ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(Государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Киральный Вихревой Эффект для фотонов.

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:
студент группы М02-821
Васильев Алексей Игоревич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Захаров В. И.

Долгопрудный
2020

Содержание

1 Введение

Данный диплом посвящен физике киральных эффектов. Тема киральных эффектов – область крайне разветвленная с очень большим объемом литературы. Естественно, в нашей работе пойдет речь об очень частных аспектах общей тематики. Во введении мы кратко обрисуем место вопросов, затронутых в дипломе, на общей карте теоретической физики.

Простейший случай реализации киральной симметрии- теория свободных безмассовых фермионов. Пусть безмассовая дираковская частица описывается полем Ψ. Киральная симметрия есть симметрия лагранжиана относительно фазовых преобразований поля Ψ:

$$\Psi \ \rightarrow \ \exp(i\alpha)\Psi \ , \qquad \Psi \ \rightarrow \ \exp(i\alpha\gamma^5)\Psi \ \ , \tag{1}$$

где α - фаза, γ^5- матрица Дирака. Соответственно, есть сохраняющиеся векторный и аксиальный токи:

$$J_V^\mu \ = \ \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \ , \qquad J_A^\mu \ = \ \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi. \tag{2}$$

Аксиальный ток сохраняется только для случая $m = 0$. Стандартные учебники квантовой теории поля в первую очередь рассматривают случай слабой константы связи, так что фермионные поля Ψ могут быть отождествлены с полями описывающими наблюдаемые частицы. Киральная симметрия является неотъемлемой частью теории элементарных частиц со времени открытия структуры слабых взаимодействий в 1957 году.

Относительно недавно, то есть на протяжении примерно последних десяти лет, интенсивно развивается область моделей с киральной симметрией в режиме сильной связи (сборник обзоров [1]). В этом случае речь может идти о жидкости, а безмассовость будет относиться к ненаблюдаемым элементарным составляющим. Относительно взаимодействия составляющих предполагается только, что оно сохраняет свойство киральной инвариантности, которое проще всего обсуждать на примере свободных полей.

Связь между квантовой теорией поля и статистической физикой (которая занимается теорией равновесных жидкостей) выявилась особенно ясно при обсуждении киральных эффектов (см. [1]), которые интересны потому, что являются макроскопическим проявлением квантовой аномалии.

Впервые это утверждение было сформулировано в работе Сона и Суровки [2]. В этой работе рассматривается равновесное движение жидкости с киральным дисбалансом, или аксиальным химпотенциалом отличным от нуля, $\mu_5 \neq 0$, и в присутствии внешних электромагнитных полей, $\vec{E}, \vec{B} \neq 0$. Используется гидродинамическое приближение, или разложение по производным и пренебрегая взякостью, было получено, что возникают макроскопические токи пропорциональные C_{anom}. В частности, возникает ток завихренности: $j^{\alpha,5}_{vortcal} \;=\; C_{anom}\mu^2\omega^\alpha$ где завихренность – $\omega^\alpha \;=\; (1/2)\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta\partial_\gamma u_\delta$,u_α- 4-скорость элемента жидкости. Или ток текущий вдоль внешнего магнитного поля $j^\alpha_{el} \;=\; C_{anom}e^2\mu_5\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta\partial_\gamma A_\delta$ где A_δ -вектор-потенциал электромагнитного поля. Отметим, что заряды, отвечаюшие этим токам, отличны от нуля только при наличии винтовых конфигураций поля скоростей или электромагнитных полей. Например, $j^0_{vortical} \;\sim\; \vec{v}\cdot\vec{\Omega}$, где $\vec{v}$ и $\vec{\Omega}$ обычная и угловая скорости, соответственно.

В основном, мы будем иллюстрировать наши утверждения на примере вихревого кирального эффекта:

$$\vec{J}_{CVE} \;=\; \frac{\mu_R^2}{4\pi^2}\vec{\Omega} \quad , \tag{3}$$

полученный еще Виленкиным [3]. Формула (3) отвечает случаю одного фундаментального вейлевского фермиона.

Как видно из примера (3), ток, ассоциированный с аномалией, представляет собой полином по термодинамическим виличинам (μ, T, Ω). Эта полиномиальность является отражением полиномиальности треугольной аномалии в терминах электромагнитного поля. Связь между треугольной аномалией в теории поля и полиномиальностью интегралов Зоммерфельда (то есть, определенных интегралов от распределения Ферми) обсуждалась недавно в ряде работ, см. , в особенности, [4, 24, 25].

В частности, непосредственное статистическое усреднение сводит проекцию тока частиц на ось вращения J_N к следующему выражению:

$$J_N \;=\; \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\epsilon^2 d\epsilon\Big(\frac{1}{1+e^{\beta(\epsilon-(\mu+\Omega/2))}}-\frac{1}{1+e^{\beta(\epsilon-(\mu-\Omega/2))}}\Big)\;, \tag{4}$$

где J_N выписан для случая одного правого фермиона, $\beta = 1/T$, где T - температура. Первый член в скобках отвечает току частиц, а второй - античастиц. Прямое интегрирование выражения (4) сводит его к (3). Детали вывода можно найти в [5].

Подчеркнем, что статистический подход включает усреднение по распределению Бозе или Ферми, то есть по распределению невзаимодействующих частиц. Ответ же для тока совпадает с ответом, полученным в гидродинамическом приближении, или в режиме сильной связи. Это совпадение представляет собой термодинамический аналог теоремы Адлера-Бардина в теории поля.

За последние год-два формируется новое направление, которое, по нашему мнению, станет следующим шагом в развитии теории киральных эффектов. Речь идет о *киральных эффектах и гравитационных взаимодействиях.*

В рамках статистического подхода, в число стандартных термодинамических величин стали включать ускорение, $\vec{a}$, см., в частности, [6]. Общепринято, что при построении оператора плотности $\hat{\rho}$ вводится эффективное взаиможействие:

$$\delta\hat{H} \;\sim\; \hat{\vec{M}}\cdot\vec{\Omega} \tag{5}$$

где $\hat{\vec{M}}$ оператор углового момента, $\vec{\Omega}$- вектор угловой скорости. Довольно очевидно, что из соображений Лоренц-инвариантности следует добавить:

$$\delta\hat{H} \;\sim\; \hat{\vec{K}}\cdot\vec{a}\;, \tag{6}$$

$\hat{\vec{K}}$ - оператор лоренцова буста [6]. Примеры расчета киральных эффектов, включающих ускорение, с использованием техники оператора Зубарева [7], см. в [8].

Далее, как только возникают эффекты с ускорением в плоском пространстве, естественно попытаться связать их с эффектами во внешнем гравитационном поле, пользуясь принципом эквивалентности. И, действительно, результаты статистических расчетов можно сопоставить с результатами расчетов в пространстве Риндлера [9]. Результаты, полученные в рамках этих двух подходов, оказываются совпадающими друг с другом.

Наконец, можно говорить о связи эффектов во внешнем гравитационном поле и температурных эффектах. Примером такой связи является хорошо известный эффект Унру. Именно, можно показать, что наблюдатель, движущийся с ускорением a воспринимает вакуум пространства Минковского как среду с температурой T_U равной

$$T_U \;=\; \frac{a}{2\pi}\quad . \tag{7}$$

Таким образом возникает триада эффектов, или теорий, связанных между собой:

$$\begin{aligned}(external\ gravitational\ field) &\sim (acceleration\ in\ flat\ space)\ \sim\\ &\sim\ (finite\ temperature,\ flat\ space).\end{aligned}$$

Замечательный пример такой триады (или три-ального описания) приведен в работе [4].

Рассматривая теорию кирального фермиона, взаимодействующего со внешним гравитационным полем можно получить в однопетлевом приближении (см., например, [10]) следующее выражение для киральной аномалии:

$$\nabla_\mu J^\mu_N \;=\; -\frac{1}{384\pi^2} R_{\mu\nu\kappa\lambda}\tilde{R}^{\mu\nu\kappa\lambda}\quad , \tag{8}$$

где J^μ_N тот же ток, который входит в соотношение (4), $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$- тензор Римана, $R^{\mu\nu\kappa\lambda} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R^{\kappa\lambda}_{\rho\sigma}$. Можно сказать, что это соотношение представляет собой первый член в триаде (8)- квантовая теория поля во внешнем гравитационном поле.

Переход ко второму члену триады (8) происходит вычислением тока числа фермионов, генерируемого гравитационной аномалией (8) в поле вращающейся черной дыры. Предполагается, что ток на горизонте равен нулю и вычисляется ток на большом расстоянии, где метрика становится плоской. Показано, что этот ток равен:

$$J_N \;=\; \frac{1}{48\pi^2} a^2_{black\ hole} \Omega_{black\ hole} \;, \tag{9}$$

где $a_{black\ hole}$-ускорение на горизонте черной дыры, $\Omega_{black\ hole}$- угловая скорость вращения на поверхности черной дыры.

Переход к третьему члену триады (8) происходит отождествлением:

$$\frac{a_{black\ hole}}{2\pi} \;\to\; T \;, \quad\; \Omega_{black\ hole} \;\to\; \Omega \;. \tag{10}$$

Замечательным образом, воспроизводится соотношение (4) первоначально выведенное в плоском пространстве при ненулевой температуре. Таким образом, на совершенно новом материале подтверждена дуальность описания явлений в терминах температурной квантовой теории поля в плоском пространстве и в терминах квантовой теории поля во внешнем гравитационном поле.

Вместе с тем–и здесь мы подходим к теме диплома–есть основания думать, что наблюдение работы [4] не обобщается на частицы высших спинов. Простейшия аргументация, предложенная В.И. Захаровым, Г.Ю. Прохоровым и О.В. Теряевым, состоит в следующем [36]. Киральная гравитационная аномалия (8) известна для безмассовых частиц любого спина и диктует кубическую зависимость от спина частиц S, чего никак нельзя получить из температурной квантовой теории поля, ведь температура выявляет число степеней свободы, и число степеней свободы для безмассовых частиц равно двум, независимо от спина.

Из высших спинов, самый простой случай спина $S = 1$, или фотона. Естественно поэтому обратиться к детальному рассмотрению указанной проблемы высших спинов на примере фотона. Более того, существует литература [13–16, 18, 19], посвященная киральному вихревому эффекту. Нашей задачей является в перву очередь обзор этой литературы в контексте сравнения полученных результатов с предсказаниями, основанными на гравитационной аномалии.

В дипломной работе представлен как краткий обзор литературы, так и оригинальные утверждения по поводу самих вычислений. В литературе одна и та же проблема обсуждается иногда с разных точек зрения.

2 Киральный Вихревой Эффект для Фермионов

2.1 Вклад μ^2. Гидродинамика

Киральным Вихревым эффектом (КВЭ) называют поток киральности безмассовых фермионов вдоль вектора угловой скорости $\vec{\Omega}$ во вращающейся среде. Эффект был впервые предсказан Виленкиным в [3], который в своей работе получил для системы с одним Вейлевским фермионом ток числа частиц:

$$\vec{j}^N = \frac{1}{12} T^2 \vec{\Omega} \tag{11}$$

где T - температура.

Введение в систему взаимодействия, т.е. химического потенциала μ, связанного с зарядом Q^N, который в свою очередь относится к току j^N, ведет к появлению еще одного вклада, квадратичного по μ:

$$\vec{j}^N = \Big(\frac{1}{12} T^2 + \frac{\mu^2}{2\pi^2}\Big) \vec{\Omega} \tag{12}$$

В своей работе [2] Сон и Суровка рассматривали киральные эффекты с точки зрения релятивистской гидродинамики, для идеальной жидкости.

Используя гидродинамические величины, их законы сохранения и разложение по градиентам в этой работе были получены вклады-модификации к гидродинамическим уравнениям в присутствии квантовой аномалии. При ненулевом химическом потенциале был получен вклад в ток, индуцированный завихренностью, со своим транспортным коэффициентом. Более того, коэффициент, характеризующий этот эффект, полностью зафиксирован выражением для аномалии в данной конкретной системе. Другими словами, коэффициент перед членом $\mu^2\vec{\Omega}$ выражается через коэффициент в аномальном законе сохранения, которая для системы с одним вейлевским фермионом выглядит как:

$$\partial_\mu j^{\mu N} = -\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{13}$$

где $F_{\alpha\beta}$ - тензор напряженности электромагнитного поля.

Однако, это не значит что с членом $\mu^2\vec{\Omega}$ все просто и понятно, несмотря на кажущуюся простоту вывода оного в [2].

Для иллюстрации достаточно заметить, что при "выключенных"внешних полях, когда вышенаписанное выражение для аномалии обратится в ноль, этот вклад выживет. Что говорит о наличии дополнительных законов сохранения.

Переход в гидродинамический режим может быть осуществлен при помощи подстановки [17]:

$$eA_\mu \longrightarrow eA_\mu + \mu u_\mu \tag{14}$$

где A_μ - внешние электромагнитные поля, u_μ - поле 4-скоростей элементов жидкости как функция от координат.

Так, используя эту подстановку в выражение для аксиального тока вдоль вектора завихренности жидкости $\omega_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}u^\nu\partial^\alpha u^\beta$ вклад

$$\delta j^A_\mu = \sigma_\omega \omega_\mu \tag{15}$$

при ненулевой проводимости $\sigma_\omega \neq 0$ и ненулевом хим. потенциале $\mu \neq 0$ получим

$$\sigma_\omega = \frac{\mu^2}{2\pi^2} \tag{16}$$

то есть получаем ни что иное как μ^2 вклад в киральный вихревой эффект. Стоит сказать, что T^2 вклад такой подстановкой не охватывается.

Если восстановить выражение для аксиального тока, оно будет выглядеть приблизительно следующим образом:

$$j^A_\mu = n^A u_\mu + C\mu^2\omega_\mu + O(e) \tag{17}$$

здесь $n^A = \frac{1}{2}(n_R - n_L)$ - плотность составляющих частей жидкости, кирального заряда. C - коэффициент в выражении для аномалии.

Уравнение (17), вообще говоря, близко к тому, что было получено в работе Сона и Суровки [2]. Теперь очевидно, что при выключении внешних полей, когда аксиальный ток перестанет быть аномальным и его дивергенция обратится в ноль, второй член в уравнении (17), киральный вихревой эффект, выживет. И более того, он будет прямо пропорционален коэффициенту, "задающему"эту самую аномалию.

Помимо этого, первый член в уравнении (17) есть "наивный"аксиальный ток, он, конечно же, сохраняется отдельно. А это значит, что раз при выключенных внешних полях сохраняется весь аксиальный ток, то вклад $\delta j^A_\mu = C\mu^2\omega_\mu$ тоже должен сохраняться отдельно. Это говорит о том, что в таком расссмотрении идеальной жидкости появляется дополнительная симметрия.

"Выключение"электро-магнитного взаимодействия, то есть устремление постоянной $\alpha_{el} \to 0$, вообще говоря, может привести к нестабильностям в киральной среде [26]. В этой работе показано, что такое устремление константы электро-магнитного взаимодейства к нулю может заставить киральную жидкость с ненулевым химическим потенциалом может перейти в ассиметричное состояние содержащее вихри.

Однако, в этом рассмотрении электромагнитное поле не является динамическим, а значит мы можем пренебречь электромагнитным взаимодействием составляющих элементов жидкости, как и возбуждением электромагнитных волн в среде. В этом случае устремление константы взаимодействия к нулю не приведет к изменению свойств среды.

Тем не менее, даже в случае, когда электромагнитное поле является внешним и нединамическим, появление нестабильностей в жидкости все же возможно [26]

2.2 Вклад T^2. Смешанная аномалия

Отношение T^2 вклада в выражение для Кирального Вихревого Эффекта к аномалии долгое время оставалось неясным. Подстановка перехода в гоидродинамический режим (14), как писалось выше, не охватывает температурные вклады, а значит требудется другой подход к проблеме.

Как раз его в своей работе [4] предложил M. Stone. Идея здесь заимствована из работ, соотносящим излучение Хокинга, полученное благодаря термодинамическому рассмотрению физики черных дыр и аномалии теории поля.

Предлагается рассматривать пространство-время с границей – горизонтом вращающейся черной дыры. На таком фоне, выражение для дивергенции аксиального тока для системы из одного правого Вейлевского фермиона единичного заряда в присутствии внешнего гравитационного поля примет вид:

$$\nabla_\mu J^\mu_N = -\frac{1}{32\pi^2}\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - \frac{1}{768\pi^2}\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}R^\beta{}_{\alpha\rho\sigma} \tag{18}$$

где $F_{\mu\nu}$ есть тензор напряженности электро-магнитного поля, g – след метрического тензора, а $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ - соответственно тензор Римана.

Таким образом, первый член в (18) являет собой привычное выражение для т.н. киральной аномалии, а интересовать нас будет второй член, а конкретно, коэффициент перед ним.

Утверждается, что вдали от горизонта, где второй вклад, гравитационная киральная аномалия

$$\nabla_\mu J^\mu_N = -\frac{1}{768\pi^2}\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}R^\beta{}_{\alpha\rho\sigma} \tag{19}$$

зануляется, присутствует поток киральности, который и будет тем самым вкладом $T^2\vec{\Omega}$ в выражение для КВЭ.

В качестве внешнего гравитационного поля используется аналог вращающейся черной дыры Керра. Сама метрика в координатах Бойера — Линдквиста (t, r, ϕ, θ), $cos\theta = \chi$ выглядит следующим образом:

$$ds^2 = -\Big(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\chi^2}\Big)dt^2+\Big(\frac{r^2+a^2\chi^2}{r^2+a^2-2mr}\Big)dr^2-\frac{4amr(1-\chi^2)}{r^2+a^2\chi^2}dtd\phi+ \tag{20}$$

$$+(1-\chi^2)\Big(r^2+a^2+\frac{2a^2mr(1-\chi^2)}{r^2+a^2\chi^2}\Big)d\phi^2+(r^2+a^2\chi^2)\frac{1}{1-\chi^2}d\chi^2$$

Где m есть масса черной дыры, а ma – ее угловой момент.

У такой черной дыры, как известно, есть два горизонта: внутренний и внешний, задающихся уравнениями:

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2-a^2} \tag{21}$$

Внешний горизонт: $r_+ = m + \sqrt{m^2-a^2}$, является горизонтом событий, на котором "заключенные"фотоны будут двигаться на постоянном r и угле θ, причем с постоянной угловой скоростью

$$\Omega_+ \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{r_+^2} \tag{22}$$

Последнее равенство можно получить подстановкой постоянных $r = r_+$, и θ в выражение $ds^2 = 0$, справедливое для фотонов и решением получившегося квадратного уравнения на $\frac{d\phi}{dt}$.

Для Керровской черной дыры поверхностная гравитация κ_+ на внешнем горизонте представляется разностью поверхностной гравитации для решения Шварцшильда $g = \frac{1}{4m}$ и постоянной пружины для вращающейся черной дыры $k \equiv m\Omega_+^2$.

Это выражение дает Хокинговскую температуру Керровской черной дыры

$$T_H = \frac{\kappa_+}{2\pi} \tag{23}$$

А значит, черная дыра Керра наделена не только вращением, но и температурой.

Для того, чтобы проиллюстрировать выбор модифицированной метрики, необходимо сначала переписать метрику Керра в известных терминах:

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \tag{24}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 cos^2\theta \tag{25}$$

и форм:

$$\omega = \frac{r^2 + a^2}{\rho^2}(dt - asin^2\theta d\phi) \tag{26}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{r^2 + a^2}{\rho^2}(d\phi - \frac{a}{r^2 + a^2}dt) \tag{27}$$

В таких терминах метрика Керра принимает вид:

$$ds^2 = -\frac{\Delta\rho^2}{(r^2 + a^2)}\omega^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 sin^2\theta\tilde{\omega}^2 \tag{28}$$

Далее, конструируется метрика, мотивированная Керровской, но с использованием переменной z, измеряющей расстояние от горизонта и функции $f(z)$ равной единице на больших значениях аргумента и нулю на горизонте.

$$ds^2 = -f(z)\frac{(dt - \Omega r^2 d\phi)^2}{(1 - \Omega^2 r^2)} + \frac{1}{f(z)}dz^2 + dr^2 + \frac{r^2(d\phi - \Omega dt^2)}{(1 - \Omega^2 r^2)} \tag{29}$$

Она, очевидно, отвечает вращающейся черной дыре и на больших значениях z, где $f(z) = 1$ превращается в $ds^2 \to -dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$ – метрике (асимптотически) плоского пространства в цилиндрических координатах. В такой метрике вся кривизна пространства-времени сконцентрирована вокруг горизонта, вращающегося с угловой скоростью Ω.

Посмотрим на то, как будет выглядеть правая часть (19) в такой метрике (с точностью до $O(\Omega^3)$):

$$\frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{4}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}R^{\beta}{}_{\alpha\rho\sigma} = 2r\Omega f'(z)f''(z) = \frac{\partial}{\partial z}(\Omega r[f'(z)]^2) \tag{30}$$

Поделив на $\sqrt{|g|} = r$ заметим, что получили источник аксиального тока нашей релятивистской жидкости в области, окружающий горизонт, не зависящий от r. Полагая, что ток распространяется только по направлению z и накладывая граничное условие отсутствия тока на горизонте $J^z(z_H) = 0$ можем проинтегрировать уравнение по z получив:

$$J_N^z = \frac{1}{12} T_H^2 \Omega \tag{31}$$

при $z \to \infty$, то есть вдали от горизонта. Это и есть ожидаемый температурный вклад в ток КВЭ, при условии, что температура заменена на Хокинговскую температуру черной дыры.

3 Киральный Вихревой эффект для фотонов

3.1 Фотонная Киральная Гравитационная Аномалия

Обратимся теперь к Киральной аномалии для фотонов. Понятие киральности для фотонов хорошо известно. Право- и лево- поляризованные фотоны можно называть киральными состояниями, ведь они соответсвуют проекции равной 1 или -1 спина фотона на его импульс.

Как известно, киральность фотонов измеряется зарядом

$$Q = \int d^3x K^0 \tag{32}$$

где ток K^μ задается выражением:

$$K^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu\partial_\rho A_\sigma \tag{33}$$

где A – электромагнитный вектор-потенциал, а g - детерминант метрического тензора (чуть ниже поясним, для чего эта формула записана сразу в криволинейных координатах). Этот ток нормирован таким образом, что $Q_p^A h = \pm 1$ соответсвенно для лево и право поляризованных фотонов.

Матричный элемент оператора кирального заряда будет считать разность между числом право- и лево- поляризованных фотонов $n_{R,L}$:

$$\langle | \int d^3x \epsilon^{0ijk} A_i \partial_j A_k \, | \rangle = n_R - n_L \tag{34}$$

Следует также заметить, что ток K^μ – величина не калибровочно инвариантная, однако при этом заряд, ему соответствующий, напротив, калибровочно инвариантен.

Этого достаточно для того, чтобы последовательно ввести киральность для случая невзаимодейсвтующих фотонов. Далее, можно использовать принцип эквивалентности и обощить случай свободных невзаимодействующих фотонов на взаимодействие их с внешним гравитационным полем. По этой причине ток K^μ выше и записан сразу в криволинейных координатах.

Ток K^μ не является Нетеровским током и поэтому автоматически не сохраняется. На классическом уровне имеем:

$$\langle\nabla_\mu K^\mu\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right\rangle \tag{35}$$

Здесь и далее приняты обозначения дуальных тензоров

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad , \quad \tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} \tag{36}$$

При этом можно показать, что на первый взгляд из соображений киральности для фотонов во внешнем гравитационном поле ожидание $\langle -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\rangle$ зануляется и

$$\langle\nabla_\mu K^\mu\rangle_{naive} = 0 \tag{37}$$

В этом смысле прослеживается аналогия со случаем безмассовых заряженных фермионов во внешнем электромагнитном поле. Ненулевое ожидание $\langle\nabla_\mu K^\mu\rangle_{naive} \neq 0$ можно называть киральной аномалией.

Помимо этого, существует также бозонная киральная гравитационная аномалия, в результате которой значение ожидания дивергенции тока K^μ принимает форму:

$$\langle\nabla_\mu K^\mu\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right\rangle = -\frac{1}{96\pi^2}R_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{38}$$

Появление такого вклада ожидаемо, ведь вклад пропорциональный $R\tilde{R}$ в фермионной аномалии возникает ввиду взаимодействия спина с гравитационным полем. Такое взаимодействие не привязано к какой либо конкретной статистике, а значит имеет место быть и для бозонов тоже.

И правда, киральная гравитационная аномалия для безмассовых частиц спина $\frac{1}{2}$ и спина 1 пропорциональна одной и той же величине $R\tilde{R}$. В случае, рассмотренном в предыдущей секции внешнее гравитационное поле есть поле вращающейся черной дыры, а ее воздействие на систему сводится к универсальному геометрическому фактору.

Вообще говоря, о выводе выражения гравитационной аномалии для фотонов следует поговрить дополнительно. Вывод аналогичен низкоэнергетическому выводу киральной аномалии для фермионов (спина 1/2).

Следует рассмотреть переход тока K_μ в, теперь, два гравитона в аннигиляционном канале. Для гравитонов на массовой поверхности такой переход описывается форм-фактором:

$$\langle 0| K_\mu |2g\rangle = f(q^2) q_\mu R_{\nu\alpha\beta\xi} \tilde{R}^{\nu\alpha\beta\xi} \tag{39}$$

Здесь q_μ есть 4-импульс, переданный током K_μ. Тот факт, что мы требуем наличие калибровочной инвариантности обуславливает существование только одного независимого форм-фактора.

Далее, для функции $f(q^2)$ используется дисперсионное соотношение. Мнимая часть $f(q^2)$ определяется древесными графиками. В классическом приближении ти графики удовлетворяют всем требованиям симметрии теории. К примеру, сохранение тока K_μ для случая движения во внешнем гравитационном поле означает равество нулю $f(q^2)$.

При вычислении мнимой частицы оказывается, что для всех частиц на массовой поверхности знаменатель одного из пропагаторов обратится в ноль, что в свою очередь означает что мнимая часть в итоге вовсе не определена.

У возникшей проблемы есть решение – доопрелеляем мнимую часть введя малую, инфинитезимальную массу гравитона. Тогда мнимая часть форм-фактора $f(q^2)$ выразится следующим образом:

$$Imf(q^2) = \lim_{m^2 \to 0} \left(\frac{1}{128\pi q^2} v^2 (1 - v^2) ln \frac{1+v}{1-v} \right) = \frac{1}{96\pi} \delta(q^2) \tag{40}$$

Что как раз приводит нас к ответу:

$$\langle \nabla_\mu K^\mu \rangle = -\frac{1}{96\pi^2} R_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{41}$$

Даже в пределе невзаимодействующих частиц регуляризация массой приводит к нарушению сохранения киральности фотона. Существует, однако, работа [12], в которой автор обсуждает другую возможность формулировки теории. В ней киральное вращение есть симметрия действия. В терминах вещественного вектор-потенциала такая формулировка невозможна.

Поэтому перейдем к формулировке, ввовлекающей в использование спинорные индексы. Как известно, для того чтобы перейти к спинорным индексам $\alpha\dot{\alpha}$ для произвольного вектора b_μ необходимо воспользоваться формулой:

$$b_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} b_\mu \tag{42}$$

где $\sigma^\mu \equiv (I, \vec{\sigma})$, I – единичная матрица, а $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули.

На языке спиноров, поле $A_{1\dot{1}}$ выступает в качестве Лагранжевого множителя. Калибровочное условие при этом может быть выбрано как $A_{2\dot{2}} = 0$. Таким образом, остаются две независимые компоненты: $A_{1\dot{2}}$ и $A_{\dot{2}1}$.

Действие теперь запишется следующим образом:

$$S = \int d^4x \overline{A} \Box A \tag{43}$$

здесь $A_{2\dot{1}} = \sqrt{2}A$, а $\overline{A} = A^*$. Действие при этом будет инвариантно относительно глобальных поворотов фазы:

$$A \to Ae^{i\varphi}, \quad \overline{A} \to \overline{A}e^{-i\varphi} \tag{44}$$

В итоге получится, что ток K^μ будет выглядеть как нетеровский. Однако, поле A и $\overline{A}$ не является Лоренц скаляром, поэтому использование этих полей вне массовой поверхности представляет неудобства.

Исходя из всего вышеперечисленного, получение результата для киральной-гравитационной аномалии для фотонов кажется процедурой однозначной

$$\langle \nabla_\mu K^\mu \rangle = -\frac{1}{96\pi^2} R_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta} \tag{45}$$

Однако, ниже приведем несколько аргументов, которые, на первый взгляд, подвергают ее и результат сомнению:

- Во-первых, когда мы вводим ненулевую массу для фотона, мы неизбежно меняем количество степеней свободы у векторной частицы. Конесно, нас интересует случай нулевой массы, поэтому встает вопрос, насколько правомерен и непрерывен будет переход к нулевой массе.

- Во-вторых, мы уже несколько раз упоминали о проблеме калибровочной неинвариантности тока K_μ вне массовой поверхности.

В работе Захарова, Хрипловича и др. сформулирована эта самая "разветвление": с одной стороны, введение инфинитезимальной массы позволяет нам построить Лоренц ковариантный формализм, но такая регуляризация при этом нарушает сохранение киральности; или же можно работать с двумя состоояниями фотона и вне массовой поверхности, однако при этом потеряется Лоренц ковариантность. Мы не единственные, у кого возникает такая проблема. В работах [15], [19] , написанных сравнительно недавно, авторы встречают похожие проблемы.

Однако, в работе [12] проанализирован этот вопрос для части конкретного вычисления аномалии (41). Утверждается, что величина $Imf(q^2)$ в уравнении (40), которая и определяет конечный ответ для аномалии на самом деле калибровочно инвариантна. То есть, ответ не изменяется при переходе от теории векторного поля Прока к какой-либо другой.

Добавление следующего члена в действие:

$$\Delta S = -\frac{1}{2}\xi \int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu A^\mu)^2 + S_m \tag{46}$$

(здесь ξ – калибровочный параметр, S_m – массовый член) никак не меняет значение $Imf(q^2)$.

Более того, введение нековарантной калибровки:

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \int d^4x(\xi(\partial_\mu A^\mu)^2 - m^2 A_\mu A^\mu) \tag{47}$$

Также не поменяет значение $Imf(q^2)$.

Таким образом продемонстрироваа калибровочная инвариантность ответа. Следовательно, введение инфинитезимальной массы на самом деле сглаживает инфракрасную сингулярность и не меняет число эффективных степеней свободы.

3.2 Выводы КВЭ для плоского пространства. Формулы Кубо.

Вообще говоря, существует много способов получить выражение для Кирального Вихревого Эффекта в неискривленном пространстве-времени. В последнее время, наиболее часто-встречающийся путь – сведение к запаздывающим трехмерным (3D) функциям Грина, используя технику аналогичную оной при выведении т.н. Формул Кубо.

Конкретнее: определим проводимость σ_Ω выражением:

$$\vec{j}^N = \sigma_\Omega \vec{\Omega} \tag{48}$$

Тогда σ_Ω будет величиной, определяющейся поведением запаздывающей двух точечной функцией Грина между током j_i^N и компонентой тензора энергии-импульса T_{0j} при нулевой частоте ω и малом импульсе k_i в присутствии вращения, то есть [25]:

$$\lim_{q \to 0} G_R(\omega, k)|_{\omega=0} = i\epsilon_{ijn} k_n \sigma_\Omega \tag{49}$$

В работах [13, 14] можно найти подробные вычисления Кирального Вихревого Эффекта для систем с заряженными частицами спина 1/2 в температурной теории поля.

Уравнение (49) можно обощить на случай фотонов взаимодействующих со внешним гравитационным полем, как например в [13]. Двухпетлевой вклад в КВЭ для частиц со спином 1/2 факторизуется в произведение однопетлевой киральной аномалии и КВЭ, связанного с фотонным током K_μ.

Соответствующая проводимость σ_Ω^γ для тока K_μ теперь будет выражаться через кореллятор между уже фотонным током K_i и компонентой тензора энергии импульса T_{0j}.

В результате, получится следующее выражение для Кирального Вихревого момента для фотонов, см. [13–15] (назовем его Kubo Relation)

$$\vec{j}^{photon}_{Kubo\ relation} = \frac{1}{6}T^2\vec{\Omega} \tag{50}$$

Легко заметить, что результат, полученный таким образом несовпадает с полученным нами ранее или, скажем, полученным Ямамото и больше эффекта для Вейлевских спиноров вдвое, а не в четверо:

$$\frac{(CVE)_{photon}|_{Kuborelation}}{(CVE)_{Weyl}} = 2 \tag{51}$$

Упомянем и здесь, что непосредственно ток K_μ не калибровочно инвариантен и это делает рассуждения не такими однозначными. На самом деле, калибровочную инвариантность можно "ввести"на каждом шаге вводя нелокальность. Для фотонов на массовой поверхности существует выражение для тока в аннигиляционном канале:

$$\kappa_\mu = (const)\frac{q_\mu}{q^2}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \tag{52}$$

где q_μ есть 4-импульс носимый током.

Однако, в случаях, наиболее интересных для рассмотрения, а именно:

- В пределе $q_i = 0$, $\omega \to 0$ имеем

  $$\lim_{q_i=0,\omega\to 0} \kappa_0 = K_0 \tag{53}$$

  и нелокальный ток сводится к той же плотности заряда K_0

- А в случае трехмерной картины будет рассматриваться предел $\omega = 0$, $q_3 \to 0$ и тогда:

  $$\lim_{q_3\to 0,\omega=0} \kappa_3 = K_3 \tag{54}$$

  и ток чводится к компоненте K_3, той же, что используется в температурной теории поля.

3.3 Вывод из кинетических соображний

Существует, однако, вывод фотонного кирального вихревого эффекта [33] за авторством Наоки Ямамото, воспроизводящий ответ, полученный нами в выводе, затрагивающем смешанную гравитационно-киральную аномалию. Приведем суть вывода и ответ:

В полуклассическом режиме поляризованные по кругу фотоны обладают фазой Берри. Используя кинетическое уравнение для таких фотонов можно получить ток, направленный вдоль вектора завихренности.

Гамильтониан системы киральных фотонов имеет вид:

$$H = \pm c\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \tag{55}$$

где S_i – матрицы 3x3, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$, c – скорость света в вакууме.

Здесть четко прослеживается отличие от системы с фермионами, где Гамильониан выглядит как:

$$H = \pm c\sigma \cdot \mathbf{p} \tag{56}$$

а σ_i – Матрицы Паули, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

Знаки $\pm$ в формуле (55) соответствуют право- и лево- поляризованным фотонам и значениям спиральности $h = \pm 1$ соответственно.

Сфокусировавшись на право-поляризованных фотонах для простоты (ведь случай с лево-поляризованными фотонами получается из него заменой знаков) и оставив для рассмотрения только состояния с положительной энергией напишем действие:

$$I = \int dt(\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{a_p} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}}) \tag{57}$$

где $\mathbf{a_p}$ – калибровочное поле в импульсном пространстве – связность Берри, $\epsilon_p = |\mathbf{p}|$ – дисперсия энергии. Соответсвующая $\mathbf{a_p}$ напряженность калибровочного поля – фаза Берри выражается как:

$$\mathbf{\Omega_p} = \nabla_\mathbf{p} \times \mathbf{a_p} \tag{58}$$

и в данном случае

$$\mathbf{\Omega_p} = \pm \frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p^2}|} \tag{59}$$

здесь опять же $\pm$ соответствует право- и лево- поляризованным фотонам.

Из действия (57) можно получить уравнения движения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{\Omega_p} \tag{60}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{2}|\mathbf{p}|\dot{\mathbf{x}} \times \omega + \mathbf{O}(\omega^\mathbf{2}) \tag{61}$$

где локальная завихренность $\omega = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\nabla \times \mathbf{v}$ – локальная скорость элемента жидкости. Уравнения записаны в сопутсвующей системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω по отношению к лабораторной системе отсчета. Также стоит заметить, что мы ограничимся малыми угловыми скоростями для того чтобы центробежные силы порядка $O(\omega^2)$ были пренебрежимо малыми.

Подставляя одно уравнение в другое получим

$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{2}\omega|\mathbf{p}|(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Omega_p}) \tag{62}$$

где для детерминанта матрицы 6x6 с коэффициентами уравнений движения примем обозначение $G = (1 + 2|\mathbf{p}|\omega \cdot \mathbf{\Omega_p})^\mathbf{2}$

Плотность тока фотонов теперь, при помощи функции распределения лево- или право- поляризованных фотонов в фазовом пространстве, запишется следующим образом:

$$\mathbf{j} = \int \frac{\mathbf{d^3p}}{(\mathbf{2}\pi)^\mathbf{3}} \sqrt{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{x}}\mathbf{n_p} \tag{63}$$

Из второго члена в уравнении (62) можем выписать вклад в фотонный ток, пропорциональный завихренности:

$$\mathbf{j_{CVE}} = \mathbf{2}\omega \int \frac{\mathbf{d^3p}}{(\mathbf{2}\pi)^\mathbf{3}} |\mathbf{p}|(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{\Omega_p}) \tag{64}$$

В состоянии термального равновесия функция распредления n_p принимает форму распределения Бозе-Эйнштейна – функции температуры и хим. потенциала:

$$n_p = \frac{1}{\exp \frac{1}{T}(\epsilon_p - \mu) - 1} \tag{65}$$

Подставляя это в выражение для тока получим:

$$j^{\pm}_{CVE} = \pm \frac{1}{\pi^2} F(2, -\beta\mu) T^2 \omega \tag{66}$$

Здесь $F(2, -\beta\mu)$ есть интергал Бозе-Эйнштейна, который в случае нулевого химического потенциала примет известное табличное значение:

$$F(2, 0) = \frac{\pi^2}{6} \tag{67}$$

А значит, выражение фотонного Кирального Вихревого Эффекта примет вид:

$$j^A_{CVE} = j^+_{CVE} - j^-_{CVE} = \frac{2}{\pi^2} F(2, -\beta\mu) T^2 \omega = \frac{T^2}{3} \omega \tag{68}$$

3.4 Результат для гравитационной аномалии. Зависимость от спина.

Перейдем теперь непосредственно к оценке Кирального Вихревого Эффекта для фотонов. Сначала проведем рассуждения, следуя логике [4].

Сразу же стоит заметить, что чтобы корректно применять механизм, изложенный в [4], нужно работать с системами с одинаковым количеством степеней свободы. А значит, необходимо в этом смысле отнормировать случай с фотонами к Вейлевскому спинору. Ведь нас интересует зависимость КВЭ от только от значения спина рассматриваемых частиц. Для этого взглянем на уравнения (19) и (41).

Проведя те же вычисления, но уже для тока K^μ для фотонов и также использовав "трюк"с подменой источника тепла на Хокинговское излучение получим, что:

$$\frac{(CVE)_{photon}}{(CVE)_{fermion}} = 4 \tag{69}$$

то есть значение для КВЭ для системы с фотонами в 4 раза больше, нежели чем для систем с фермионами.

С этим результатом связана важная проблема. Выражение для Кирального Вихревого Эффекта для фотонов, полученное иными способами, не затрагивающие кривые пространства и киральную гравитационную аномалию, а напротив, исходящие из соображений на фоне плоского пространства-времени, дают результат

$$\left.\frac{(CVE)_{photon}}{(CVE)_{fermion}}\right|_{flat\ space} = 2 \tag{70}$$

3.5 Отношение киральных вихревых эффектов для спинов $S = 1/2,\ S = 1$

Критичным является отношение термальных вихревых эффектов для спинов 1/2 и 1. Для спина 1/2 многими авторами получено:

$$\vec{J}^{Weyl}_{CVE} \ = \ \frac{T^2}{12}\vec{\Omega}, \tag{71}$$

где $\vec{J}^{Weyl}_{CVE}$ –ток вихревого эффекта в теории с одним правым Вейлевским спинором, $\vec{\Omega}$ -вектор угловой скорости. Можно считать, что соотношение (71) не подлежит сомнению.

Из выражения для гравитационной аномалии , непосредственно следует предсказание для вихревого эффекта в теории с фотонами:

$$\vec{J}^{photon}_{CVE} \ = \ 4\cdot\frac{T^2}{12}\vec{\Omega} \qquad (anomaly). \tag{72}$$

Отметим, что в этом разделе мы не следим за знаками эффекта, отчасти потому, что в разных работах порой подразумеваются разные определения $\vec{\Omega}$.

В то же время результат общепринятых расчетов [13, 14] имеет вид:

$$\vec{J}^{photon}_{CVE} \ = \ 2\cdot\frac{T^2}{12}\vec{\Omega} \qquad (Kubo\ relation) \tag{73}$$

Это соотношение получено путем использования соотношения Кубо для вихревого эффекта. Расхождение в 2 раза между соотношениями (72) и (73) является предметом нашего рассмотрения.

В работе Ямамото [33] киральный вихревой эффект выводился с испольованием кинетической теории для киральных частиц. Основы этого метода см. в работе Стефанова и Йина [34]. Ответ совпадает с (72) и противоречит не только соотношению (73) но и результатам работ [16,18], где используется техника сходная с работой Ямамото.

То обстоятельство, что результат работы Ямамото совпадает с предсказаниями, основанными на гравитационной аномалии замечено впервые Г.Ю. Прохоровым (частное сообщение).

В работе М. Н. Чернодуба с соавторами [35] также вычисляется вихревой эффект для фотонов. Используется оригинальная методика, основанная на рассмотрении так называемых "зилчей"(Zilch), или токов иной размерности, чем каноническая (d=3), и ответ для стандартного вихревого эффекта возникает только в результате некоторого предельного перехода по размерности тока. Результат расчета можно представить как:

$$\vec{J}^{photon}_{CVE} \;=\; (8/3)\cdot\frac{T^2}{12}\vec{\Omega} \qquad (Ziches) \tag{74}$$

Ответ (74) был подтвержден совсем недавно в работе [23].

Это расхождение между результатами различных работ, насколько нам известно, не обсуждалось в литературе сколько-нибудь систематически. Мы приводим ниже оригинальный вывод вихревого эффекта для фотонов. В отличие от всех остальных подходов, наш подход использует только статистическую физику (и относится к равновесию, или частицам на массовой поверхности). Рассмотрение элементарно, и результат совпадает с результатом Ямамото.

Оговоримся сразу, что мы не нашли каких-либо ошибок ни в одной их процитированных выше работ. Поэтому речь может идти только об анализе справедливости тех иных предположений, заложенных в различные методики расчетов.

3.6 Статистический подход: физика равновесия

Выпишем распепределение Бозе для нейтральной безмассовой скалярной частицы в трех измерениях:

$$n_B = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1} \tag{75}$$

где для безмассовой частицы $\epsilon = |\vec{p}|$, $4\pi\epsilon^2$ - поверхность сферы радиуса ϵ, $\beta = \frac{1}{T}$, а фактор перед знаком интеграла происходит от $d^3p/(2\pi)^3$.

Та же фунцкия для фотона будет выглядеть следующим образом:

$$n_B^{photon} = 2\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1} \tag{76}$$

то есть, будет отличаться лишь фактором 2.

Теперь запишем распределение Ферми для Вейлевского спинора:

$$n_F^{Weyl} = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon}+1} \tag{77}$$

Интегрирование проводится не от 0 до ∞, а по всей числовой прямой. Состояния с положительной энергией отвечают одной степени свободы, для определенности договоримся, что состояниям, поляризованным по импульсу. Появляются состояния с отрицательными энергиями, отвечающие античастицам. Для учета таких состояний необходимо вычитание моря Дирака при нулевой температуре. Другими словами, задача перестает быть одночастичной.

С точки зрения количества степеней свободы Вейлевский спинор подходит нам для сравнения, так как, как и у фотона, у него их две. Перейдем от состояний с отрицательной энергией – дырок к античастицам – состоянием с положительной энергией но поляризацией, направленной против импульса, получим:

$$n_F^{Weyl} = 2\frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \frac{1}{e^{\beta\epsilon}+1} \tag{78}$$

Теперь включим вращение. Сначала рассмотрим случай фермионов. Для того, чтобы это сделать необходимо "расщепить"два вырожденных уровня на величину Ω, вывод связан с разложением по разным наборам собсвтенных функций и впервые для безмассовых частиц со спином $1/2$ предложен А. Виленкиным. В итоге распределение примет вид:

$$n_F^{Weyl} = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon\Big(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\Omega/2)}+1}+\frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\Omega/2)}+1}\Big) \tag{79}$$

Теперь перейдем к бозонам. В этом случае расщепить вырожденные уровни придется уже на величину 2Ω. Соответсвующая формула для частиц со спином 1 примет вид:

$$n_B^{photon} = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon\Big(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\Omega)}-1}+\frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\Omega)}-1}\Big) \tag{80}$$

Получается, что разница между двумя выражениями состоит в замене $\frac{\Omega}{2}$ на Ω, а распределения Ферми на распределение Бозе. Результат, похожий на (80) можно найти, например в [19].

Полученный ответ лишь кажется простым. Попробуем качественно обосновать полученные выкладки. Сделать это можно следующим образом:

Во-первых заметим, что фазовый объем записан как в случае сферической симметрии в пространстве импульсов. Спин же при этом очевидно направлен вдоль вектора $\vec{\Omega}$. А значит, имеет смысл думать о квантовании в цилиндрических координатах.

Чтобы проиллюстрировать это, попробуем начать со случая скалярной частицы и будем квантовать в цилиндричесих координатах. Очевидно при этом, что плотность состояний свободной частицы, если количество состояний, где набирается интеграл достаточно большое, не зависит от того, в каких координатах мы квантуем: декартовых, сферических или цилиндрических. Добавив в рассмотрение спин ($1/2$ или 1), начиная с цилиндрических координат и уже потом перейдя к декартовым для описания орбитального движения мы не поменяем зависимость от спина.

Получается, спин "висит"как в цилиндрических координатах, а значит имеет место факторизация спиновой зависимости. Отсюда и простота ответа.

Перейдем непосредственно к ответу для Кирального Вихревого Эффекта. Для того, чтобы его получить, достаточно в уравнениях (79) (80) заменить на обратный знак в скобках:

$$J_{CVE}^{Weyl} = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \Big(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\Omega/2)}+1} - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\Omega/2)}+1}\Big) \tag{81}$$

для спина $1/2$, и соответственно:

$$J_{CVE}^{photon} = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty 4\pi\epsilon^2 d\epsilon \Big(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\Omega)}-1} - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon+\Omega)}-1}\Big) \tag{82}$$

После чего, получим ответы:

$$\vec{J}_{CVE}^{Weyl} = \frac{1}{12}T^2\vec{\Omega} \tag{83}$$

для фермионов (что, стоит заметить, полностью совпадает с известными результатами). И, соответственно:

$$\vec{J}_{CVE}^{photon} = \frac{1}{3}T^2\vec{\Omega} \tag{84}$$

для фотонов.

Что, стоит заметить, совпадает с ответом Ямамото для спина 1 [33].

3.7 Еще о сравнениях с другими подходами

Выше упоминалась работа М. Чернодуба с соавторами [35]. Результат для Кирального Вихревого эффекта фотонов в ней:

$$\vec{J}^{photon}_{CVE} \;=\; (8/3)\cdot\frac{T^2}{12}\vec{\Omega} \qquad (Ziches) \tag{85}$$

Этот результат отличается от полученного нами (и, например, Ямамото) в 2/3 раза. Авторами объясняется такое отличие: они выбрали изначально для описания КВЭ фундаментальный ток, отличающийся от K^μ. Выбор тока K^μ согласно их описанию не подходит, ввиду несохранения, ведь, как мы помним:

$$\partial_\mu K^\mu = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \tag{86}$$

Обратим, однако, внимание на статистический вывод. По построению в нем рассматриваются частицы на массовой поверхности, а как раз на массовой поверхности ток K^μ сохраняется:

$$(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})_{plane\ wave} \sim (\vec{E}\cdot\vec{H})_{plane\ wave} = 0 \tag{87}$$

Для фотонов этот закон сохранения означает, что лево- и право- поляризованный свет распространяется независимо. Этот принцип остается верным и после включения внешнего нравитационного поля.

Более того, на массовой поверхности заряд

$$Q = \int d^3x K^0 \tag{88}$$

есть калибровочно инвариантная величина. Тем самым, на наш взгляд, отпадает необходимость в иных определениях фундаментального тока для вычисления Кирального Вихревого Эффекта фотонов. А рассмотрение в терминах "зилчей"выходит за рамки данной работы.

Далее, полученное нами выражение для КВЭ фотонов, как уже упомниальнось, отличается вдвое от результата, полученного в работе Сона и Голькара [13], где прменяется вычисление двухточечного кореллятора в однопетлевом приближении. Согласно этим вычислениям авторы получают проводимость:

$$\sigma^{\gamma}_{CVE} = \frac{T^2}{6} \tag{89}$$

На данный момент не совсем понятна причина отличия результата, полученного авторами в этой работе и выражением, полученным при помощи статистического метода. На этот счет есть несколько соображений:

Во-первых можно возразить, что ответ в работе Сона и Голькара [13] содержит расходящиеся в ультрафиолете выражения, а результат возникает как сумма расходящихся выражений $\sum_{n=1}^{\infty} = -1/12$. Хоть и нельзя исключить возможность некорректности применения такой процедуры в конкретном случае, подобное суммирование часто применяется при расчете петлевых графиков и приводит к известным ответам "из учебников".

Во-вторых, в этой работе ток K^{μ} используется при работе с виртуальными фотонами и вообще говоря, ответ, в отличие от случая сиситемы с фермионами, может зависеть от калибровки. При этом сразу приведем и контр-аргумент, ведь по крайней мере на одном классе калибровок проверена калибровочная инвариантность этого ответа.

3.8 Случай больших значений спина

В работе М. Даффа [11] была получена формула для гравитационной аномалии, ассоциированной с безмассовыми фермионами спина S:

$$\partial_\mu K^\mu_S = (const)(2S^3 - S)R\tilde{R} \tag{90}$$

где (const) – константа не зависящая от спина частиц S, а K^μ_S (который может быть построен в терминах псевдовектора Паули-Любанского) есть обобщение тока K^μ на случай спина S.

В работе А. Д. Долгова и др. было показано, что при условии вариации знака в зависимости от того, с каким вкладом: фермионов или бозонов, мы имеем дело, формула (90) описывает результат для фотонного тока. В итоге имеем выражении для аномалии, работающую как в случае целых, так и в случае полуцелых спинов.

$$\partial_\mu K^\mu_S = (-1)^{2S+1}(2S^3 - S)(const)R\tilde{R} \tag{91}$$

Согласование выражения (91) с расчетами в рамках температурной теории поля носит очень нетривиальный характер. С деталями можно ознакомиться по работам [30], [31]. Здесь же мы приведем краткий обзор ситуации.

При рассмотрении равновесия в рамках статистической физики добавляют эффективное взаимодействие:

$$\delta H \sim \vec{\tilde{M}} \cdot \vec{\Omega} \sim \Omega \cdot S \tag{92}$$

здесь $\vec{M}$ это генератор вращений.

Действительно, раз речь идет о членах, линейных по Ω то и возникает наивная оценка линейной зависимости от спина. Киральный Вихревой Эффект относися именно к этой категории, поэтому в рамках температурной физики ожидается линейная зависимость от $\Omega \cdot S$. И правда, раз температура выявляет число степеней свободы частицы, а число степеней свободы, которое и определяет температурные эффекты для безмассовых частиц неизменно и равно двум.

Однако, если мы будем рассматривать теорию поля во внешнем гравитационном поле, то нас скорее будет интересовать как ускорение взаимодействует с вращением. Когда речь заходит о гравитационной аномалии, мы обсуждаем члены порядка $R\tilde{R}$ или же $a^2\Omega$. В эффективном взаимодействии ускорение входит во вклад:

$$\delta H \sim ia \cdot S \tag{93}$$

и зависимость от третьей степени спина таким образом может найти объяснение.

В итоге можем заключить, что дуальность между ускорением и температурой может нарушаться во взаимодействии частиц высших спинов. Однако, подчернем, что окончательно и строго об этом можно судить только в рамках конкретных теорий с конкретными спинами.

3.9 О дуальности подходов

В вышеописанных работах и вообще этом дипломе устанавливается некая дуальность подходов к вычислению Кирального Вихревого Эффекта в терминах температурной теории поля и физики черных дыр. В выводах из плоского пространства вводится температура и оценивается двухточечный кореллятор (как в секции вывода с использованием формул Кубо). В случае физики черных дыр же, применяется наоборот теория поля при нулевой температуре во внешних гравитационном и электромагнитном полях, аномальные члены появляются как в дивергенции четырехмерных акстиальных токах, так и в ковариантной производной тензора энергии импульса. Установка знака "равно"между ускорением на горизонте и температурой делает результаты неотличимыми. Конечно, последний аргумент предыдущей секции на первый взгляд нарушает этот принцип, ведь результаты все-таки разнятся.

4 Заключение

В заключение к данной дипломной работе кратко опишем ее суть. Был описан Киральный Вихревой Эффект для систем как с фермионами (спин 1/2) на основе некторого объема актуальной литературы, так и для систем с фотонами (спин 1), с основной фокусировкой, конечно же, на случае фотонов. Описана практически "с нуля"бозонная киральная аномалия и киральная гравитационная аномалия, а также выводы Квирального Вихревого Эффекта для тока фотонов. Конкретнее:

- Вывод фотонного КВЭ с использованием формул Кубо (согласно работам [13-15])
- Вывод из соображений физической кинетики (как в работе [33])
- Статистический вывод из свойств Бозе- и Ферми- распределений
- И вывод, основанный на работе Стоуна [4] о подходе смешанной киральной-гравитационной аномалии, но применимо теперь к фотонам.

Стоит подчеркнуть, что в статистическом выводе (квантовая механика конечно остается) мы избегаем применения кинетического подхода и рассматриваем частицы на массовой поверхности, что упрощает критический анализ сделанных предположений, ведь при сходе с массовой поверхности (в теоретико-полевом подходе) могут возникать проблемы с калибровочной инвариантностью.

Было показано разнообразие подходов, выводов и результатов (в том числе и оргинальные соображения) и приведены аргументы, объясняющие сходства и различия результатов, насколько это было возможно (в самой литературе много разнящихся результатов). Уделено также внимание крайне занимательному соображению о триаде теорий во внешнем гравитационном поле, рассмотрения ускоренного движения в плоском пространстве и температурной теории поля в плоском пространстве. Описаны механизмы перехода теорий друг в друга.

Как упоминалось выше, по нашему мнению, наиболее убедительными, с теоретической точки зрения, являются выводы в рамках статистического подхода, или физики равновесия. Однако, есть два вывода, которые приводят к несовпадаюшим результатам. Во-первых подробные выкладки (в подходе с использованием "зилчей") опубликованы в работе М.Н. Чернодуба с соавторами и, во-вторых, элементарный вывод, основанный на аналогии со спином 1/2, представлен выше. Несовпадение результатов требует дальнейших усилий по поиску интерпретации.

Список литературы

[1] Kharzeev D., Landsteiner K., Schmitt A., Yee H.-Y, Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields // Lect. Notes Phys. 2013 V. 873 P. 1-624

[2] D. T. Son and P. Surowka, *"Hydrodynamics with Triangle Anomalies"* Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 191601, arXiv:0906.5044 [hep-th].

[3] A. Vilenkin, *"Quantum Field Theory At Finite Temperature In A Rotating System"* Phys. Rev. D21 (1980) 2260.

[4] M. Stone and J. Kim, *"Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion"*, Phys. Rev. D98 (2018) 025012, arXiv:1804.08668 [cond-mat.mes-hall].

[5] Prokhorov G., Teryaev O. V. Anomalous current from the covariant Wigner function// Phys. Rev. 2018 V. D97 P. 076013-076019, arXiv:1707.02491 [hep-th] .

[6] Becattini F. Thermodynamic equilibrium with acceleration and the Unruh effect // Phys. Rev. (2018) V. D97 P. 085013-08519 arXiv:1712.08031 [gr-qc]

[7] Zubarev D. N., Prozorkevich A. V., Smolyanskii S. A., Derivation of nonlinear generalized equations of quantum relativistic hydrodynamics //Theoret. and Math. Phys, 1979 V. 40 P. 821-831.

[8] Prokhorov G., Teryaev O., Zakharov V.I. Axial current in rotating and accelerating medium// Phys. Rev. 2018 V. D98 P. 071901 arXiv:1805.12029 [hep-th].

[9] Prokhorov G., Teryaev O., Zakharov, V.I. "Unruh effect universality: emergent conical geometry from density operator", JHEP 2003 (2020) 137, arXiv:1911.04545 [hep-th].

[10] “Gravitational Anomalies”, Alvarez-Gaume L., Witten E. , Nucl. Phys. B234 (1984) 269.

[11] M. J. Duff, Supergravity 81, Proc. of 1st School on Supergravity, Ed. by S. Ferrara and J. G. Taylor, Cambridge Univ. Press, 1982 [see: Introduction to Supergravity, Moscow, Mir, 1985 (in Russian) 1.

[12] A.I. Vainshtein, A.D. Dolgov, V. I. Zakharov, and I.B. Khriplovich, *“Chiral Photon Current And Its Anomaly In A Gravitational Field”*, Sov. Phys. JETP 67 (1988) 1326, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 94 (1988) 54-64.

[13] S. Golkar and D. T. Son, *“(Non)-renormalization of the chiral vortical effect coefficient”* JHEP 1502 (2015) 169, arXiv:1207.5806 [hep-th] .

[14] De-Fu Hou, Hui Liu, and Hai-cang Ren, *“A Possible Higher Order Correction to the Vortical Conductivity in a Gauge Field Plasma”* Phys. Rev. D86 (2012) 121703, arXiv:1210.0969 [hep-th].

[15] I. Agullo, A. del Rio, and J. Navarro-Salas, *“Electromagnetic duality anomaly in curved spacetimes”*, Phys. Rev. Lett. 118 (2017), 111301, arXiv:1607.08879 [gr-qc].

[16] A. Avkhadiev and A. V. Sadofyev, *“Chiral Vortical Effect for Bosons”*, Phys. Rev. D96 (2017) 045015 arXiv:1702.07340 [hep-th].

[17] A.V. Sadofyev, V.I. Shevchenko, and V.I. Zakharov, “Notes on chiral hydrodynamics within effective theory approach”, Phys. Rev. D83 (2011) 105025, arXiv:1012.1958 [hep-th].

[18] “Chiral Vortical Effect For An Arbitrary Spin Xu-Guang Huang and A. V. Sadofyev, JHEP 1903 (2019) 08, e-Print: arXiv:1805.08779 [hep-th] .

[19] M.N. Chernodub, A. Cortijo, and K. Landsteiner, *“Zilch vortical effect”*, Phys. Rev. D98 (2018) 065016, arXiv:1807.10705 [hep-th].

[20] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *“Adler-bell-jackiw Anomaly And Weyl Fermions In Crystal”*, Phys. Lett. 130B (1983) 389.

[21] Dolgov A.D., Zakharov V.I., “On conservation of the axial current in massless electrodynamics”, Nuclear Physics B, 15 (1971) 525-540.

[22] “Theory of Thermal Transport Coefficients” J. M. Luttinger Phys. Rev. 135, A1505

[23] Zilch Vortical Effect, Berry Phase, and Kinetic Theory Xu-Guang Huang, Pavel Mitkin, Andrey V. Sadofyev, Enrico Speranza e-Print: 2006.03591 [hep-th]

[24] K. Landsteiner, Eu. Megias, and F. Pena-Benitez, *"Gravitational Anomaly and Transport"*, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 021601, arXiv:1103.5006 [hep-ph].

[25] K. Landsteiner, E. Megias, and F. Pena-Benitez, *"Anomalies and Transport Coefficients:The Chiral Gravito-Magnetic Effect"*, arXiv:1110.3615 [hep-ph].

[26] A. Avdoshkin, V.P. Kirilin, A.V. Sadofyev, and V.I. Zakharov, Phys. Lett. B 755 1 (2016), 1402.3587.

[27] S. P. Robinson and F. Wilczek, *"Relationship between Hawking Radiation and Gravitational Anomalies"*, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 011303;
S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, *"Hawking Radiation from Charged Black Holes via Gauge and Gravitational Anomalies"*, Phys. Rev. Lett.96, 151302 (2006);
S. Iso, H. Umetsu, and F. Wilczek, *Anomalies, Hawking Radiations and Regularity in Rotating Black Holes"*, Phys. Rev.D74, 044017 (2006).

[28] "Parity Nonconservation and Rotating Black Holes A. Vilenkin, Phys.Rev.Lett. 41 (1978) 1575-1577.
"Parity Violating Currents in Thermal Radiation A. Vilenkin, Phys.Lett. 80B (1978) 150-152.

[29] A. Blommaert, Th. G. Mertens, H. Verschelde, and V. I. Zakharov, *"Edge State Quantization: Vector Fields in Rindler"*, JHEP 1808 (2018) 196, arXiv:1801.09910 [hep-th] .

[30] G.Prokhorov,O.Teryaev,andV.Zakharov,"On axial current in rotating and accelerating medium", Phys.Rev.D 98 (2018) 7, 071901arXiv:1805.12029 [hep- th].

[31] Chiral effects in external gravitational field P.G. Mitkin, G. Prokhorov, O.V. Teryaev, V.I. Zakharov Nucl.Part.Phys.Proc. 300-302 (2018) 203-209.

[32] A.D. Dolgov, I.B. Khriplovich, A.I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *"Photonic Chiral Current and Its Anomaly in a Gravitational Field"*, Nucl. Phys. B315 (1989) 138.

[33] Photonic chiral vortical effect, N. Yamamoto, Phys.Rev.D 96 (2017) 5, 051902, 1702.08886 [hep-th]

[34] "Chiral Kinetic Theory"M.A. Stephanov and Y. Yin, Phys.Rev.Lett. 109 (2012) 162001б arXiv:1207.0747 [hep-th] .

[35] "Zilch vortical effect M.N. Chernodub, A. Cortijo, K. Landsteiner, Phys.Rev.D 98 (2018) 6, 065016 807.10705 [hep-th]

[36] CVE for photons: black-hole vs. flat-space derivation, G.Yu. Prokhorov, O.V. Teryaev, V.I. Zakharov e-Print: 2003.11119 [hep-th]