ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

# Числа Гурвица и квантовая деформация иерархии КП

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

**Выполнил:**
студент 622 группы
Жабин Александр Александрович

**Научный руководитель:**
к.ф.-м.н., Слепцов А. В.

Долгопрудный
2020

# Содержание

# 1 Введение

Недавно вновь обрела популярность теория деформационного квантования. Одним из примеров является $\hbar$-деформация иерархии Кадомцева-Петвиашвили. Широко известно, что многие решения различных квантовых теорий поля, комбинаторных и геометрических задач удовлетворяют классическим уравнениям КП: модель Концевича-Виттена [1], производящая функция чисел Гурвица [2], а также широкий набор матричных моделей. Независимо изучались деформации разных решений, чтобы выделить геометрическую структуру, такую как, например, разложение по родам. $\hbar$-деформация иерархии КП приводит к тому, что различные решения теперь удовлетворяют деформированной системе уравнений, следовательно, $\hbar$-КП претендует на более общее описание различных структур в теории поля, комбинаторике и геометрии.

В литературе уже известно несколько попыток написать деформацию иерархии КП. Впервые деформацию написали Такасаки и Такебе [3] для исследования бездисперсионного предела иерархии. Мы рассмотрим деформацию Натанзона-Забродина [4] и геометрическую деформацию Казаряна-Ландо [5], которая была получена из разложения по родам производящей функции для чисел Гурвица. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что все эти деформации совпадают, получить набор примеров, которые являются решением $\hbar$-КП и в то же время параметр $\hbar$ в самих решениях имеет геометрический смысл. Далее, устремление параметра к нулю позволяет исследовать бездисперсионный предел уравнений КП. Кроме того, общее решение деформированной системы, которое само по себе содержит интересные комбинаторные структуры, может помочь исследовать возможность восстанавливать полное решение из бездисперсионного предела, или же, в случае если решение имеет геометрический смысл, восстаналивать полное решение из решения в роде ноль.

Основной текст работы состоит из 5 частей. В разделе 2 мы вводим обозначения для всех общеизвестных объектов, с которыми предстоит выполнять вычисления, таких как полиномы Шура, алгебра $\widehat{gl(\infty)}$ и формализма свободных фермионов. Раздел 3 посвящен классической иерархии КП, а также важному классу решений – гипергеометрическим $\tau$-функциям, которые возникают в примерах. В разделе 4 рассматриваются три различных деформации иерархии КП, которые затем сравниваются на примерах из раздела 5. Примерами будут производящая функция для чисел Гурвица, эрмитова матричная модель и модель Концевича-Виттена. Мы покажем, что все эти примеры являются решением $\hbar$-КП. В разделе 6 обсуждается обобщение деформации на произвольные гипергеометрические $\tau$-функции.

# 2 Бозон-фермионное соответствие

В данном разделе введем обозначения диаграмм Юнга, полиномов Шура, пространства Фока и формализма свободных фермионов.

## 2.1 Полиномы Шура

Необходимую информацию про полиномы Шура можно найти, например, в [6]. Пусть имеется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 0$. Такой набор будем обозначать $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l]$ и называть диаграммой Юнга. Комбинаторный смысл диаграмм Юнга в том, что они нумеруют разбиения целого числа $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ на $l(\lambda)$ ненулевых слагаемых $\lambda_i$. Также имеется графическое представление диаграмм Юнга в виде набора клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$.

Пусть $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \ldots\}$ - бесконечный набор переменных. Полиномы Шура $s_\lambda(\mathbf{t})$ нумеруются диаграммами Юнга и определяются через детерминантную формулу:

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det_{1 \leq i,j \leq l(\lambda)} h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}), \tag{1}$$

где полиномы $h_k(\mathbf{t})$ определяются через производящую функцию:

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(\mathbf{t}) z^k \tag{2}$$

Положим $h_k(\mathbf{t}) = 0$ для $k < 0$. Из формулы (1) ясно, что если $l(\lambda) = 1$, то $s_{[k]}(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$. Такие полиномы будем называть симметрическими, по аналогии с симметрическими представлениями группы перестановок.

Приведем несколько первых полиномов Шура:

$$\begin{gathered} s_\varnothing(\mathbf{t}) = 1, \\ s_{[1]}(\mathbf{t}) = t_1, \\ s_{[2]}(\mathbf{t}) = \frac{t_1^2}{2}, \quad s_{[1,1]}(\mathbf{t}) = \frac{t_1^2}{2} - t_2 \\ s_{[3]}(\mathbf{t}) = \frac{t_1^3}{6} + t_1 t_2 + t_3, \quad s_{[2,1]}(\mathbf{t}) = \frac{t_1^3}{3} - t_3, \quad s_{[1,1,1]}(\mathbf{t}) = \frac{t_1^3}{6} - t_1 t_2 + t_3 \end{gathered} \tag{3}$$

Также нам понадобится соотношение Коши-Литтлвуда:

$$\sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t'}) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k t_k t_k'\right) \tag{4}$$

## 2.2 Пространства Фока

В логике изложения этого и следующего разделов будем следовать [7]. Определим пространство Фока бозонов: $\mathcal{B}^{(0)} := \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, \dots]$, как линейное пространство полиномов от бесконечного числа переменных $t_1, t_2, t_3, \dots$. Известно, что полиномы Шура образуют базис в таком пространстве.

Определим алгебру Гейзенберга (осцилляторную алгебру) $\mathcal{A}$ с базисом $\{a_n | n \in \mathbb{Z}\}$ и с коммутационными соотношениями:

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n,-m} \tag{5}$$

Тогда пространство $\mathcal{B}^{(0)}$ является пространством представления этой алгебры, и действие генераторов имеет вид:

$$\begin{cases} a_n = \frac{\partial}{\partial t_n}, \\ a_{-n} = nt_n, \\ a_0 = \mu \mathbb{1} \end{cases} \tag{6}$$

Для дальнейшей работы понадобится пространство

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} z^k \mathcal{B}^{(k)} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} z^k \mathbb{C}[t_1, t_2, t_3, \dots] \tag{7}$$

Теперь определим пространство Фока фермионов. Для начала введем линейное пространство $V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\nu_k$. Теперь можем определить пространство Фока, как полубесконечную внешнюю степень пространства $V$:

$$\mathcal{F} = \Lambda^{\frac{\infty}{2}} V = Lin\{\nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots | i_{-k} = -k,\ k \gg 1\} \tag{8}$$

Для описания фермионов нам понадобится алгебра, отличная от бозонов, а именно алгебра Клиффорда с генераторами $\{\psi_n, \psi_m | n, m \in \mathbb{Z}\}$:

$$\{\psi_n, \psi_m\} = 0, \quad \{\psi_n^*, \psi_m^*\} = 0, \quad \{\psi_n, \psi_m^*\} = \delta_{n,m} \tag{9}$$

Действие $\psi_n, \psi_m^*$ на пространстве $\mathcal{F}$ можно определить следующим образом. Для векторного пространства $V$ введем сопряженное пространство линейных функционалов $V^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\nu_k^*$, так что $\nu_i^*(\nu_j) = \delta_{i,j}$. Тогда вектора в $V$ и $V^*$ естественным образом задают действие на пространстве $\mathcal{F}$. Каждый $\nu_k \in V$ задает оператор $\psi_k$:

$$\psi_k(\nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots) = \nu_k \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots \tag{10}$$

Похожим образом определяется действие операторов $\psi_k^*$. Для каждого $\nu_k^* \in V^*$ определим

$$\psi_k^*(\nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots) = \nu_k^*(\nu_{i_{-1}}) \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots - \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_k^*(\nu_{i_{-2}}) \wedge \dots + \dots \tag{11}$$

Таким образом, пространство Фока фермионов является пространством представления алгебры Клиффорда.

Вектор вида

$$|0\rangle = \nu_{-1} \wedge \nu_{-2} \wedge \nu_{-3} \wedge \dots \tag{12}$$

будем называть вакуумным вектором. Из формул (10), (11) легко понять действие фермионов на вакуумный вектор:

$$\psi_k |0\rangle = 0, \quad k < 0, \qquad \psi_k^* |0\rangle = 0, \quad k \geq 0 \tag{13}$$

По отношению к вакууму $|0\rangle$, операторы $\psi_k, k < 0$ и $\psi_k^*, k \geq 0$ являются операторами уничтожения, в то время как операторы $\psi_k^*, k < 0$, и $\psi_k, k \geq 0$ - операторы рождения.

Теперь определим нормальное упорядочение фермионных операторов, которое будем обозначать $:(\dots):$. Все операторы уничтожения передвигаются вправо, а все операторы рождения влево, с учетом $(-1)$ при каждой перестановке двух соседних фермионов. Например, $:\psi_1^*\psi_1: \, = -\psi_1\psi_1^*$, $:\psi_{-1}\psi_0: \, = -\psi_0\psi_{-1}$.

Удобно ввести производящие функции для фермионов:

$$\psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k, \qquad \psi^*(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k^* z^{-k-1} \tag{14}$$

## 2.3 Алгебра $\widehat{gl(\infty)}$ и бозон-фермионное соотвествие

Оказывается, что на пространствах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{F}$ можно определить действие более сложной алгебры. Рассмотрим алгебру Ли матриц $gl(\infty)$, которая определяется следующим образом. Для каждой матрицы $A \in gl(\infty)$ выполняется условие $A_{ij} = 0$ для $|i-j| \gg 0$, то есть ненулевые элементы стоят лишь на конечном числе диагоналей этой матрицы. Также выполняются стандартные коммутационные соотношения для базисных элементов $E_{ij}$:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj} \tag{15}$$

Для того, чтобы определить действие алгебры на пространство $\mathcal{F}$, надо рассмотреть ее центральное расширение $\widehat{gl(\infty)}$. Как векторное пространство $\widehat{gl(\infty)} = gl(\infty) \oplus \mathbb{C}c$ и коммутационные соотношения двух произвольных матриц $A, B \in \widehat{gl(\infty)}$ имеют вид:

$$[A, B] = AB - BA + \alpha(A, B)c \tag{16}$$

Теперь определим действие алгебры $\widehat{gl(\infty)}$ на пространстве $\mathcal{F}$ через действие базисных элементов:

$$r(E_{ij}) =: \psi_i\psi_j^*: \tag{17}$$

несложно убедиться в том, что коммутационные соотношения (16) для $r(A), r(B)$ будут выполнены. Далее, под матрицами из $\widehat{gl(\infty)}$ будем понимать их представление на пространстве Фока фермионов $\mathcal{F}$.

Теперь рассмотрим матрицы

$$H_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} :\psi_k \psi_k^*: \tag{18}$$

Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[H_n, H_m] = n\delta_{n,-m} \tag{19}$$

то есть образуют подалгебру Гейзенберга $\mathcal{A} \subset \widehat{gl(\infty)}$. Мы получили действие подалгебры $\mathcal{A}$ на пространствах Фока бозонов и фермионов.

Бозон-фермионное соответствие заключается в том, чтобы определить действие $\widehat{gl(\infty)}$ на пространстве $\mathcal{B}$, и при этом построить отображение $\Phi : \mathcal{F} \to \mathcal{B}$, которое будет являться гомоморфизмом представлений. Такое отображение будет связывать базисные векторы пространств следующим образом:

$$\Phi(\nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots) = s_{[i_{-1}+1, i_{-2}+2, i_{-3}+3, \dots]}(\mathbf{t}) \tag{20}$$

Из условия (8), начиная с некоторого $k$, $i_{-k} + k = 0$, так что такая запись дает корректную диаграмму, нумерующую полином Шура. Например, $\Phi(|0\rangle) = s_{\varnothing}(\mathbf{t}) = 1$

В связи с тем, что мы дальше будем рассматривать иерархию КП, нас интересует действие группы $GL(\infty)$ только на вакуумный вектор $|0\rangle$. Группа $GL(\infty)$ получается стандартным экспоненциальным отображением из алгебры $\widehat{gl(\infty)}$. В этом случае отображение $\Phi$ записывают через среднее:

$$\Phi(G\,|0\rangle) = \langle 0|\, e^{H(\mathbf{t})} G\,|0\rangle \tag{21}$$

где через $H(\mathbf{t})$ обозначена сумма коммутативной подалгебры из $\mathcal{A}$

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k H_k \tag{22}$$

# 3 Иерархия КП

В разделе кратко приведем основные сведения про уравнения КП, более подробное изложение можно найти, например в [8]. Иерархией Кадомцева-Петвиашвили называют бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений. Первое из этих уравнений имеет вид:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \tag{23}$$

Удобнее работать с $\tau$-функциями $\tau(\mathbf{t}) = \exp(F(\mathbf{t}))$, так как все уравнения иерархии можно записать в терминах $\tau$-функций через билинейное тождество Хироты, которое, в свою очередь, эквивалентно следующему функциональному уравнению

$$(z_1 - z_2)\tau^{[z_1,z_2]}\tau^{[z_3]} + (z_2 - z_3)\tau^{[z_2,z_3]}\tau^{[z_1]} + (z_3 - z_1)\tau^{[z_3,z_1]}\tau^{[z_2]} = 0 \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered} \tau^{[z_1,\ldots,z_m]}(\mathbf{t}) = \tau\left(\mathbf{t} + \sum_{i=1}^{m}[z_i^{-1}]\right) \\ \mathbf{t} + [z^{-1}] = \left\{t_1 + \frac{1}{z}, t_2 + \frac{1}{2z^2}, t_3 + \frac{1}{3z^3}, \ldots\right\} \end{gathered} \tag{25}$$

Уравнение (24) должно быть выполнено при всех $z_1, z_2, z_3$ и его можно понимать так: разложить $\tau$-функции в окрестности $z_i = \infty$ и получить уравнение на $\tau$-функцию при каждой степени $z_i^{-k}$.

С одной стороны, все решения иерархии КП в виде $\tau$-функций можно разложить по базису из полиномов Шура:

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) \tag{26}$$

Функция, представленная в таком виде, является решением КП тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера на коэффициенты $C_\lambda$. Первое из этих соотношений

$$C_{[2,2]}C_{[\varnothing]} - C_{[2,1]}C_{[1]} + C_{[2]}C_{[1,1]} = 0 \tag{27}$$

$\tau$-функцию в виде (26) будем называть $\tau$-функцией в бозонном представлении.

С другой стороны, $\tau$-функция является точкой на орбите действия группы $GL(\infty)$ на вакуум $|0\rangle$:

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0|\, e^{H(\mathbf{t})} G\, |0\rangle \tag{28}$$

$\tau$-функцию в виде (28) будем называть $\tau$-функцией в фермионном представлении. Отображение $\Phi$ бозон-фермионного соответствия задает связь $\tau$-функций в бозонном и фермионном представлениях:

$$C_\lambda = \det\left(G^{-1,-2,-3,\ldots}_{i_{-1},i_{-2},i_{-3},\ldots}\right) \tag{29}$$

где в последнем выражении берется детерминант от матрицы, полученной при пересечении столбцов $-1, -2, -3, \dots$ и строк $i_{-1}, i_{-2}, i_{-3}, \dots$ исходной матрицы $G$. Числа $i_{-k}$ определяются из диаграммы Юнга $\lambda = [i_{-1}+1, i_{-2}+2, \dots]$.

## 3.1 Гипергеометрические $\tau$-функции

Особый интерес для нас будет представлять класс гипергеометрических $\tau$-функций, который был впервые введен в работе [9], а также изучался Орловым и Щербиным в статье [10]. В фермионном представлении такие $\tau$-функции имеют вид:

$$\begin{gathered}\tau(\mathbf{t}) = \langle 0| \, e^{H(\mathbf{t})} e^{A(\beta)} \, |0\rangle \\ A(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A_k, \qquad A_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r(n) r(n-1) \dots r(n-k+1) \colon \psi_n \psi^*_{n-k} \colon\end{gathered} \tag{30}$$

где $r(n)$ – произвольная функция, и произвольный набор фиксированных параметров $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. То есть матрица $A_k$ имеет ненулевые элементы конкретного вида на $(-k)$-ой диагонали. Несложно получить другой, в некоторых случаях более удобный, вид матрицы $A_k$:

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi i} \colon \left[ \left( \frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) \colon \tag{31}$$

где $D = z\frac{d}{dz}$, так что $r(D) z^n = r(n) z^n$, откуда, используя вид фермионных полей (14), и получается формула (31).

Введем понятие содержания $c(w)$ клетки $w$ диаграммы Юнга $\lambda$:

$$c(w) = j - i, \;\; 1 \le i \le l(\lambda), \;\; 1 \le j \le \lambda_i \tag{32}$$

Например, для диаграммы $[5, 3, 2]$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \cline{1-3} -2 & -1 \\ \cline{1-2} \end{array} \tag{33}$$

Тогда гипергеометрические $\tau$-функции в бозонном представлении:

$$\tau(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} r_\lambda s_\lambda(\beta) s_\lambda(\mathbf{t}) \tag{34}$$

где

$$r_\lambda = \left( \prod_{w\in\lambda} r(c(w)) \right) \tag{35}$$

Семейство таких функций будем называть гипергеометрическими $\tau$-функциями или семейством Орлова-Щербина.

# 4 Деформация иерархии КП

В этом разделе рассмотрим три различных подхода к деформационному квантованию иерархии КП. Как мы увидим далее, все три подхода дают одинаковые деформации.

## 4.1 Деформация Такасаки-Такебе

Такасаки и Такебе первыми написали деформацию иерархии КП в работе [3]. Основной идеей деформации было изучение бездисперсионной иерархии КП, которая получается в пределе по параметру деформации $\hbar \to 0$. Естественно, что для существования такого предела параметр $\hbar$ должен "правильно"входить в логарифм $\tau$-функции и в уравнения: не должно быть отрицательных степеней $\hbar$. Первое уравнение бездисперсионной иерархии имеет вид:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 \tag{36}$$

Деформация Такасаки-Такебе проделана в формализме Лакса, но в таких терминах деформация $\tau$-функции и уравнений иерархии задана неявно. Поэтому, мы будем пользоваться утверждением о том, как деформируется $\tau$-функция в фермионном представлении.

**Утверждение 1.** *$\tau$-функции с "хорошим"квазиклассическим поведением имеет вид*

$$\begin{gathered}\tau^\hbar(\boldsymbol{t}) = \langle 0|\, e^{H(\boldsymbol{t}/\hbar)} \exp\left(\frac{1}{\hbar}A^\hbar\right)|0\rangle \\ A^\hbar = \oint \frac{dz}{2\pi i} \colon \left[\hat{A}\left(z, \hbar\frac{d}{dz}\right)\psi(z)\right]\cdot \psi^*(z)\colon \end{gathered} \tag{37}$$

*где $\hbar$ входит в дифференциальный оператор $\hat{A}\left(z, \hbar\frac{d}{dz}\right)$ вместе с производной и еще может содержаться в коэффициентах при разложении по базису:*

$$\hat{A}\left(z, \hbar\frac{d}{dz}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}, j\geq 0} a_{i,j}(\hbar) z^i (\hbar\partial_z)^j \tag{38}$$

*то есть в коэффициентах $a_{i,j}(\hbar)$. Но есть ограничения на то, как $\hbar$ может входить в $a_{i,j}(\hbar)$, а именно:*

$$a_{i,j} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{i,j}^{(m)} \hbar^m \tag{39}$$

Как мы увидим в дальнейшем на ряде примеров, достаточно того, что $a_{i,j}$ не зависят от $\hbar$.

Заметим, что отличия таких $\tau$-функций от классических $\tau$-функций КП в том, что произошло перескалирование переменных $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$, а также параметр деформации $\hbar$ входит в матрицу из группы $GL(\infty)$, а значит, и в коэффициенты $C_\lambda$ из формулы (26).

## 4.2 Формальная Деформация Натанзона-Забродина

Натанзон и Забродин в своей статье [4] написали формальную деформацию иерархии КП. То есть, это такая деформация, которая предполагает добавление параметра $\hbar$, но при этом, вообще говоря, полученные функции могут содержать произвольные степени $\hbar$. Деформированная иерархия определяется через функциональное уравнение вида (24), только теперь меняется сдвиг "времён"$\tau$-функции (25):

$$(z_1 - z_2)\tau^{[z_1,z_2]}\tau^{[z_3]} + (z_2 - z_3)\tau^{[z_2,z_3]}\tau^{[z_1]} + (z_3 - z_1)\tau^{[z_3,z_1]}\tau^{[z_2]} = 0$$

$$\tau^{[z_1,\dots,z_m]}(\mathbf{t}) = \tau\left(\mathbf{t} + \hbar\sum_{i=1}^{m}[z_i^{-1}]\right) \tag{40}$$

$$\mathbf{t} + \hbar[z^{-1}] = \left\{t_1 + \frac{\hbar}{z}, t_2 + \frac{\hbar}{2z^2}, t_3 + \frac{\hbar}{3z^3}, \dots\right\}$$

тогда первое уравнение иерархии будет выглядеть так:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{12}\frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} \tag{41}$$

Заметим, что при $\hbar \to 0$, это уравнение переходит в бездисперсионное уравнение (36).

Так деформированную иерархию будем называть $\hbar$-КП. При $\hbar = 1$ деформированная иерархия переходит в классическую КП, как в разделе 3. Деформация эквивалентна тому, чтобы перескалировать переменные $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$. Так, из произвольной $\tau$-функции КП можно получить $\tau$-функцию $\hbar$-КП. Но при такой тривиальной деформации нет хороших свойств для логарифма $\tau$-функции

$$F^{\hbar}(\mathbf{t}) = \hbar^2 \log(\tau^{\hbar}(\mathbf{t})) \tag{42}$$

который может зависеть от всех степеней $\hbar$. Нетривиальная деформация возникает, когда параметр $\hbar$ появляется еще и в коэффициентах Плюккера $C_\lambda$ в формуле (26):

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} C_\lambda^{\hbar} s_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{43}$$

В этом случае функции $F^{\hbar}(\mathbf{t})$ могут иметь хороший квазиклассический предел и, более того, иметь геометрический смысл – разложение по родам (например, производящая функция для чисел Гурвица). Но как деформировать конкретную $\tau$-функцию, чтобы она имела неотрицательные степени $\hbar$, такой метод не говорит.

Утверждение, о том, что из классической $\tau$-функции получается деформированная при замене переменных $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$, верно и в обратную сторону: если имеется деформированная $\tau$-функция $\tau^{\hbar}(\mathbf{t})$, то она будет решением классического КП при обратной замене, а значит, коэффициенты $C_\lambda^{\hbar}$ должны удовлетворять классическим соотношениям Плюккера. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**Утверждение 2. (Критерий принадлежности $\hbar$-КП)** *$\tau$-функция вида* (43) *принадлежит $\hbar$-КП тогда и только тогда, когда коэффициенты $C_\lambda^\hbar$ удовлетворяют классическим соотношениям Плюккера.*

Основной целью такой формальной деформации является получение явной формулы для функции $F = \log\tau$, которой нет в классической иерархии КП. Для этого необходимо немного модифицировать $\tau$-функции. Как известно [8], в теории КП переменная $t_1$ выделена: $\tau$-функция по прежнему останется решением иерархии, если сделать замену $t_1 \to t_1 + x$. Тогда будем понимать $\tau$-функцию как $\tau^\hbar(x, \mathbf{t}) = f(x)\hat{\tau}(x+t_1, t_2, t_3, \dots)$. Тогда все решения иерархии в таком виде записываются в следующем виде.

**Утверждение 3.** *Пусть $\tau^\hbar(x, \boldsymbol{t}) = f(x)\hat{\tau}(x + t_1, t_2, \dots)$ является $\tau$-функцией иерархии $\hbar$-КП и функция $\tau^\hbar(x, \boldsymbol{0})$ бесконечно дифференцируема по переменной $x$. Тогда коэффициенты в разложении*

$$\tau^\hbar(x, \boldsymbol{t}) = \sum_\lambda C_\lambda^\hbar(x) s_\lambda\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\hbar}\right) \tag{44}$$

*связаны соотношениями*

$$C_\lambda^\hbar(x) = (C_0^\hbar(x))^{1-l(\lambda)} \det_{1\le i,j\le l(\lambda)}\left[\sum_{k=0}^{j-1}(-\hbar)^k\binom{j-1}{k}\partial_x^k C^\hbar_{\lambda_i-i+j-k}(x)\right] \tag{45}$$

*где $\binom{j-1}{k} = \frac{(j-1)!}{k!(j-1-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, $C_0^\hbar(x) = C_\varnothing^\hbar(x), C_k^\hbar(x) = C_{[k]}^\hbar(x)$*

*Обратно, если $C_k^\hbar(x)$ произвольные бесконечно дифференцируемые функции по переменной $x$ и $C_\lambda^\hbar$ заданы соотношением* (45)*, тогда разложение вида* (44) *является решением $\hbar$-КП ($\hbar \neq 0$).*

Как мы видим из этого утверждения, $\tau$-функция в таком виде задается произвольным набором бесконечно дифференцируемых функций $C_k^\hbar(x)$. Для того, чтобы отличать их от коэффициентов Плюккера, явно пишется зависимость от переменной $x$. По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями, набор функций (начальные данные при $\mathbf{t} = 0$), которые задают решение, называют Коши-подобными данными. Они связаны с $\tau$-функцией следующими соотношениями

$$\tau^\hbar(x, \mathbf{0}) = C_0^\hbar(x), \quad \partial_k^\hbar \tau^\hbar(x, \mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=0} = \frac{k}{\hbar}C_k^\hbar(x) \tag{46}$$

где деформированная производная $\partial_k^\hbar$ определяется через симметрические полиномы Шура:

$$\partial_k^\hbar = \frac{k}{\hbar}s_{[k]}(\hbar\widetilde{\partial}), \qquad \widetilde{\partial} = \left\{\partial_1, \frac{1}{2}\partial_2, \frac{1}{3}\partial_3, \dots\right\} \tag{47}$$

первые несколько деформированных производных: $\partial_1^\hbar = \partial_1, \partial_2^\hbar = \partial_2 + \hbar\partial_1^2, \partial_3^\hbar = \partial_3 + \frac{3}{2}\hbar\partial_1\partial_2 + \frac{1}{2}\hbar^2\partial_1^3$ При $\hbar = 0$ деформированные производные переходят в обычные: $\partial_k^{\hbar=0} = \partial_k$.

Следующий шаг – получение явной формулы для функции $F = \log\tau$. Для этого еще понадобится ввести деформированные переменные $t_\lambda^\hbar$ и комбинаторные коэффициенты $P_\lambda^\hbar$. Подробное описание этих величин можно найти в [4]

**Утверждение 4.** *Для любого набора гладких функций*

$$\boldsymbol{f} = \{f_0^\hbar(x), f_1^\hbar(x), \dots\}$$

*существует единственное решение* $F^\hbar(x, \boldsymbol{t})$ *иерархии* $\hbar$*-КП, такое что* $F^\hbar(x,0) = f_0(x)$ *и* $\partial_k^\hbar F^\hbar(x,\boldsymbol{t})|_{\boldsymbol{t}=0} = f_k^\hbar(x)$. *Это решение имеет вид*

$$F^\hbar(x,\boldsymbol{t}) = f_0^\hbar(x) + \sum_{|\lambda|\geq 1} \frac{f_\lambda^\hbar(x)}{\sigma(\lambda)} t_\lambda^\hbar \tag{48}$$

*где* $f_{[k]}^\hbar(x) = f_k^\hbar(x)$ *и*

$$f_\lambda^\hbar(x) = \sum_{m\geq 1} \sum_{\substack{s_1+l_1+\dots+s_m+l_m=|\lambda| \\ 1\leq s_i; 1\leq l_i \leq l(\lambda)-1}} P_\lambda^\hbar \begin{pmatrix} s_1 \dots s_m \\ l_1 \dots l_m \end{pmatrix} \partial_x^{l_1} f_{s_1}^\hbar(x) \dots \partial_x^{l_m} f_{s_m}^\hbar(x) \tag{49}$$

*для* $l(\lambda) > 1$.

Как было для $\tau$-функции, так и для её логарифма, решение задается произвольным набором функций, которые также будем называть Коши-подобными данными для функции $F$. Формула (48) есть не что иное, как модифицированное разложение в ряд Тейлора по переменным $t_k$ с параметрами $x$ и $\hbar$. Главный результат этого утверждения – существование универсальных комбинаторных коэффициентов $P_\lambda^\hbar$, вид которых зависит только от явного вида уравнений КП и не зависит от конкретного решения и которые позволяют восстанавливать полное решение по Коши-подобным данным.

## 4.3 Геометрическая деформация Казаряна-Ландо

Деформация в статье Казаряна и Ландо [5] делается для классической производящей функции простых чисел Гурвица, которая является решением классической иерархии КП, а затем деформируются и сами уравнения иерархии. Для того, чтобы понять, как происходит деформация, вначале напомним геометрический смысл чисел Гурвица.

### 4.3.1 Числа Гурвица

Числа Гурвица были введены самим Гурвицем еще в 19 веке. Простые числа Гурвица перечисляют разветвленные накрытия римановой сферы двумерной поверхностью рода $g$ с $m$ простыми точками ветвления и одной точкой с ветвлением заданным разбиением $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{l(\mu)}]$. Таким величинам можно дать чисто комбинаторное описание. Будем обозначать простые числа Гурвица $h^\circ_{m;\mu}$, для них справедливо такое выражение [5]

$$h^\circ_{m;\mu} = \frac{1}{|\mu|!} \left| \{(\eta_1, \dots, \eta_m), \eta_i \in C_2(S_{|\mu|}) : \eta_m \circ \dots \circ \eta_1 \in C_\mu(S_{|\mu|})\} \right| \tag{50}$$

где $S_{|\mu|}$ - группа перестановок $|\mu|$ элементов, $C_2(S_{|\mu|})$ – множество всех перестановок из двух элементов (транспозиций) в $S_{|\mu|}$, а $C_\mu(S_{|\mu|})$ – множество всех перестановок циклового типа $\mu$. $\eta_1, \ldots, \eta_m$ соответствуют простым точкам ветвления, а их композиция соответствует выделенной точке ветвления с разбиением $\mu$.

Связные простые числа Гурвица $h_{m;\mu}$ определяются аналогично, только теперь накрывающая поверхность должна быть связным множеством. С комбинаторной точки зрения соотношение (50) остается почти таким же: теперь надо учитывать только такие наборы транспозиций $\eta_i$, что порожденная ими подгрупа $\langle\eta_1, \ldots, \eta_m\rangle\subset S_{|\mu|}$.

Для простых чисел Гурвица можно записать производящую функцию, которая является $\tau$-функцией классического КП (см. например [2], [5]):

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h^{\circ}_{m;\mu} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \ldots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!} \tag{51}$$

Общее соотношение между связными и несвязными объектами: (связные объекты) = log(несвязные объекты). Тогда логарифм $\tau$-функции является производящей функцией связных чисел Гурвица и в то же время является решением уравнений КП:

$$F_H(\mathbf{t}) = \log(\tau_H(\mathbf{t})) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu} t_{\mu_1} t_{\mu_2} \ldots t_{\mu_{l(\mu)}} \frac{u^m}{m!} \tag{52}$$

Производящая функция для простых чисел Гурвица принадлежит гипергеометрическим $\tau$-функциям и ее можно записать в виде (34)

$$\tau_H(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{uc(\lambda)} s_\lambda(\beta_k = \delta_{k,1}) s_\lambda(\mathbf{t}) \tag{53}$$

где $c(\lambda) = \sum_{w\in\lambda} c(w)$. Параметры производящей функции чисел Гурвица (в дальнейшем будем называть просто числами Гурвица для краткости) в семействе Орлова-Щербина:

$$\begin{gathered} r(n) = e^{un}, \\ \beta_1 = 1, \\ \beta_k = 0, k \geq 2 \end{gathered} \tag{54}$$

### 4.3.2 Разложение по родам и деформация иерархии КП

Как было сказано выше, числа Гурвица перечисляют разветвленные накрытия двумерной сферы. Род накрывающей поверхности однозначно задается данными ветвления по знаменитой формуле Римана-Гурвица. Лучше говорить об эйлеровой храктеристике для связных накрытий, которые перечисляются функцией $F_H(\mathbf{t})$. В случае связного разветвленного накрытия с $m$ простыми точками ветвления и одной точкой с ветвлением циклового типа $\mu$ формула Римана-

Гурвица имеет вид

$$2g-2=m-|\mu|-l(\mu) \tag{55}$$

С её помощью выделим вклады от каждого рода $g$ в производящей функции. Каждая точка простого ветвления дает единицу в степень параметра $\hbar$, а каждый цикл длины $\mu_i$ понижает степень параметра на $(\mu_i+1)$. Тогда получаем такую замену переменных:

$$\begin{gathered} t_{\mu_i} \to \hbar^{-\mu_i-1} t_{\mu_i} \\ u \to \hbar u \end{gathered} \tag{56}$$

Домножим всю функцию на $\hbar^2$, чтобы убрать отрицательные степени $\hbar$, возникающие из-за лишней двойки в (55). Тогда, согласно нашим рассуждениям, функция $F_H^\hbar(\mathbf{t})$ имеет разложение по родам:

$$F_H^\hbar(\mathbf{t})=\sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_H^g(\mathbf{t}) \tag{57}$$

Деформированная функция уже не будет удовлетворять классическим уравнениям КП. Необходимо в уравнениях КП сделать замену "времён"как в формуле (56). Первое уравнение иерархии будет в точности совпадать с уравнением, полученным при деформации Натанзона-Забродина (41), и, соотвественно, в пределе $\hbar \to 0$ переходить в бездисперсионное уравнение (36). Вывод, который можно из этого сделать – параметры $\hbar$ в деформациях Натанзона-Забродина и Казаряна-Ландо совпадают. Но говорить о том, что деформированные числа Гурвица являются решением $\hbar$-КП пока рано: если так действовать, то придется проверять весь бесконечный набор уравнений КП. Доказательство этого факта будет приведено в следующем разделе.

Казарян и Ландо проводят деформацию и для других $\tau$-функций из семейства гипергеометрических $\tau$-функций с произвольной функцией $r(n)$, но с фиксированными параметрами $\beta_1=1, \beta_k=0, k\geq 2$. Пусть $r(n)$ - произвольный степенной ряд

$$r(n)=a_0+a_1 n+a_2 n^2+\ldots \tag{58}$$

Тогда, согласно Казаряну и Ландо, для функций из семейства Орлова-Щербина с параметрами $\beta_k=\delta_{k,1}$ деформация $\tau$-функции должна быть следующей:

$$\begin{gathered} r(c(w)) \to r(\hbar c(w)) \\ t_k \to \frac{t_k}{\hbar^{k+1}} \end{gathered} \tag{59}$$

Более того, согласно результатами Ги-Паке и Харнада [11] такая деформация функций $F^\hbar(\mathbf{t})=\hbar^2\log(\tau^\hbar(\mathbf{t}))$ будет содержать только четные порядки $\hbar$.

# 5 Сравнение деформаций и примеры

Одним из недостатков подхода к деформации всей иерархии является отсутствие примеров. В данном разделе мы рассмотрим несколько примеров, для которых независимо была давно проделана и хорошо известна геометрическая деформация – разложение по родам. Мы получим, что все эти деформированные $\tau$-функции будут решениями $\hbar$-КП. Деформацию будем проводить как в бозонном представлении, чтобы сравнивать с деформацией Натанзона-Забродина, так и в фермионном представлении, чтобы сравнивать с деформацией Такасаки-Такебе.

## 5.1 $\tau$-функция чисел Гурвица

Рассмотрим деформацию Казаряна-Ландо и покажем, что так деформированная $\tau$-функция Гурвица будет решением формальной деформации Натанзона-Забродина $\hbar$-КП и будет правильно деформироваться согласно Такасаки-Такебе. Из деформации (56) и явной формулы (53) для $\tau_H(\mathbf{t})$ получаем:

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda(\beta_k = \delta_{k,1}) s_\lambda \left( \frac{t_1}{\hbar^2}, \frac{t_2}{\hbar^3}, \frac{t_3}{\hbar^4}, \dots \right) \tag{60}$$

Заметим, что для каждого слагаемого вида $\prod_{i=1}^{k} t_{m_i}$, которое входит в полином Шура $s_\lambda(\mathbf{t})$, выполняется равенство $\sum_{i=1}^{k} m_i = |\lambda|$. А значит

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{t_{m_i}}{\hbar^{m_i+1}} = \frac{1}{\hbar^{|\lambda|}} \prod_{i=1}^{k} \frac{t_{m_i}}{\hbar} \tag{61}$$

И тогда деформированная $\tau$-функция будет записана в виде (43):

$$\tau_H^{\hbar}(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \frac{e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda(\beta_k = \delta_{k,1})}{\hbar^{|\lambda|}} s_\lambda \left( \frac{\mathbf{t}}{\hbar} \right) \tag{62}$$

Теперь, согласно утверждению 2, чтобы доказать, что такая $\tau$-функция является решением $\hbar$-КП, достаточно показать, что коэффициенты $C_\lambda^{\hbar}$ удовлетворяют соотношениям Плюккера. Недеформированные $C_\lambda$ для чисел Гурвица выглядели так:

$$C_\lambda = e^{uc(\lambda)} s_\lambda(\beta_k = \delta_{k,1}) \tag{63}$$

и удовлетворяли соотношениям Плюккера для любого $u$. Следовательно, перескалирование $u$ на $\hbar$ не изменит соотношения Плюккера. Домножение $C_\lambda$ на $\frac{1}{\hbar^{|\lambda|}}$ тоже ничего не поменяет, потому что соотношения Плюккера однородны по сумме модулей диаграмм Юнга: $|\lambda_1| + |\lambda_2| = const$. Отсюда получаем, что $C_\lambda^{\hbar}$ удовлетворяют классическим соотношениям Плюккера, а, следовательно, деформированная $\tau$-функция Гурвица является решением $\hbar$-КП.

Отметим, что деформированную $\tau$-функцию Гурвица можно переписать в более удобном виде:

$$\tau_H^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\frac{1}{\hbar},0,0,\dots\right) s_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{64}$$

с деформированными коэффициентами Плюккера

$$C_\lambda^\hbar = e^{u\hbar c(\lambda)} s_\lambda\left(\beta_k = \frac{\delta_{k,1}}{\hbar}\right) \tag{65}$$

то есть деформация Казаряна-Ландо для чисел Гурвица (56) эквивалентна такой деформации:

$$\boxed{\begin{gathered} r(n) = e^{un} \to r(\hbar n) = e^{u\hbar n} \\ \beta_1 \to \frac{\beta_1}{\hbar} \\ t_k \to \frac{t_k}{\hbar} \end{gathered}} \tag{66}$$

Теперь займёмся деформацией в фермионном представлении. Так как мы знаем параметры $\tau$-функции чисел Гурвица в семействе Орлова-Щербина (54), то сразу можем выписать матрицу в фермионном представлении по формулам (30) и (31):

$$A_H = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k A_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{un} :\psi_n\psi_{n-1}^*: \; = \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left[\left(\frac{1}{z}\exp(D)\right)\psi(z)\right]\cdot\psi^*(z): \tag{67}$$

где $D = z\frac{d}{dz}$. Несложно проверить, что такая матрица по формуле (29) дает правильные коэффициенты Плюккера (63). Из деформации, записанной в форме (66), ясно как деформировать матрицу в фермионном представлении: замена $\beta_1 \to \frac{\beta_1}{\hbar}$ соответствует множителю $\frac{1}{\hbar}$ перед интегралом, а замена $e^{un} \to e^{u\hbar n}$ соответствует перескалированию производной $D = z\frac{d}{dz} \to \hbar D = z\hbar\frac{d}{dz}$. Тогда получаем деформированную матрицу:

$$A_H^\hbar = \frac{1}{\hbar}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{u\hbar n} :\psi_n\psi_{n-1}^*: \; = \frac{1}{\hbar}\oint \frac{dz}{2\pi i} : \left[\left(\frac{1}{z}\exp(\hbar D)\right)\psi(z)\right]\cdot\psi^*(z): \tag{68}$$

В итоге, для того, чтобы выписать $\tau$-функцию в фермионном представлении, надо ещё учесть замену $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$:

$$\tau_H^\hbar(\mathbf{t}) = \langle 0|\, e^{H(\mathbf{t}/\hbar)} e^{A_H^\hbar}\, |0\rangle \tag{69}$$

Такой вид $\tau$-функции в точности совпадает с деформацией Такасаки-Такебе (37). Если теперь по формуле (29) вычислить коэффициенты Плюккера перед полиномами Шура, то получатся деформированные коэффициенты из формулы (65). Таким образом, мы получили, что деформированная $\tau$-функция Гурвица правильно деформируется согласно Такасаки-Такебе.

## 5.2 Эрмитова матричная модель

Рассмотрим ещё один пример $\tau$-функции, которая является решением $\hbar$-КП с "хорошим" квазиклассическим поведением. Для эрмитовой матричной модели существует геометрическая деформация – разложение по родам: корреляторы в такой модели сопоставляются графам на двумерной поверхности по теореме Вика. Тогда мы можем выделить вклады поверхностей разного рода добавлением параметра $\hbar$.

Определение классической эрмитовой матричной модели (HM):

$$Z_N(\mathbf{t}) = \frac{\int DX \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(X^2) + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \operatorname{Tr}(X^k)\right)}{\int DX \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(X^2)\right)} \tag{70}$$

где интеграл берется по эрмитовым матрицам $X$ размера $N \times N$. Известно, что статсумму HM можно переписать в виде [12]:

$$Z_N(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \frac{s_\lambda(\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2})}{s_\lambda(t''_n = \delta_{n,1})} s_\lambda(t'_n = N/n) s_\lambda(\mathbf{t}) \tag{71}$$

Используя соотношение

$$\frac{D_\lambda(N)}{d_\lambda} \equiv \frac{s_\lambda(t'_n = N/n)}{s_\lambda(t''_n = \delta_{n,1})} = \prod_{w\in\lambda}(N + c(w)) \tag{72}$$

мы запишем эту функцию в более удобном для нас виде (34) из семейства гипергеометрических $\tau$-функций с параметрами семейства

$$\begin{gathered} r(n) = N + n; \\ \beta_k = \frac{1}{2}\delta_{k,2} \end{gathered} \tag{73}$$

Окончательно, классическая эрмитова матричная модель является гипергеометрической $\tau$-функцией классического КП и в терминах этого семейства имеет вид

$$\tau_{HM}(\mathbf{t}) \equiv Z_N(\mathbf{t}) = \sum_{\lambda} \left(\prod_{w\in\lambda}(N + c(w))\right) s_\lambda\left(\beta_k = \frac{1}{2}\delta_{k,2}\right) s_\lambda(\mathbf{t}) \tag{74}$$

Отметим, что деформация Казаряна-Ландо (59) неприменима для этой модели – отличаются параметры $\beta$. Коэффициенты Плюккера для этой модели удовлетворяют соотношениям Плюккера для любого $N$:

$$C_\lambda = \left(\prod_{w\in\lambda}(N + c(w))\right) s_\lambda\left(\beta_k = \frac{1}{2}\delta_{k,2}\right) \tag{75}$$

### 5.2.1 Разложение по родам

Хорошо известно, как деформировать эрмитову матричную модель, чтобы выделить вклады от поверхностей разного рода (см. например [13]):

$$Z_N^\hbar(\mathbf{t}) = \frac{\int DX \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\operatorname{Tr}(X^2) + \frac{1}{\hbar}\sum_{k=1}^{\infty} t_k \operatorname{Tr}(X^k)\right)}{\int DX \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\operatorname{Tr}(X^2)\right)} \tag{76}$$

Сразу можно сделать вывод, что переменные $t_k$ перескалируются: $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$. Чтобы правильно проделать деформацию, необходимо дополнительно положить $N\hbar = t_0$, где $t_0$ постоянный параметр и $N \to \infty$. Проделав вычисления, аналогичные переходу от (70) к (71), получим:

$$Z_N^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda \frac{\prod_{w\in\lambda}(t_0 + \hbar c(w))}{\hbar^{|\lambda|/2}} s_\lambda\left(\beta_n = \frac{1}{2}\delta_{n,2}\right) s_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{77}$$

Заметим, что $\hbar^{-|\lambda|/2}$ можно внести в полином Шура:

$$\tau_{HM}^\hbar(\mathbf{t}) \equiv Z_N^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_\lambda \left(\prod_{w\in\lambda}(t_0 + \hbar c(w))\right) s_\lambda\left(\beta_k = \frac{1}{2\hbar}\delta_{k,2}\right) s_\lambda\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{78}$$

с деформированными коэффициентами Плюккера

$$C_\lambda^\hbar = \left(\prod_{w\in\lambda}(t_0 + \hbar c(w))\right) s_\lambda\left(\beta_k = \frac{1}{2\hbar}\delta_{k,2}\right) \tag{79}$$

Важно отметить, что, как и в случае чисел Гурвица, $\tau_{HM}^\hbar(\mathbf{t})$ раскладывается как на связные графы, так и несвязные, поэтому "правильное" квазиклассическое поведение имеет логарифм $\tau$-функции, который раскладывается только по связным графам:

$$F_{HM}^\hbar(\mathbf{t}) = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F_{HM}^g(\mathbf{t}) \tag{80}$$

Обратный переход от $\tau$-функции $\hbar$-КП к классической происходит при $\hbar = 1$, значит, надо взять $t_0 = N$. Но, вообще говоря, функция (74) останется $\tau$-функцией при произвольных $N$, в том числе и не целых. В итоге, запишем, чему эквивалентна такая деформация эрмитовой модели:

$$\boxed{\begin{gathered} r(n) = (t_0 + n) \to r(\hbar n) = (t_0 + \hbar n) \\ \beta_2 \to \frac{\beta_2}{\hbar} \\ t_k \to \frac{t_k}{\hbar} \end{gathered}} \tag{81}$$

Покажем, что деформированная эрмитова модель является решением $\hbar$-КП. Действуем также, как для чисел Гурвица – покажем, что коэффициенты $C_\lambda^\hbar$ удовлетворяют классическим соотношениям Плюккера и воспользуемся утверждением 2. Для этого надо переписать $C^{\hbar}_{\lambda}$ в виде, из которого будет сразу следовать искомое:

$$C^{\hbar}_{\lambda} = \frac{1}{\hbar^{|\lambda|/2}} \left( \prod_{w \in \lambda} (t_0 + \hbar c(w)) \right) s_{\lambda} \left( \beta_k = \frac{1}{2}\delta_{k,2} \right) = \hbar^{|\lambda|/2} \left( \prod_{w \in \lambda} \left[ \frac{t_0}{\hbar} + c(w) \right] \right) s_{\lambda} \left( \beta_k = \frac{1}{2}\delta_{k,2} \right) \quad (82)$$

Пользуясь теми же аргументами, что и для чисел Гурвица, получаем, что HM $\in \hbar$-КП.

Чтобы иметь полную картину про эрмитову матричную модель, осталось проделать деформацию в фермионном представлении. Такая $\tau$-функция является гипергеометрической, а, значит, пользуясь деформацией (81), мы можем сразу выписать деформированную матрицу в фермионном представлении:

$$A^{\hbar}_{HM} = \frac{1}{\hbar} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (t_0 + \hbar n)(t_0 + \hbar(n-1)) \colon \psi_n \psi^*_{n-2} \colon = \frac{1}{\hbar} \oint \frac{dz}{2\pi i} \colon \left[ \left( \frac{1}{z}(t_0 + \hbar D) \right)^2 \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) \colon \quad (83)$$

которая вновь совпадает с деформацией Такасаки-Такебе (37).

## 5.3 Модель Концевича-Виттена

### 5.3.1 Деформация в бозонном представлении

В этом разделе обсудим как деформировать $\tau$-функцию Концевича-Виттена и докажем, что деформированная модель Концевица-Виттена является решением $\hbar$-КП. Модель Концевича-Виттена является важным объектом математической физики с тех пор, как гипотеза Виттена [14] была доказана Концевичем [1]. Модель Концевича-Виттена является производящей функцией индексов пересечения классов Черна на пространствах модулей комплексных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$. Индексы пересечения первых классов Черна

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g;n}} \psi_1^{m_1} \psi_2^{m_2} \dots \psi_n^{m_n} = \langle \sigma_{m_1} \sigma_{m_2} \dots \sigma_{m_n} \rangle \quad (84)$$

являются рациональными числами, не равными нулю только если

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - 1) = 3g - 3 \quad (85)$$

Определим для них производящую функцию с уже вставленным параметром деформации $\hbar$ [15]:

$$F^{\hbar}_{KW}(\tau_k) = \hbar^2 \left\langle \exp \left( \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)!! \hbar^{\frac{2(m-1)}{3}} \tau_m \sigma_m \right) \right\rangle = \sum_{g=0}^{\infty} \hbar^{2g} F^{g}_{KW}(\tau_k) \quad (86)$$

где параметр $\hbar$ снова имеет геометрический смысл – выделяет вклад рода $g$ римановой поверхности, которая задает пространство модулей $\mathcal{M}_{g;n}$.

Известно [1], что $Z^{\hbar}_{KW}(\tau_k) = \exp\left(\frac{1}{\hbar^2}F^{\hbar}_{KW}(\tau_k)\right)$ задается матричным интегралом Концевича

$$Z^{\hbar}_{KW}(\tau_k) = \exp\left(\frac{1}{\hbar^2}F^{\hbar}_{KW}(\tau_k)\right) = \frac{\int DX \exp\left(\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}\left(i\frac{X^3}{3!}+\frac{\Lambda X^2}{2}\right)\right)}{\int DX \exp\left(\frac{1}{\hbar}\operatorname{Tr}\frac{\Lambda X^2}{2}\right)} \tag{87}$$

где интеграл берется по эрмитовым матрицам $X$ и является $\tau$-функцией иерархии КдВ при $\hbar = 1$. В теории КП принято использовать "времена" $t_k$:

$$\tau_k = t_{2k+1} = \frac{\hbar}{2k+1}\operatorname{Tr}\Lambda^{-2k-1} \tag{88}$$

то есть $\tau^{\hbar}_{KW}(\mathbf{t}) \equiv Z^{\hbar}_{KW}(\mathbf{t})$ содержит только нечетные "времена".

Из (86) мы видим, что разложение по родам осуществляется перескалированием "времён":

$$t_{2k+1} \to \hbar^{\frac{2(k-1)}{3}} t_{2k+1} \tag{89}$$

но для $\hbar$-КП мы хотим делать замену переменных $t_k \to \frac{t_k}{\hbar}$. Хотелось бы получить разложение $\tau$-функции Концевича-Виттена по полиномам Шура

$$\tau^{\hbar}_{KW}(\mathbf{t}) \equiv Z^{\hbar}_{KW}(\mathbf{t}) = \sum_{|\lambda|\equiv 0 (mod\, 3)} C^{\hbar}_{\lambda} s_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{\hbar}\right) \tag{90}$$

К сожалению, даже в случае $\hbar = 1$ явного выражения для коэффициентов $C_\lambda$ нет в литературе. Самый простой способ вычисления этих коэффициентов предложил Чжоу в работе [16], где коэффициенты Плюккера выражаются через детерминант некоторой матрицы $A_{KW}$ (см. формулы (97), (98)). Тем не менее, можно доказать, что такая $\tau$-функция будет решением $\hbar$-КП даже если не знать явный вид $C_\lambda$.

Докажем, что деформация (89) эквивалентна следующей деформации:

$$\boxed{\begin{gathered} t_k \to \frac{t_k}{\hbar} \\ C_\lambda \to C^{\hbar}_{\lambda} = C_\lambda \hbar^{\frac{|\lambda|}{3}} \end{gathered}} \tag{91}$$

Предположим, что мы разложили $\tau$-функцию по полиномам Шура (90) с деформацией (91). Тогда произвольный моном в $\tau^{\hbar}_{KW}(\mathbf{t})$ имеет вид:

$$C^{\hbar}_{\lambda}\prod_{i=1}^{k}\frac{t_{2m_i+1}}{\hbar} = C_\lambda \hbar^{\frac{|\lambda|}{3}-k}\prod_{i=1}^{k} t_{2m_i+1} \tag{92}$$

теперь, используя простое соотношение

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^{k}(2m_i+1) = \left(\sum_{i=1}^{k} 2(m_i-1)\right) + 3k \tag{93}$$

получаем

$$C_\lambda \hbar^{\frac{|\lambda|}{3}-k}\prod_{i=1}^{k} t_{2m_i+1} = C_\lambda \hbar^{\left(\sum_{i=1}^{k}2(m_i-1)\right)}\prod_{i=1}^{k} t_{2m_i+1} = C_\lambda \prod_{i=1}^{k}\hbar^{\frac{2(k-1)}{3}} t_{2k+1}$$

Откуда легко увидеть, что деформации (89) и (91) совпадают. Так как $C_\lambda$ удовлетворяют соотношениям Плюккера, то из однородности соотношений Плюккера по сумме модулей диаграмм Юнга следует, что $C_\lambda^\hbar$ тоже будет удовлетворять соотношениям Плюккера, а, значит, и $\tau^\hbar_{KW}(\mathbf{t}) \in \hbar$-КП.

### 5.3.2 Деформация в фермионном представлении

Теперь разберемся как деформируется $\tau$-функция Концевича-Виттена в фермионном представлении. В случае $\hbar = 1$ его получил Чжоу в работе [16].

Стандартные несколько первых членов $\tau$-функции Концевича-Виттена из формулы (87) при $\hbar = 1$:

$$Z_{KW}(t) = 1 + \left(\frac{1}{6}t_1^3 + \frac{1}{8}t_3\right) + \left(\frac{1}{72}t_1^6 + \frac{25}{48}t_1^3 t_3 + \frac{25}{128}t_3^2 + \frac{5}{8}t_1 t_5\right) + \dots \tag{94}$$

Чжоу выполняет такую замену:

$$t_{2k+1} = (-1)^n \frac{\sqrt{-2}}{2^{k+1}} T_{2k+1} \tag{95}$$

и получает функцию в новых переменных:

$$Z_{KW}(T) = 1 - \sqrt{-2}\left(\frac{1}{24}T_1^3 + \frac{1}{32}T_3\right) - \left(\frac{1}{576}T_1^6 + \frac{25}{384}T_1^3 T_3 + \frac{25}{1024}T_3^2 + \frac{5}{64}T_1 T_5\right) + \dots \tag{96}$$

Тогда фермионное представление такой $\tau$-функции имеет вид

$$\begin{gathered} Z_{KW} = \langle 0|\, e^{H(T)} e^{A}\, |0\rangle \\ A_{KW} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} A_{m,n} :\psi_m \psi^*_{-n-1}: \end{gathered} \tag{97}$$

где матрица $A_{KW}$ переписана в терминах фермионов из раздела 2. Коэффициенты $A_{m,n}$ вычисляются следующим образом: $A_{m,n} = 0$ если $m, n < 0$ и если $m + n \neq -1 \mod 3$, иначе

$$\begin{gathered} A_{3m-3,3n+2} = A_{3m-1,3n} \\ A_{3m-1,3n} = (-1)^n \left(-\frac{\sqrt{-2}}{144}\right)^{m+n} \frac{(6m+1)!!}{(2(m+n))!} \prod_{j=0}^{n-1}(m+j) \prod_{j=1}^{n}(2m+2j-1)\left(B_n(m) + \frac{b_n}{6m+1}\right) \\ A_{3m-2,3n+1} = (-1)^n \left(-\frac{\sqrt{-2}}{144}\right)^{m+n} \frac{(6m+1)!!}{(2(m+n))!} \prod_{j=0}^{n-1}(m+j) \prod_{j=1}^{n}(2m+2j-1)\left(B_n(m) + \frac{b_n}{6m-1}\right) \end{gathered} \tag{98}$$

где $B_n(m) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} 108^j b_{n-j} \cdot (m+n)_{[j-1]}$, нижний индекс в скобках $a_{[j]}$ обозначает символ Похгаммера, $b_n = (2^n) \cdot (6n+1)!!/((2n)!)$. Для нашей цели вычислять напрямую эти коэффициенты не придется – будем использовать только их обозначение $A_{m,n}$.

Матрица $A_{KW}$, как следует из определения, имеет ненулевые элементы только на (-3)-й, (-6)-й, (-9)-й и так далее диагоналях. Это можно записать в виде $A_{KW} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$, где $A_k$ соответствует ненулевой $(-3k)$-й диагонали. С одной стороны коэффициенты $C_\lambda$ для модели Концевича-Виттена можно посчитать по формуле (29), вычислив детерминант, составленный из матрицы $\exp(A_{KW})$. С другой стороны, Чжоу показал, что

$$C_\lambda = (-1)^{n_1+n_2+\dots} \det_{1\le i,j,\le k} \left(A_{m_i,n_j}\right) \tag{99}$$

где $\lambda = (m_1, m_2, \dots, m_f | n_1, n_2, \dots, n_f)$ - диаграмма Юнга в координатах Фробениуса ($m_i = \lambda_i - i, n_i = (\lambda^T)_i - i$, для $1 \le i \le f$, где $f$ - количество клеток на главной диагонали диаграммы). Все однокрюковые диаграммы в координатах Фробениуса имеют вид $\lambda = (m|n)$, следовательно, $A_{m,n}$ задают с точностью до знака однокрюковые коэффициенты $C_\lambda$.

Этого нам достаточно, чтобы понять, как деформировать матрицу в фермионном представлении. Из деформации (91) ясно, что коэффициенты для диаграмм $|\lambda| = 3$ умножаются на $\hbar$, коэффициенты для диаграмм $|\lambda| = 6$ умножаются на $\hbar^2$, и так далее. Тогда

$$A^\hbar_{KW} = \hbar A_1 + \hbar^2 A_2 + \hbar^3 A_3 + \dots \tag{100}$$

Теперь, чтобы сравнить с деформацией Такасаки-Такебе, надо представить $A^\hbar_{KW}$ в виде интеграла по фермионам (37). Вначале проделаем это на классическом уровне ($\hbar = 1$). Матрица $A_k$ должна иметь вид

$$A_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A_{m,-m+3k-1} : \psi_m \psi^*_{m-3k} : \tag{101}$$

С другой стороны, если она представима через интеграл по фермионам, то

$$A_k = \oint \frac{dz}{2\pi i} : \left[\hat{A}_k\left(z, \frac{d}{dz}\right)\psi(z)\right] \cdot \psi^*(z) : = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} : \psi_m \psi^*_n : \left(\frac{1}{2\pi i}\oint dz z^{-n-1} \hat{A}_k\left(z, \frac{d}{dz}\right) z^m\right) \tag{102}$$

Сравнивая формулы (101) и (102), получаем уравнение на оператор $\hat{A}_k(z, d/dz)$:

$$\hat{A}_k\left(z, \frac{d}{dz}\right) z^m = A_{m,-m+3k-1} z^{m-3k} \tag{103}$$

При $k = 1$, получаем, что существует несколько способов выбора оператора $A_1$:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{z^3}\right) z^m = z^{m-3}, \\
\left(\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\right) z^m = m z^{m-3}, \\
\left(\frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}\right) z^m = m(m-1) z^{m-3}, \\
\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) z^m = m(m-1)(m-2) z^{m-3}
\end{gathered} \tag{104}$$

Результат Такасаки-Такебе позволяет выбрать один из этих вариантов. А именно, мы знаем, что деформированный оператор должен иметь вид (37):

$$\hbar^k A_k = \frac{1}{\hbar} \oint \frac{dz}{2\pi i} \colon \left[ \hat{A}_k \left( z, \hbar \frac{d}{dz} \right) \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) \colon \tag{105}$$

это значит в формуле (104) выбираем третий вариант:

$$\frac{1}{\hbar} \left( \frac{1}{z} \hbar^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) z^m = \hbar m(m-1) z^{m-3} \tag{106}$$

Наконец, для произвольного $k$, удалось найти общую формулу:

$$\boxed{\hat{A}_k \left( z, \frac{d}{dz} \right) = A_{m,-m+3k-1} \frac{1}{z^{5k-1}} \frac{(m+2k-1)!}{(m+3k)!} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} z^{3k}} \tag{107}$$

факториалы тут нужны, чтобы сократить коэффициент, возникающий при многократном дифференцировании. Можно проверить, что такой оператор во-первых удовлетворяет уравнению (103), и правильно деформируется согласно Такасаки-Такебе:

$$\frac{1}{\hbar} \hat{A}_k \left( z, \hbar \frac{d}{dz} \right) z^m = \frac{1}{\hbar} A_{m,-m+3k-1} \frac{1}{z^{5k-1}} \frac{(m+2k-1)!}{(m+3k)!} \hbar^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} z^{3k} = \hbar^k A_{m,-m+3k-1} z^{m-3k} \tag{108}$$

Наконец, запишем полную деформированную матрицу:

$$\boxed{A^{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \oint \frac{dz}{2\pi i} \colon \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k \left( z, \hbar \frac{d}{dz} \right) \right) \psi(z) \right] \cdot \psi^*(z) \colon} \tag{109}$$

Таким образом, для модели Концевича-Виттена мы переписали матрицу в фермионном представлении в виде интеграла по фермионам. Сделать это можно несколькими способами, а деформация Такасаки-Такебе позволяет выбрать один из этих способов.

# 6 Обобщение деформации

Как мы увидели на примерах, числа Гурвица и эрмитова матричная модель деформируются похожим образом, потому что они лежат в одном семействе гипергеометрических $\tau$-функций, хоть и отличаются набором параметров из этого семейства. Обобщим деформацию Казаряна-Ландо на произвольную гипергеометрическую $\tau$-функцию:

$$\boxed{\begin{aligned} r(n) &\to r(\hbar n) \\ \beta_n &\to \frac{\beta_n}{\hbar} \\ t_n &\to \frac{t_n}{\hbar} \end{aligned}} \tag{110}$$

Полученные деформации (66) для чисел Гурвица и (81) для эрмитовой матричной модели являются частными случаями деформации (110). С точки зрения фермионной деформации Такасаки-Такебе (37), такая деформация означает следующее:

- $r(n) \to r(\hbar n)$ соответствует деформации производной $\frac{d}{dz} \to \hbar \frac{d}{dz}$,
- $\beta_n \to \frac{\beta_n}{\hbar}$ соответствует множителю $\frac{1}{\hbar}$ перед интегралом по фермионам,
- $t_n \to \frac{t_n}{\hbar}$ соответствует замене $H(\mathbf{t}) \to \frac{H(\mathbf{t})}{\hbar}$.

Пользуясь утверждением 1, делаем вывод, что так деформированные $\tau$-функции будут иметь "хорошее" квазиклассическое поведение, т. е. функция $F^{\hbar}(\mathbf{t}) = \hbar^2 \log(\tau^{\hbar}(\mathbf{t}))$ будут иметь только неотрицательные степени $\hbar$. Как упоминалось в разделе 4.3.2, если параметры $\beta = \{1, 0, 0, \dots\}$, то такая деформация приведет к разложению только по четным степеням $\hbar$. В случае произвольного набора $\beta$ и такой деформации неизвестно, останутся нечетные степени $\hbar$ или нет.

В качестве иллюстрации такого подхода рассмотрим пример деформации так называемой тривиальной $\tau$-фукнции

$$\tau(\mathbf{t};\beta) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\beta) s_{\lambda}(t) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} n\beta_n t_n\right) \tag{111}$$

которая является гипергеометрической $\tau$-функцией с $r(n) \equiv 1$ и произвольным набором параметров $\beta$. В последнем равенстве было использовано соотношение Коши-Литтлвуда (4). Если теперь применить деформацию (110) к этой функции, мы получим

$$\tau^{\hbar}(\mathbf{t};\beta) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}\left(\frac{\beta}{\hbar}\right) s_{\lambda}\left(\frac{t}{\hbar}\right) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\beta_n t_n}{\hbar^2}\right) \tag{112}$$

"Свободная энергия"$F$ имеет "хорошее"квазиклассическое поведение (вся функция лежит в роде 0):

$$F^{\hbar}(\mathbf{t};\beta) = \hbar^2 \log(\tau^{\hbar}(\mathbf{t},\beta)) = \hbar^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\beta_n t_n}{\hbar^2} \equiv F^{g=0}(\mathbf{t},\beta) \tag{113}$$

Как известно, некоторые $\tau$-функции, для которых существует разложение по родам, могут быть восстановлены из рода 0 при помощи топологической рекурсии [17]. Одним из таких примеров является производящая функция чисел Гурвица. Такасаки и Такебе, взяв за основу свою деформацию иерархии, предложили способ восстановления старших порядков по $\hbar$ из младших [18]. Однако, вычислительная сложность этого метода оказалась большой, кроме того, восстанавливаются вначале операторы, из которых затем можно получить функцию $F = \log(\tau)$. Мы надеемся, что явный вид функции $F^{\hbar}(x, \mathbf{t})$ (формула (48)) даст способ восстановления полного решения из рода 0, но пока это не удалось сделать.

# 7 Заключение

Подводя итоги, приведем основные полученные результаты:

- Были рассмотрены три различных подхода к деформации иерархии КП. Мы показали, что деформация Казаряна-Ландо является частным случаем деформации Такасаки-Такебе и обобщили деформацию на произвольные гипергеометрические $\tau$-функции в бозонном представлении.

- Все исследованные примеры деформированных $\tau$-функций являются решениями $\hbar$-КП Натанзона-Забродина, то есть для всех примеров три различные деформации совпадают.

- В каждом рассмотреном случае деформации имеют геометрический смысл: для чисел Гурвица – разложение по родам накрывающих поверхностей, для эрмитовой матричной модели – разложение по родам поверхностей, на которых лежат графы, соответствующие корреляторам, для модели Концевича-Виттена – разложение по родам для пространств модулей комплексных кривых.

- Для модели Концевича-Виттена матрица в фермионном представлении была переписана в виде интеграла по фермионам.

Дальнейшее изучение этой темы приводит нас к следующим вопросам:

- Получить связь теории $\hbar$-КП с классической теорией КП, а именно: переписать соотношения (45) и (49) через известные формулы, такие как, например, соотношения Плюккера или тождества Уорда в эрмитовой матричной модели.

- Получить способ восстановления полного решения из бездисперсионного предела при помощи соотношений (49) и исследовать его связь с другим способом восстановления решения – топологической рекурсией.

# Список литературы


[1] Maxim Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix airy function. *Communications in Mathematical Physics*, 147(1):1–23, 1992.

[2] Andrei Okounkov. Toda equations for hurwitz numbers. *Mathematical Research Letters*, 7(4):447–453, 2000.

[3] KANEHISA TAKASAKI and TAKASHI TAKEBE. Integrable hierarchies and dispersionless limit. *Reviews in Mathematical Physics*, 07(05):743–808, Jul 1995.

[4] S M Natanzon and A V Zabrodin. Formal solutions to the kp hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(14):145206, Feb 2016.

[5] Максим Эдуардович Казарян and Сергей Константинович Ландо. Комбинаторные решения интегрируемых иерархий. *Успехи математических наук*, 70(3 (423):77–106, 2015.

[6] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.

[7] Victor G Kac, Ashok K Raina, and Natasha Rozhkovskaya. *Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*, volume 29. World scientific, 2013.

[8] Tetsuji Miwa, Masaki Jinbo, Michio Jimbo, and E Date. *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, volume 135. Cambridge University Press, 2000.

[9] S. KHARCHEV, A. MARSHAKOV, A. MIRONOV, and A. MOROZOV. Generalized kazakov-migdal-kontsevich model: Group theory aspects. *International Journal of Modern Physics A*, 10(14):2015–2051, Jun 1995.

[10] Александр Юрьевич Орлов and Дмитрий Михайлович Щербин. Гипергеометрические решения солитонных уравнений. *Теоретическая и математическая физика*, 128(1):84–108, 2001.

[11] Mathieu Guay-Paquet and J. Harnad. Generating functions for weighted hurwitz numbers. *Journal of Mathematical Physics*, 58(8):083503, Aug 2017.

[12] A. Mironov and A. Morozov. On the complete perturbative solution of one-matrix models. *Physics Letters B*, 771:503–507, Aug 2017.

[13] A Alexandrov, A Mironov, and A Morozov. Bgwm as second constituent of complex matrix model. *Journal of High Energy Physics*, 2009(12):053–053, Dec 2009.

[14] E Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space 1991 surveys diff. *Geom*, 1:243.

[15] Alexander Alexandrov. From hurwitz numbers to kontsevich–witten tau-function: A connection by virasoro operators. *Letters in Mathematical Physics*, 104(1):75–87, Aug 2013.

[16] Jian Zhou. Explicit formula for witten-kontsevich tau-function, 2013.

[17] B. Eynard. A short overview of the "topological recursion 2014.

[18] Kanehisa Takasaki and Takashi Takebe. hbar-expansion of kp hierarchy: Recursive construction of solutions, 2009.