},$$

потому что все вклады, кроме множителей $(-1)^y$, сокращаются.

Список литературы

- [1] A. Mironov, S. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Sleptsov Phys.Lett. **B783** (2018) 268-273 arXiv:1805.02761
V. Mishnyakov, A. Sleptsov arXiv:1906.05813
- [2] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov J. High Energ. Phys. (2012) 2012: **131**, arXiv:1203.5978
- [3] Zhu, S. J. High Energ. Phys. (2013) 2013: **229**, arXiv:1206.5886
- [4] A. Mironov, A. Morozov: Eigenvalue conjecture and colored Alexander polynomials. Eur. Phys. J. **C78** (2018) 284, arXiv:1610.03043
- [5] E. Witten, Comm.Math.Phys. **121** (1989) 351
- [6] S.-S. Chern, J. Simons, Ann.Math. **99** (1974) 48-69
- [7] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, Clausthal 1989, Procs. 307-317; Phys.Lett. **B235** (1990) 275
R.K. Kaul, T.R. Govindarajan, Nucl.Phys. **B380** (1992) 293-336, hep-th/9111063; *ibid.* **B393** (1993) 392-412
P. Ramadevi, T.R. Govindarajan, R.K. Kaul, Nucl.Phys. **B402** (1993) 548-566, hep-th/9212110; Nucl.Phys. **B422** (1994) 291-306, hep-th/9312215; Mod.Phys.Lett. **A10** (1995) 1635-1658, hep-th/9412084
- [8] V.G. Turaev, O.Y. Viro, Topology 31, 865 (1992)
A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, JHEP **03** (2012) 034, arXiv:1112.2654
A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Nucl.Phys. **B868** (2013) 271-313, arXiv:1207.0279
A. Anokhina, An. Morozov, Theor.Math.Phys. 178 (2014) 1-58, arXiv:1307.2216

- [9] R.K. Kaul, T.R. Govindarajan, Nucl.Phys. **B380** (1992) 293-336, hep-th/9111063
P. Ramadevi, T.R. Govindarajan, R.K. Kaul, Nucl.Phys. **B402** (1993) 548-566, hep-th/9212110;
Nucl.Phys. **B422** (1994) 291-306, hep-th/9312215
Zodinmawia, P. Ramadevi, arXiv:1107.3918; arXiv:1209.1346
- [10] H. Ooguri, C. Vafa, Nucl.Phys. **B577** (2000) 419-438, arXiv:hep-th/9912123
J.M.F. Labastida, M. Mariño, Commun.Math.Phys. **217** (2001) 423-449, hep-th/0004196
J.M.F. Labastida, M. Mariño, C. Vafa, JHEP **0011** (2000) 007, hep-th/0010102
J.M.F. Labastida, M. Mariño, math/0104180
M. Mariño, C. Vafa, hep-th/0108064
- [11] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. (1990) *Chern-Simons field theory and quantum groups*. In: Doebner H.D., Hennig J.D. (eds) Quantum Groups. Lecture Notes in Physics, vol 370. Springer, Berlin, Heidelberg
- [12] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, *Chern-Simons holonomies and the appearance of quantum groups*, Phys.Lett. **B235** (1990) 275
- [13] N.Yu. Reshetikhin, V.G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm.Math.Phys. **127** (1990) 1-26
- [14] K. Liu, P. Peng, J. Differential Geom., Volume 85, Number 3 (2010), 479-525, arXiv:0704.1526
- [15] D. Bar-Natan, J.Knot Theor.Ramifications **4** (1995) 503-547
A. Sleptsov, Int. J. Mod. Phys. A, **29**, 1430063 (2014)
- [16] X.-S. Lin, H. Zheng, Trans.Amer.Math.Soc. **362** (2010) 1-18 math/0601267
- [17] P.R.Cromwell, *Knots and links*, Cambridge university press, 2004.
- [18] J.M.F. Labastida, E. Perez, J.Math.Phys. **39** (1998) 5183-5198, hep-th/9710176
P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov A. Smirnov, Int.J.Mod.Phys. **A28** (2013) 1330025, arXiv:1112.5406
- [19] A. Kirillov and N. Reshetikhin, *Representations of the Algebra $U_q(sl_2)$, q -Orthogonal Polynomials and Invariants of Links*. New Developments in the Theory of Knots: pp. 202-256, World Scientific, Singapore (1990)
- [20] M. Rosso, V. F. R. Jones, J. Knot Theory Ramifications, **2** (1993) 97-112
- [21] S. Chmutov, S. Duzhin, *The Kontsevich integral*, Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006
- [22] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, arXiv:1103.5628
- [23] S.Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, Int.J.Mod.Phys. **A10** (1995) 2015, arXiv:hep-th/9312210
A.Yu. Orlov, D.M. Scherbin, Physica D, **152–153** (2001) 51-65, arXiv:math-ph/0003011
- [24] A. Okounkov, R. Pandharipande, Ann. of Math. **163** (2006) 517, math.AG/0204305
- [25] A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, Theor.Math.Phys. **166** (2011) 1-22, arXiv:0904.4227;
Journal of Geometry and Physics **62** (2012) 148-155, arXiv:1012.0433
- [26] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Int.J.Mod.Phys. **A28** (2013) 1340009, arXiv:1209.6304

- [27] S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V.K. Singh, A. Sleptsov, *Multi-colored Links From 3-Strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations*, Annales Henri Poincaré, Vol. 20, No. 12, pp. 4033-4054, Springer International Publishing, arXiv:1805.03916
- [28] R.Stanley *Enumerative Combinatorics, v.2*, Cambridge University Press, 1999 (p.461)
- [29] T. Miwa, Masaki Jimbo, M. Jimbo, E. Date, *Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press, 2000.