

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)

Направленность (профиль) подготовки: Проблемы теоретической физики

Фазовый переход синхронизации в модели Курамото на графах

(магистерская диссертация)

Студент:

Александров Артем Александрович

Научный руководитель:

Горский Александр Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук, проф.

Рецензент:

Нечаев Сергей Константинович,
д-р физ.-мат. наук

Москва 2021

Содержание

1	Синопис	3
1.1	Феномен синхронизации	3
1.2	Модель Курамото	4
1.3	Пространство для исследований	5
2	Модель Курамото на разных типах графов	6
2.1	Полный граф	6
2.1.1	Размерная редукция в случае полного графа	6
2.1.2	Анзац Ватанабе-Строгаца	8
2.1.3	Предел большого числа вершин	10
2.1.4	Связь с AdS_2	11
2.2	Разрывная синхронизация в модели Курамото	13
2.2.1	Критические константы связи для графа типа звезда	13
2.2.2	Фазовый переход первого рода и гистерезис на звезде	15
2.3	Графы с более сложной топологией	15
2.3.1	Граф типа длинная звезда	18
2.3.2	Фаза с \mathbb{Z}_{p+1} симметрией	20
2.3.3	Циклический граф	20
3	Заключение и обсуждение	22
3.1	Обсуждение	23
3.1.1	Параметр порядка модели	23
3.1.2	Связь сложной топологии графа с образованием кластеров	23
3.1.3	Модель Курамото в разных системах	24
3.2	Заключение	26
A	Приложение	27
A.1	Фазовый переход на полном графе в пределе $N \rightarrow \infty$	27
A.2	Фазовый переход на графе со сложной топологией в пределе $N \rightarrow \infty$	28
A.3	Формальное разложение параметра порядка по β_i	28
A.4	Явный вид фиксированных точек для графа звезда	29
A.5	Параметр порядка для длинной звезды в пределе $p \gg 1$	29

1 Синописис

1.1 Феномен синхронизации

Феномен синхронизации встречается во множестве разных систем. Проще всего интерпретировать это явление как фазовый переход в системе, состоящей из множества взаимодействующих степеней свободы. При определенной константе взаимодействия степени свободы системы начинают вести себя как единое целое и могут описаны в терминах некоторых коллективных переменных — происходит синхронизация. Это, по нашему мнению, наиболее простое и общее определение данного феномена.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть систему двух осцилляторов, взаимодействующих линейно

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = -\lambda_1^2 (\theta_1 - \theta_2), \quad \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -\lambda_2^2 (\theta_2 - \theta_1). \quad (1.1)$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то решения системы имеют вид

$$\theta_{1,2} = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \pm C_2 \cos\left(\sqrt{\omega^2 + 2\lambda^2} t + \varphi_2\right), \quad (1.2)$$

где $C_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ есть константы, которые определяются из начальных условий. Видно, что решение представляет собой суперпозицию колебаний и в спектре появляется новая мода с частотой $\sqrt{\omega^2 + 2\lambda^2}$. Если система устроена так, что $\lambda_1 \gg \lambda_2$, то эффективно это выглядит так, словно первый осциллятор колеблется под действием внешней силы и в итоге осциллятор будет колебаться с частотой внешней силы. Этот пример не кажется емким.

Более адекватным примером является следующий. Рассмотрим систему двух взаимодействующих осцилляторов,

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{\lambda}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{\lambda}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2). \quad (1.3)$$

Введем переменные $\rho(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$, $\Delta\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$,

$$\dot{\rho} = \omega_1 + \omega_2; \quad \Delta\dot{\theta} = \Delta\omega - \lambda \sin \Delta\theta. \quad (1.4)$$

В зависимости от отношения $\Delta\omega$ и λ существуют разные типы решений. Решение второго уравнения системы (1.4) имеет вид

$$\Delta\theta(t) = 2 \arctan \left[\frac{\lambda - \sqrt{(\Delta\omega)^2 - \lambda^2}}{\Delta\omega} \left(\frac{1}{2} \left(2 \arctan \left(\frac{\lambda}{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - \lambda^2}} \right) - t \sqrt{(\Delta\omega)^2 - \lambda^2} \right) \right) \right].$$

Можно показать, что при $\Delta\omega < \lambda$ решения $\Delta\theta(t) \rightarrow C_0$ при $t \rightarrow \infty$, где C_0 — некоторая константа. Если же $\Delta\omega > \lambda$, то решения имеют другое поведение при $t \rightarrow \infty$. Точка $\lambda_c = \Delta\omega$ является точкой бифуркации. Средние по времени частоты $\bar{\omega}_{1,2}$ имеют вид

$$\bar{\omega}_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \pi \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\omega - \lambda \sin \varphi} \right]^{-1}. \quad (1.5)$$

Отсюда также видно, что точка $\lambda_c = \Delta\omega$ является критической. Уже в простейшем случае всего двух осцилляторов динамика системы достаточно сложна. Наконец, оказывается, что в случае двух осцилляторов область параметров $\Delta\omega$ и λ отвечающая синхронизации является языком Арнольда [1].

Очевидно, что реальные системы, где имеет место синхронизация, содержат гораздо больше степеней свободы и их динамика более богата. Такие системы могут быть описаны разными моделями, среди которых наиболее изученной является модель Курамото. Всю оставшуюся часть работы мы будем рассматривать именно эту модель. Подробные примеры систем, в которых наблюдается переход из несинхронизованного состояния в синхронизованное мы обсудим после того как изложим основные результаты работы и актуальное состояние исследований, связанных с моделью Курамото.

1.2 Модель Курамото

Для математически строго изучения феномена синхронизации был разработан ряд моделей [2, 3], среди которых модель Курамото [4] отличается простотой, но в тоже время позволяет рассматривать множество эффектов, связанных с синхронизацией. В стандартном подходе, степенями свободы являются одномерные осцилляторы $\theta_i(t)$ с собственными частотами ω_i , а взаимодействие между ними имеет вид $\Gamma_{ij} = \lambda \sum_i \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t))/N$, где $\lambda > 0$ есть константа связи. Уравнение движения i -осциллятора имеет вид

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)). \quad (1.6)$$

Вопрос о синхронизации в модели (1.6) можно сформулировать так: при каких значениях параметра λ решения $\theta_i = \theta_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$ совпадают? Более строго, определим ”динамический” параметр порядка как

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i(t)}, \quad (1.7)$$

а затем усредним его модуль

$$R = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt |r(t)| \quad (1.8)$$

Очевидно, что вид решения $\theta_i(t)$ зависит от величины константы связи. В свою очередь, параметр порядка R не зависит от времени и $R \in [0,1)$. Возникновение синхронизованной фазы эквивалентно тому, что $R \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ начиная с некоторого значения $\lambda = \lambda_c$. Подставив выражение (1.7) в уравнения движения (1.6), можно заметить что полученный результат очень похож на стандартный подход теории среднего поля:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \lambda r(t) \sin(\psi(t) - \theta_i(t)). \quad (1.9)$$

Рассмотрим случай $N \rightarrow \infty$, тогда можно считать, что осцилляторы распределены по частотам с некоторой $g(\omega)$. Без ограничения общности можно положить $\psi(t) \equiv 0$.

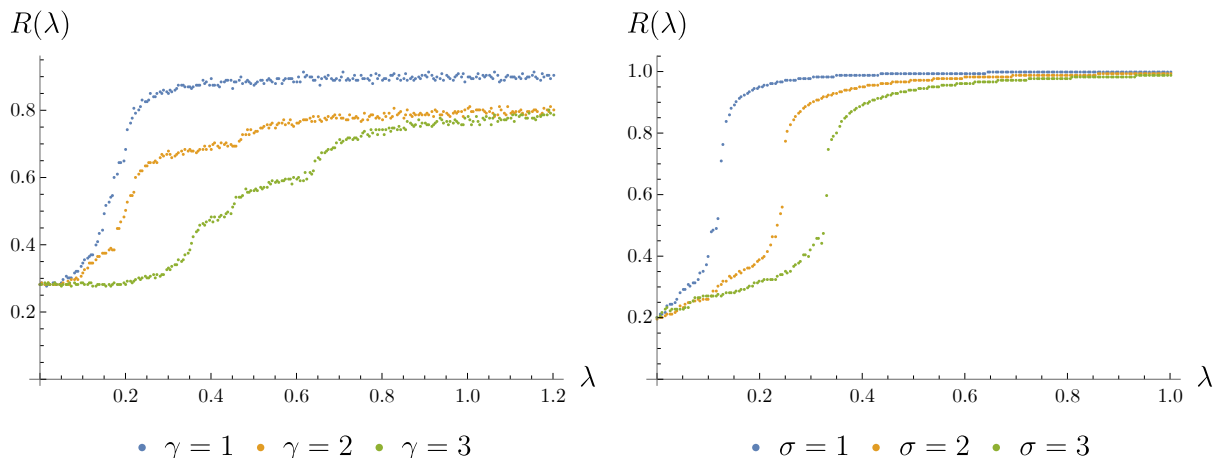


Рис. 1: Распределение Лоренца, $g(\omega) = \gamma/(\pi\omega^2 + \pi\gamma^2)$ Рис. 2: Распределение Гаусса, $g(\omega) = \exp(-\omega^2/(2\sigma)^2)/\sqrt{2\pi}$

Далее, если $\lambda > \lambda_c$, то начиная с некоторого момента времени можно считать $r(t) = \text{const}$. Это приводит к уравнению самосогласованности, анализ которого в свою очередь приводит к выражению для критической константы связи, $\lambda_c = 2/(\pi g(0))$ и позволяет найти критический индекс параметра порядка r , равный $1/2$. Вычисления можно найти в [Приложении](#). Рис. 1 и 2 иллюстрируют поведение усредненного параметра порядка $R = R(\lambda)$ для разных распределений частот $g(\omega)$, а рис. 3 показывает процесс синхронизации частот.

1.3 Пространство для исследований

Не смотря на годы интенсивных исследований, связанных с синхронизацией в модели Курамото, остается ряд открытых вопросов. Кратко их можно суммировать так: 1) анализ в случае конечного N , 2) исследование стабильности в разных фазах, 3) рассмотрение модели, когда степени свободы заданы на графе с более сложной топологией.

Как это обычно происходит, исследования по каждому из описанных вопросов привели к более глубокому пониманию модели и явлений в ней. Опираясь на результаты исследований, наиболее актуальным вопросом по нашему мнению является последний. Именно этому вопросу и посвящена данная работа. Оставшаяся часть работы организована следующим образом. Раздел ["Модель Курамото на разных типах графов"](#) является основным, в нем последовательно изложены применяемые для анализа модели методы и полученные результаты. В этом разделе рассмотрена модель Курамото на разных графах. Ключевой результат этого раздела – это точные выражения для критических констант связи и возникновение \mathbb{Z}_{p+1} (где p длина лучей) на графе звезда с длинными лучами. Также обсуждается стабильность синхронизованного состояния. Наконец, в разделе ["Заключение и обсуждение"](#) мы обсуждаем полученные результаты и показываем примеры систем, где возникает модель Курамото.

2 Модель Курамото на разных типах графов

Начиная с этого момента мы будем рассматривать модель Курамото на графе с матрицей смежности A_{ij} , уравнения движения которой имеют вид

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.1)$$

где λ есть константа связи, а собственные частоты осцилляторов ω_i мы будем считать равными валентностям вершин графа, $\omega_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}$. Такой выбор собственных частот мы поясним далее. Динамическим параметром порядка является (1.7), а "термодинамическим" – его среднее (1.8). Нетривиальная топология графа приводит к сложной матрице смежности A_{ij} , что в свою очередь "замешивает" взаимодействующие степени свободы. Как результат, получается система уравнений, решение которой на данный момент не найдено аналитически. Тем не менее, мы уделим внимание общему случаю. Оказывается, что для некоторых графов можно продвинуться в решении и получить понимание о динамике в такой модели.

Чтобы перейти к случаю графа с произвольной топологией, следует начать с простых примеров и понять как описывается процесс синхронизации на графах с простой матрицей смежности. Далее мы последовательно рассмотрим несколько примеров, от самого простого (полный граф) до более сложных (звезда с лучами, циклический граф). Там, где это возможно будут приведены аналитические результаты, если же аналитический результат получить не удастся, то производится численный расчет.

2.1 Полный граф

В этом разделе мы описываем динамику синхронизации на полном графе, у которого все собственные частоты осцилляторов одинаковы. Оказывается, что такая система является почти интегрируемой и можно установить происхождение и вид интегралов движения [5]. В случае большого числа вершин система упрощается еще сильнее и можно получить аналитический результат.

2.1.1 Размерная редукция в случае полного графа

Начнем со случая полного графа. Как уже было показано ранее, уравнения движения имеют вид (1.6). Перейдя от тригонометрических функций к экспонентам, получим

$$\dot{\theta}_i = \omega + f e^{i\theta_i} + \bar{f} e^{-i\theta_i}, \quad (2.2)$$

где $f = \lambda \sum_j e^{-i\theta_j} / (2iN)$ и ω есть валентность вершины полного графа. Далее, выполним переход к комплексной переменной $z_i = e^{i\theta_i}$, что дает

$$\dot{z}_i = iz_i\omega + \frac{\lambda}{2N} \sum_{j=1}^N (z_j - \bar{z}_j z_i^2). \quad (2.3)$$

В ходе эволюции по времени очевидно выполняется $|z_i(t)| \equiv 1$, т.е. динамика нашей модели сводится к отображению $\mathcal{M} : S^1 \rightarrow S^1$, где $\mathcal{M} = \mathcal{M}(t)$. Как известно, такие

отображения входят в группу дробно-линейных преобразований $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, где $F(z) = (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc \neq 0$. Наши отображения \mathcal{M} являются подгруппой этих преобразований, которые отображают единичный диск $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на единичный диск, что приводит к тому, что граница диска $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ отображается также в единичную окружность. Все такие автоморфизмы можно задать тремя параметрами и представить отображение \mathcal{M} в виде

$$\mathcal{M}(z) = \frac{e^{i\alpha}z + w}{1 + \bar{w}e^{i\alpha}z}, \quad w \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Эти отображения являются гомеоморфизмами окружности S^1 на себя с сохранением ориентации, т.е. говоря простым языком преобразованиями Мёбиуса. Выходит, задав начальное распределение фаз осцилляторов, β_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, $\beta_i \in [0, 2\pi)$, описывать их движение можно действуя преобразованием Мёбиуса \mathcal{M}_t (индекс t подчеркивает зависимость параметров от времени) на фазы β_i . Подставляя (2.4) в (2.3) и сравнивая левую и правую части уравнений, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= i\omega w(t) + \frac{\lambda}{2}r(t) - \frac{\lambda}{2}w(t)^2\bar{r}(t), \\ \dot{\alpha}(t) &= \omega + \frac{\lambda}{2i}\bar{w}(t)r(t) - \frac{\lambda}{2i}w(t)\bar{r}(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где параметр порядка $r(t)$ выражен через преобразование (2.4),

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathcal{M}(\beta_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{e^{i\alpha}\beta_j + w}{1 + \bar{w}e^{i\alpha}\beta_j}. \quad (2.6)$$

Таким образом, система (2.5) содержит всего три степени свободы: $\text{Re } w$, $\text{Im } w$ и α . Знание о том, что динамика системы сводится к гомеоморфизму окружности под действием преобразования \mathcal{M}_t , которое задается тремя параметрами, зависящими от времени. Это означает, что исходная модель (2.3) имеет $N - 3$ интегралов движения. Чтобы установить эти интегралы движения, сначала стоит исследовать редукцию степеней свободы с точки зрения теории групп и геометрии.

Как уже было отмечено, преобразования \mathcal{M} образуют группу G с трехпараметрическим представлением (2.4). Чтобы найти генераторы этой группы, надо рассмотреть три однопараметрических преобразования, которые получаются путем приравнивая к нулю двух из трех параметров α , $\text{Im } w$ и $\text{Re } w$. Эти однопараметрические преобразования имеют вид

$$\mathcal{M}_1(z) = e^{is}z, \quad \mathcal{M}_2(z) = \frac{z + s}{1 + sz}, \quad \mathcal{M}_3(z) = \frac{z + is}{1 - isz}, \quad (2.7)$$

где для компактности обозначено $z \equiv (z_1, z_2, z_3, \dots, z_N)$. Генераторы группы определяются как $g_i = -id\mathcal{M}_i(z)/ds|_{s=0}$. Выполнив дифференцирование, находим

$$g_1 = iz, \quad g_2 = z^2 - 1, \quad g_3 = iz^2 + i. \quad (2.8)$$

Теперь надо вспомнить о теореме, связывающей генераторы группы Ли с потоком на группе Ли: пусть L – группа Ли, действующая на многообразии с линейно независимыми инфинитезимальными генераторами v_i , $i \in \{1, \dots, N\}$. Пусть v – это векторное поле, представляющее собой линейную комбинацию $C_i v_i$, где коэффициенты

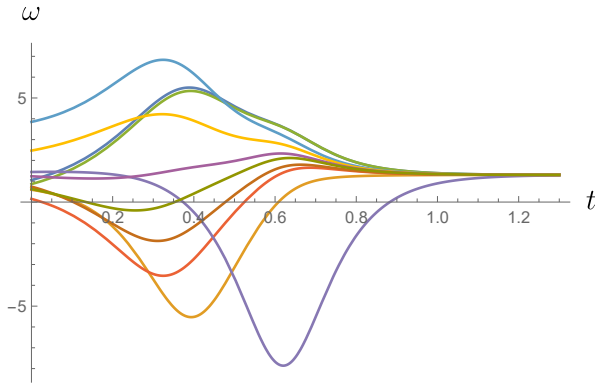


Рис. 3: Синхронизация собственных частот на полном графе

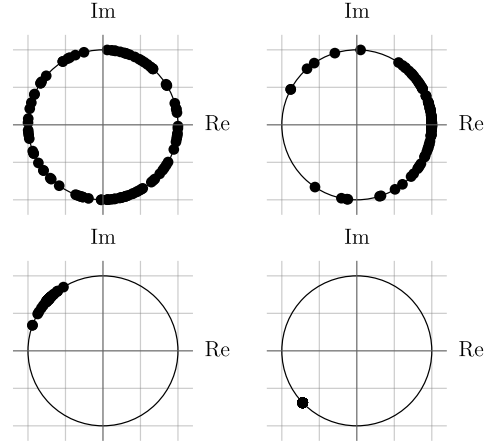


Рис. 4: Процесс синхронизации на полном графе на S^1

$C_i = C_i(t)$, т.е. являются только функциями времени. Тогда траектории уравнения $\dot{z} = v$ с начальными условиями β можно представить как $\{\mathcal{M}_t(\beta)\}$, где $\{\mathcal{M}_t\} \in L$, параметризованные t . Мы имеем тоже самое: группа Мёбиуса есть комплексная группа Ли, поэтому решения уравнения (2.3) можно записать в виде $z(t) = \mathcal{M}_t(\beta)$, где $\{\mathcal{M}_t\}$ – однопараметрическое семейство преобразований Мёбиуса. Если представить функцию f из (2.2) в виде $f = h_2 - ih_1$, где $h_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\dot{z} = izg + (z^2 - 1)h_1 + (iz^2 + i)h_2, \quad (2.9)$$

то мы убедимся в том, что правая часть (2.3) представляет собой линейную комбинацию генераторов с коэффициентами, зависящими *только* от времени. В терминах исходных переменных, необходимо найти генераторы вида

$$u_k = -id \ln \mathcal{M}_k(e^{i\theta}) / ds|_{s=0}. \quad (2.10)$$

Эти генераторы равны

$$u_1 = (\underbrace{1 \dots 1}_N), \quad u_2 = 2 \sin \theta, \quad u_3 = 2 \cos \theta, \quad (2.11)$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$. Это приводит к уравнению

$$\dot{\theta} = g + 2h_1 \sin \theta + 2h_2 \cos \theta, \quad (2.12)$$

что в точности является (2.2). Это означает, что решения $\theta_i(t)$ имеют вид $\theta_i(t) = -i \ln \mathcal{M}_t(\beta_i)$, где $\mathcal{M}_t \in G$. Итак, динамика модели Курамото на полном графе описывается потоком на группе Мёбиуса. Именно этот факт позволяет сделать размерную редукцию. На рис. 4 демонстрируется процесс синхронизации на полном графе, на 5 изображен параметр порядка для разных констант связи.

2.1.2 Анзац Ватанабе-Строгаца

В работе [6] авторы смогли описать модель Курамото на графе в терминах глобальных переменных, имеющих простую физическую интерпретацию. Покажем как

параметры преобразования Мёбиуса связаны с этими переменными. Выше было показано как размерная редукция связана с потоком на группе Мёбиуса, однако по-прежнему не были продемонстрированы интегралы движения системы. Эти интегралы движения были найдены в [6] методом "проб и ошибок". Они имеют вид

$$I = S_{12}S_{23}\dots S_{(N-1)N}S_{N1}, \quad S_{ij} = \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2}, \quad (2.13)$$

где все $N - 3$ интеграла могут быть получены перестановками индексов. Описание в терминах потока на группе Мёбиуса приводит к таким интегралам естественным образом. Действительно, преобразование Мёбиуса сохраняет кросс-отношение, которое определяется как

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \quad (2.14)$$

Для N точек существует всего $N!/(N - 4)!$ кросс-отношений, но всего $N - 3$ из них независимы. В терминах фаз, кросс-отношение принимает вид

$$(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, e^{i\theta_4}) = \frac{S_{13}S_{24}}{S_{14}S_{23}} \quad (2.15)$$

Пусть кросс-отношение равно λ . Рассмотрим два интеграла $I = S_{ik}S_{kl}S_{lj}\Pi$ и $I' = S_{il}S_{lk}S_{kj}\Pi$, где Π есть оставшееся произведение множителей (считаем его одинаковым для обоих интегралов). Тогда $I/I' = -\lambda$. В силу произвольности индексов, таким образом можно получить все $N - 3$ кросс-отношений [5].

Ватанабе и Строгац установили следующие соотношение между микроскопическими степенями свободы $\theta_i(t)$ и макроскопическими (глобальными) переменными,

$$\tan \frac{\theta_i - \Phi}{2} = \rho \tan \frac{\beta_i - \Psi}{2}, \quad (2.16)$$

где β_i есть начальные условия, а ρ , Φ и Ψ есть глобальные переменные. Это соотношение можно переписать иначе,

$$e^{i\theta_i} = e^{i\Phi} \frac{\rho + e^{i(\beta_i - \Psi)}}{\rho e^{i(\beta_i - \Psi)} + 1}. \quad (2.17)$$

Используя тригонометрические тождества, находим

$$\tan \frac{\theta_i - \Phi}{2} = i \frac{1 - e^{i(\theta_i - \Phi)}}{1 + e^{i(\theta_i - \Phi)}}. \quad (2.18)$$

Обозначив $w = re^{i\Phi}$, запишем преобразование Мёбиуса в виде,

$$e^{i(\theta_i - \Phi)} = \frac{r + e^{i(\beta_i - \Psi)}}{1 + re^{i(\beta_i - \Psi)}}, \quad \Psi = \Phi - \alpha \quad (2.19)$$

откуда в итоге получаем соотношение

$$\tan \frac{\theta_i - \Phi}{2} = i \frac{1 - r}{1 + r} \left(\frac{1 - e^{i(\beta_i - \Psi)}}{1 + e^{i(\beta_i - \Psi)}} \right) = \frac{1 - r}{1 + r} \tan \frac{\beta_i - \Psi}{2}, \quad (2.20)$$

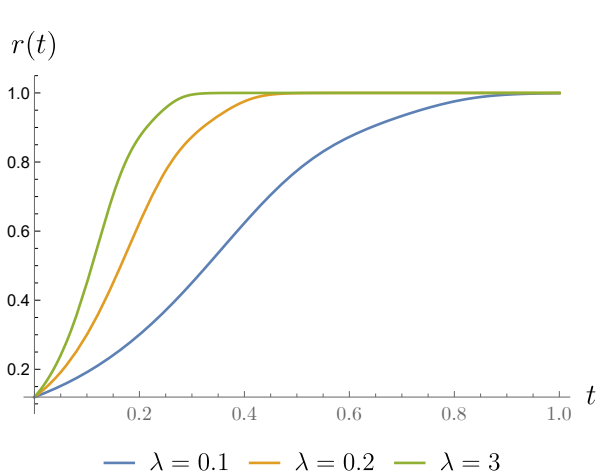


Рис. 5: Параметр порядка $r(t)$ на полном графе с $N = 100$ вершинами для разных констант связи

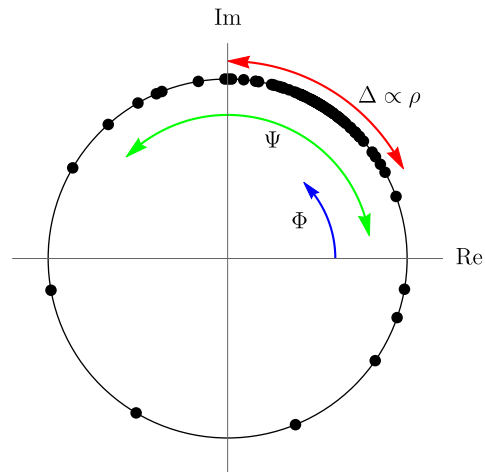


Рис. 6: Связь глобальных переменных анзаца Ватанабе-Строгаца с динамикой распределения осцилляторов $\theta_i(t)$ на полном графе

которое связывает анзац Ватанабе-Строгаца и преобразование Мёбиуса. Глобальные параметры ρ , Ψ , Φ имеют простой физический смысл, подробно рассмотренный в [7]. Параметр ρ пропорционален ширине распределения Δ осцилляторов на окружности, $\rho \propto \Delta$, переменная Φ описывает положение локального максимума распределения. Переменная Ψ описывает движение осцилляторов по отношению к максимуму (здесь имеется в виду максимум плотности осцилляторов на окружности). На рис. 6 проиллюстрирована описанная выше связь глобальных переменных ρ , Φ и Ψ с распределением осцилляторов на окружности. Изучив происхождение интегралов движения в модели Курамото, рассмотрим предел большого числа вершин.

2.1.3 Предел большого числа вершин

Продемонстрировав происхождение размерной редукции, полезно вернуться к системе (2.5) и исследовать ее в пределе $N \rightarrow \infty$. Помимо этого, будем считать, что β_i распределены равномерно. С учетом этих двух фактов, для параметра порядка $r(t)$ можно написать следующее разложение

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (e^{i\alpha} \beta_j + w) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (\bar{w} \beta_j)^l e^{ial}. \quad (2.21)$$

Меняя порядок суммирования и учитывая равномерность распределения начальных условий, получаем $r(t) = w(t)$. Тогда система (2.5) принимает простой вид,

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= i\omega w(t) + \frac{\lambda}{2} w(t) - \frac{\lambda}{2} w(t) |w(t)|^2, \\ \dot{\alpha}(t) &= \omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Второе уравнение системы тривиально, первое же вызывает интерес. Представим $w(t) = v(t)e^{i\gamma}$, тогда

$$\dot{v} = \frac{\lambda}{2} v(1 - v^2), \quad \dot{\gamma} = \omega. \quad (2.23)$$

Для функции $v = v(t)$ имеем решение

$$v(t) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \lambda t}. \quad (2.24)$$

Это решение выписано с точностью до константы v_0 , которая соответствует $v(0) = v_0$. Видно, что уравнение (2.24) описывает движение в потенциале $U(v) = v^2(1 - v^2)^2$. На рис 7 показаны решения для разных значений λ и вид потенциала $U(v)$.

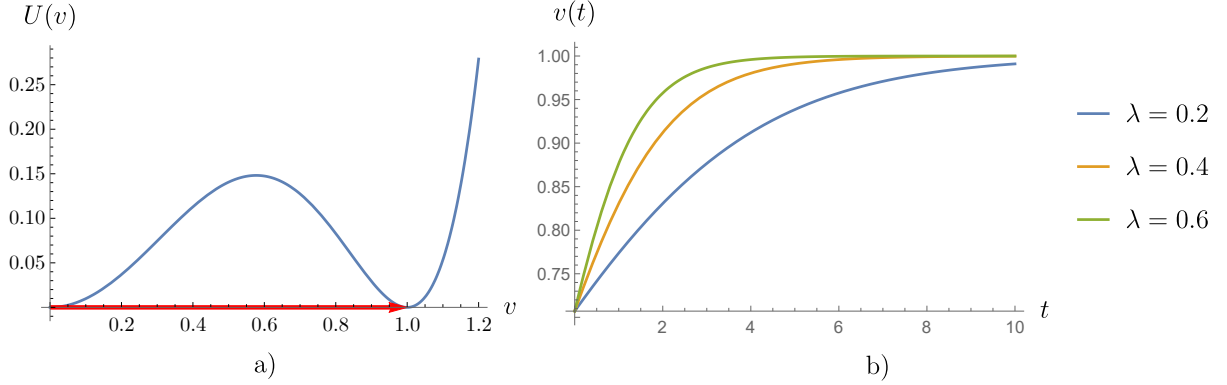


Рис. 7: а) Потенциал $U(v)$, решение уравнения – это кинк в этом потенциале, б) решения $v = v(t)$ для разных λ

Обсудив предел большого числа вершин, покажем, что динамика модели на полном графе связана с динамикой геодезических на диске Пуанкаре.

2.1.4 Связь с AdS_2

Как было продемонстрировано ранее, динамика нашей модели описывается в терминах группы Мёбиуса. Группа Мёбиуса изоморфна $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \simeq \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\}$. Это крайне напоминает группу изометрии пространства AdS . Оказывается, что динамика модели напрямую связана с гиперболическим пространством [8]. Чтобы увидеть это, нужно слегка изменить введенные ранее обозначения. Ранее преобразование Мёбиуса \mathcal{M} мы записывали как (2.4), в этой секции мы будем использовать следующее обозначение:

$$\mathcal{M}(z) = \zeta \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}, \quad |w| < 1, \quad |\zeta| = 1, \quad w, \zeta \in \mathbb{C}. \quad (2.25)$$

В таких обозначениях уравнения движения (2.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\frac{1}{2} (1 - |w(t)|^2) \bar{\zeta}(t) r(t), \\ \dot{\zeta} &= i\omega \zeta(t) - \frac{1}{2} (\bar{w}(t) r(t) - w(t) \bar{r}(t) \zeta(t)^2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где без ограничения общности мы принимаем $\lambda = 1$. Представим теперь преобразование $\mathcal{M}(z)$ в виде $\mathcal{M}(z) = \zeta \mathcal{M}_w(z)$, где $\mathcal{M}_w(z) = \mathcal{M}(z)|_{\zeta=1}$. Теперь остается заметить, что $r(t) = r(\mathcal{M}(\beta_i)) = \zeta r(\mathcal{M}_w(\beta_i))$. Этот факт позволяет рассматривать уравнения

(2.26) отдельно. Параметр ζ попросту описывает вращение, поэтому лишь первое уравнение представляет реальный интерес. С учетом изложенных фактов, имеем

$$\dot{w} = -\frac{1}{2} (1 - |w(t)|^2) r(\mathcal{M}_w(\beta_i)). \quad (2.27)$$

Прямым вычислением можно убедиться, что правая часть уравнения представляет собой градиент некоторой функции H на гиперболическом диске (градиента на гиперболическом диске с точностью до множителя совпадает с градиентом в евклидовой метрике). Эта функция может быть найдена из уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{w}} = -\frac{r(\mathcal{M}_w \beta_i)}{1 - |w|^2}. \quad (2.28)$$

Выполнив интегрирование, находим

$$H(w) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln \frac{1 - |w|^2}{1 - \operatorname{Re}(\bar{\beta}_j w) + |w|^2}. \quad (2.29)$$

Полученная в правой части уравнения структура представляет собой сумму логарифмов ядер Пуассона $P(w, \beta_i)$ на диске. Поясним физический смысл полученного результата. Рассмотрим точку $\beta \in S^1$. Для любой точки $w \in D$ найдется единственная геодезическая, соединяющая w с β . У такой геодезической есть единичный вектор $\eta_\beta(w)$, который показывает направление этой геодезической. Тогда поток геодезической дается выражением

$$\dot{w} = \eta_\beta(w) = \frac{1}{2} (1 - |w|^2) \mathcal{M}_w(\beta). \quad (2.30)$$

Это означает, что параметр порядка на полном графе представляет собой просто среднее от потока геодезических в направлении точек β_i , обращенных во времени. Такая конструкция является градиентом функции $H(w)$, описанной выше. В свою очередь, ядро Пуассона в (2.29) напрямую связано с функцией Буземана $B(w, \beta_i)$. Функция Буземана $B(w, \zeta)$ связана с геодезическими на гиперболическом диске следующим образом,

$$B(w, \zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} [L(z, w) - L(z, 0)], \quad (2.31)$$

где $\zeta \in S^1$ и $L(z, w)$ – это длина геодезической на гиперболическом диске. Выражение для длины имеет вид

$$L(w, z) = 2 \operatorname{arctanh} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| = \ln \frac{1 + u}{1 - u}, \quad u = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| \quad (2.32)$$

В итоге уравнение (2.27) можно переписать как

$$\dot{w} = -\nabla H = -\nabla \sum_{j=1}^N \ln P(w, \beta_j) = \nabla \sum_{j=1}^N B(w, \beta_j). \quad (2.33)$$

Фиксированная точка потока, обращенного во времени, является конформных барицентром точек $\beta_i \in S^1$. Её существование и единственность доказаны в [9].

2.2 Разрывная синхронизация в модели Курамото

Ранее мы показали, что имеет место фазовый переход второго рода по константе связи. Критическая экспонента и критическое значение константы связи могут быть найдены аналитически в пределе $N \rightarrow \infty$. В случае одинаковых собственных частот, $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} \rightarrow \omega_i \equiv \omega_j = \omega$ динамика синхронизации может быть описана в терминах движения по орбите группы Мёбиуса и также описана в терминах динамики геодезических на гиперболическом диске.

Рассмотрим теперь модель на графе с матрицей смежности A_{ij} . Введем локальный параметр порядка, определяя его аналогично (1.7),

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\theta_j(t)}. \quad (2.34)$$

Предполагая, что $r_i \propto d_i$, где d_i есть валентность i -ой вершины и повторяя рассуждения, аналогичные случаю полного графа, находим выражение для критической константы связи λ_c ,

$$\lambda_c = \frac{2}{\pi g(0)} \frac{\langle d \rangle}{\langle d^2 \rangle}, \quad (2.35)$$

где $\langle d \rangle$ и $\langle d^2 \rangle$ есть первый и второй момент распределения валентностей вершин. Это означает, что в случае сложного графа λ_c сильно зависит от топологии. Основываясь на этом факте, в работе [10] было показано, что в случае наличия корреляции между собственной частотой ω_i и валентностью d_i , т.е. $\omega_i = f(d_i)$, порядок фазового перехода может меняться. В простейшем случае можно считать $\omega_i \equiv d_i$, что и сделано всюду в данной работе, где обсуждается синхронизация на сложном графе. Когда фазовый переход меняет порядок со второго на первый, то говорят о *разрывной синхронизации*. Важно отметить, что аналитических результатов для графов с матрицей смежности чуть более сложной, чем полный граф очень мало.

2.2.1 Критические константы связи для графа типа звезда

Как было упомянуто выше, корреляция между собственными частотами осцилляторов и валентностью вершин графа приводит к явлению *разрывной синхронизации*, т.е. меняет род фазового перехода. Простейший граф, на котором происходит разрывная синхронизация – это граф типа звезда [11]. Уравнения движения на таком графе имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \beta\omega + \frac{\beta\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \varphi), \\ \dot{\theta}_j &= \omega + \lambda \sin(\varphi - \theta_j) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Определим параметр порядка как $r(t) = \sum_j e^{i\theta_j}/N$, где N – число лучей звезды. Вычитая из первого уравнения второе в (2.36) получим,

$$\dot{\psi}_i = -(\beta - 1)\omega - \frac{\lambda\beta}{N} \sum_{j=1}^N \sin \psi_j - \lambda \sin \psi_i, \quad \psi_i = \theta_i - \varphi, \quad (2.37)$$

где теперь перейдем к комплексной переменной $z_i = e^{i\theta - i\varphi}$,

$$\dot{z}_i = -i(\beta - 1)\omega z_i - i\lambda\beta z_i \operatorname{Im} r + \frac{\lambda}{2}(1 - z_i^2). \quad (2.38)$$

Используя преобразование Мёбиуса (2.4), примененное к разности фаз между хабом и листьями, $z_i = \mathcal{M}(\beta_i)$, где β_i – начальные условия, мы получим систему уравнений для параметров преобразования,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -i(\beta - 1)\omega w - iw\beta\lambda \operatorname{Im} r + \frac{\lambda}{2}(1 - w^2) \\ \dot{\alpha} &= -(\beta - 1)\omega - \beta\lambda \operatorname{Im} r - \lambda \operatorname{Im} w \end{aligned} \quad (2.39)$$

Чтобы продвинуться дальше в полученном уравнении (2.38) нужно перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, принимая во внимание однородное распределение начальных условий. В таком пределе $r \rightarrow w$ и система (2.39) упрощается. Система уравнений расщепляется и можно найти фиксированные точки уравнения на параметр w . В зависимости от значения константы связи λ , мы имеем разные фиксированные точки (см. Приложение). Критические значения константы связи равны

$$\lambda_c^f = \frac{\beta - 1}{\sqrt{2\beta + 1}}\omega; \quad \lambda_c^b = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}\omega. \quad (2.40)$$

Подведем промежуточный итог. Для графа типа звезда мы можем записать уравнения движения в виде

$$\dot{\psi}_i = g + fe^{i\psi_i} + \bar{f}e^{-i\psi_i}, \quad g = -i(\beta - 1)\omega - \frac{\lambda\beta}{N} \sum_{j=1}^N \sin \psi_j, \quad f = \frac{\lambda}{2i}, \quad (2.41)$$

т.е. по-прежнему функции f и g не зависят от индекса. Поэтому поток $\dot{\psi}_i$ все так же можно выразить через генераторы группы Мёбиуса. Однако даже в пределе $N \rightarrow \infty$ система уравнений (2.39) все еще сложна. Простого описания в терминах гиперболической геометрии не существует. Обсудим теперь стабильность фаз. Для общности добавим фазовый сдвиг α в уравнения движения. Тогда уравнение (2.37) примет вид

$$\dot{\psi}_i = -(\beta - 1)\omega - \lambda \sin(\psi_i - \alpha) - \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j + \alpha) \quad (2.42)$$

Наиболее интересная нам фиксированная точка – это $\dot{\psi}_i = 0$, при этом $\psi_i = \psi_j$, $\forall i, j$. Такая точка отвечает многообразию полной синхронизации (homogeneous fixed point, НФР). Когда система оказалась на синхронизованном многообразии, НФР удовлетворяет условию $\sin \psi_0 = \omega/(2\lambda \cos \alpha)$, откуда находим условие $\lambda \geq \omega/(2 \cos \alpha)$. Рассматривая малые возмущения $\delta\psi$ вблизи состояния ψ_0 , получим линеаризованное уравнение

$$\delta\dot{\psi}_i = J(\psi_0)\delta\psi_i, \quad (2.43)$$

где $J(\psi_0)$ есть матрица Якоби, вычисленная в НФР. Аккуратный анализ (см. приложения в [12]) показывает, что у этой матрицы есть два собственных значения, Λ_1 и Λ_2 . Первое, $\Lambda_1 = -\lambda \cos(\psi_0 - \alpha)$ является $(N - 1)$ -кратно вырожденным, а второе,

$\Lambda_2 = -2\lambda \cos \psi_0 \cos \alpha$, не вырождено. Далее, из факта, что J можно представить в диагональном виде следует, что элементы собственного вектора V_1 (отвечающего δ_1) удовлетворяют условию $\sum_j \delta\theta_j = 0$, а компоненты вектора V_2 (отвечающего δ_2) удовлетворяют $\delta\theta_i = \delta\theta_j$. Это означает, что V_2 описывает возмущение вдоль многообразия синхронизации, а V_1 описывает возмущение, поперечное к этому многообразию. В итоге, можно показать что при $\delta_{1,2} < 0$ НФР стабильна если $\lambda > (\beta - 1)\omega/(2 \cos^2 \alpha)$ для $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ и если $\lambda > (\beta - 1)\omega/(2 \cos \alpha)$ для $\alpha \in [0, \pi/2)$. Больше всего нас интересует $\alpha = 0$, т.е. $\lambda > (\beta - 1)\omega/2$. Этот результат в согласии с (2.40). Из подобного анализа для уравнения

$$\dot{w} = -i(\beta - 1)\omega w - i\omega\beta\lambda \operatorname{Im} w + \frac{\lambda}{2}(1 - w^2) \quad (2.44)$$

можно показать, что фиксированная точка w_1 , существующая при $\lambda > \lambda_c^b$ стабильна (тип точки фокус) и соответствует когерентному состоянию. Вопрос о стабильности завершает обсуждение модели Курамото на графе тип звезда.

2.2.2 Фазовый переход первого рода и гистерезис на звезде

Подкроем результаты, полученные выше численным счетом. Для этого используем следующий подход. Выберем случайные начальные условия $\beta_i \in [0, 2\pi)$, $i \in \{1, \dots, N\}$ для фиксированного значения λ . Получим численное решение системы нелинейных уравнений и вычислим $r(t)$, а затем его усредненное значение R . Затем увеличим константу связи, $\lambda + \delta\lambda$ и вновь выберем случайные начальные условия. Повторяя такую процедуру, мы исследуем фазовое пространство нашей системы и "зацепляемся" за аттрактор в пространстве константы связи.

В результате такого вычисления получается следующий график $R = R(\lambda)$, рис. 8. Облако точек в начале снова объясняется тем, что в силу ограниченности ресурсов мы используем короткий промежуток времени T для усреднения. Можно реализовать другую схему численного счета: один раз выбрать случайные начальные условия, решить уравнения движения для фиксированной константы связи λ . Затем использовать полученные решения в момент времени $t = T$ как начальные условия для модели с константой связи $\lambda + \delta\lambda$. Но такая схема не позволяет уловить гистерезис.

2.3 Графы с более сложной топологией

Теперь рассмотрим произвольный граф с матрицей смежности A_{ij} . Покажем чем случай такого графа отличается от полного и почему сложность такой задачи существенно выше, чем в обсужденных ранее случаях. Не составляет труда написать уравнения движения для произвольного графа,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i = \omega_i + f_i e^{i\theta_i} + \bar{f}_i e^{-i\theta_i}, \quad f_i = \frac{\lambda}{2i} \sum_j A_{ij} e^{-i\theta_j}, \quad (2.45)$$

т.е. ключевое отличие от полного графа – это зависимость собственных частот ω_i и функции f_i от индекса вершины. Этот факт мгновенно делает задачу сложнее. Если

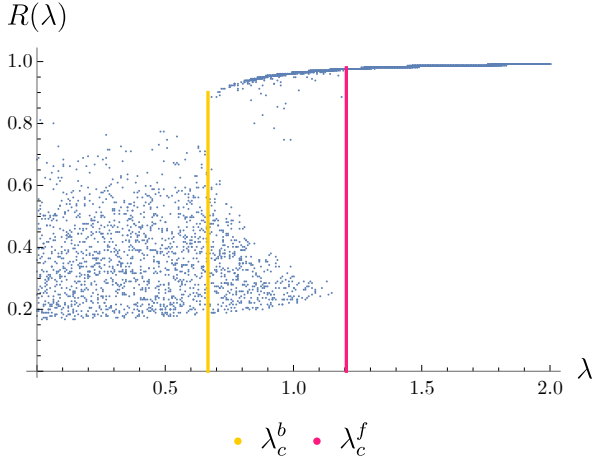


Рис. 8: Гистерезис на звезде с $n = 5$ лучами

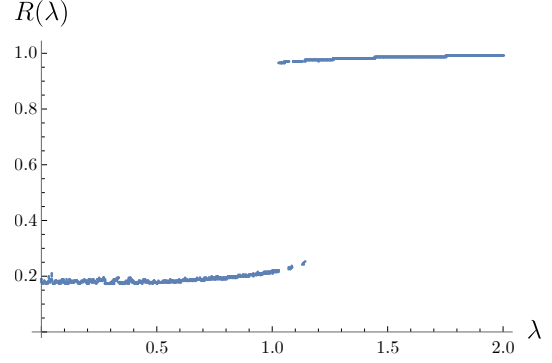


Рис. 9: Разрывная синхронизация на звезде с $n = 5$ лучами

по-прежнему допустить, что подход Ватанабе-Строгаца будет работать, то очевидно у нас будет несколько преобразований Мёбиуса. Формально их будет N штук. В этом можно убедиться проделав стандартные преобразования. Действительно, в комплексных переменных уравнения (2.45) имеют вид

$$\dot{z}_i = i\omega_i z_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} (z_j - \bar{z}_j z_i^2). \quad (2.46)$$

Из такой структуры становится ясно видно, что любая нетривиальная матрица смежности замешивает степени свободы так, что использование преобразования Мёбиуса не приводит к понижению размерности даже в случае $N \rightarrow \infty$.

Можно ли рассмотреть некоторый простой пример, в котором применение преобразования Мёбиуса дает желаемый результат? Да, можно: такая модель была рассмотрена в работе [13]. Авторы рассматривают популяции осцилляторов, стартуя с уравнений движения,

$$\dot{\phi}_k^a = \omega_a + \frac{1}{N} \sum_{b=1}^M V_{ab} \sin(\phi_j^b - \phi_k^a - \alpha_{ab}), \quad (2.47)$$

где a, b – популяции осцилляторов (всего M штук), $k \in \{1, \dots, N_a\}$ – число осцилляторов в каждой, ω_a являются собственными частотами, V_{ab} и α_{ab} представляют собой константу связи между популяциями и фазовый сдвиг между ними соответственно. Внутри каждой популяции осцилляторы одинаковы. Такая система сводится к уравнению вид

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_k^a &= \omega_a + \text{Im} (Z_a e^{-i\phi_k^a}), \\ Z_a &= \frac{1}{N} \sum_b N_b V_{ab} e^{-i\phi_k^a} r_b e^{i\psi_b}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где величина $r_b e^{i\psi_b}$ представляет собой параметр порядка в популяции b . В терминах

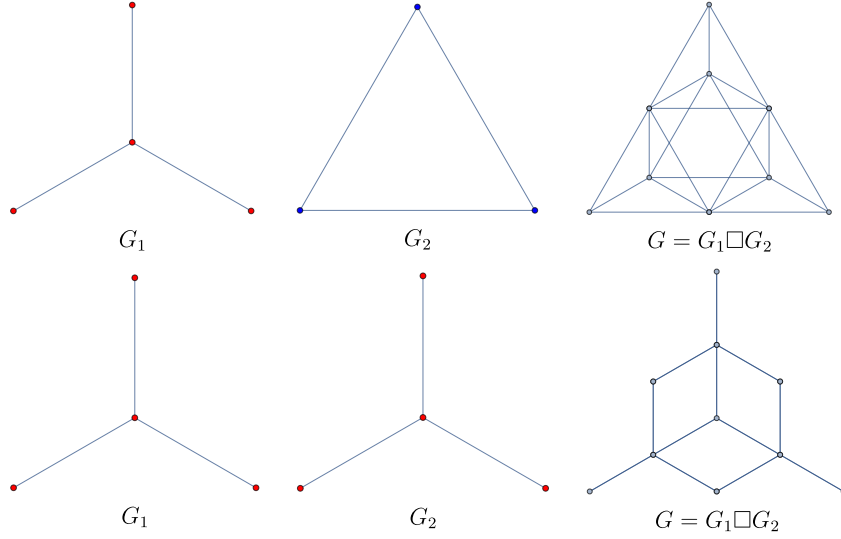


Рис. 10: Декартовы произведения G графов G_1 и G_2

комплексных переменных система (2.48) принимает знакомый вид:

$$\dot{z}_k^a = i\omega_a z_k^a + \frac{1}{2N} \sum_b \sum_{k=1}^{N_b} V_{ab} (z_k^b - \bar{z}_k^b (z_k^a)^2) \quad (2.49)$$

Т.к. внутри каждой популяции осцилляторы одинаковы, то мы можем применить преобразование Мёбиуса к каждой популяции. В самом простом (но не тривиальном) случае, когда популяции всего две и константа связи V_{ab} выглядит как

$$V_{ab} = \begin{pmatrix} 2\mu & 2\nu \\ 2\nu & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \nu = 1 - \mu \quad (2.50)$$

и $\alpha_{ab} = \alpha$ при этом обе популяции одинаковых размеров и собственные частоты в популяциях одинаковы. С таким взаимодействием (2.50) можно продвинуться в аналитическом решении. Самым интересным наблюдением в этом анализе является тот факт, что в такой системе существует состояние когда одна популяция полностью синхронизована, а другая – нет. Увы, на этом ограничиваются аналитические подходы к графам с произвольной топологией.

Существует однако класс графов, на которых модель допускает точное решение (в том смысле, что можно получить аналитические выражения для критических констант связи). Эти графы представимы в виде декартова произведения графов. Пусть имеется два графа, $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Декартовым произведением $G_1 \square G_2$ называется граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$. Вершины графа-произведения, (ik) и (jl) , соединены тогда и только тогда если $i = j$ и k смежна с l в G_2 или же $k = l$ и i смежна с j в G_1 (см. рис. 10 для примеров). Если можно решить аналитически модель на графе G_1 и на графе G_2 , то тогда можно получить аналитическое решение на графе $G_1 \square G_2$. Например, в работе [14] авторы рассматривают случай, когда $G_{1,2}$ – две одинаковые звезды. Также в работе [15] авторы рассматривают произведение двух графов-колец и произведение кольца и звезды. Примечательным фактом является то, что если на одном из графов-множителей G_1 синхронизация разрывна,

а на другом G_2 – нет, то на графе-произведении $G_1 \square G_2$ синхронизация становится смешанной.

Наконец, можно подойти к задаче о синхронизации на графе со сложной топологией численно. Авторы [16] предлагают использовать кросс-отношение для нахождения преобразований Мёбиуса. Пусть у графа N вершин, выберем из них четыре случайным образом. Если для выбранных четырех можно найти такое преобразование \mathcal{M}_t , что $z_i(t) = \mathcal{M}_t(z_i(0))$, то находим параметры преобразования. Если нет, то выбираем другую четверку. Таким подходом можно перебрать все вершины графа и найти все различные преобразования Мёбиуса. С другой стороны, тут все еще есть неопределенность. Перебрав вершины и найдя параметры, мы найдем облако точек на диске и его еще нужно разделить на кластеры.

Не смотря на описанные выше сложности, некоторые результаты для графов с топологией сложнее полного графа (в тоже время отличных от графа звезды и не являющихся декартовым произведением двух графов) можно получить точно комбинируя аналитический подход и численные симуляции.

2.3.1 Граф типа длинная звезда

Наибольшего успеха удалось добиться в анализе графа типа длинная звезда. Этот граф представляет собой звезду, у которого каждый луч содержит больше одной вершины. Уравнения движения на этом графе имеют вид

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.51)$$

где A_{ij} соответствующая матрица смежности (мы не приводим ее явный вид, но подчеркнем, что она имеет достаточно простой вид). Рассматривая случай, когда собственные частоты осцилляторов совпадают с валентностью вершин, мы легко можем найти аналитически λ_c^b . Действительно, пусть система находится в синхронизованной фазе, тогда частоты всех осцилляторов совпадают и равны $\Omega = 2np/(np + 1)$ – средней валентности вершины графа. Подставляя такое решение в уравнения движения, находим

$$\lambda_c^b = \frac{np - 1}{np + 1}, \quad (2.52)$$

где n есть число лучей, а p – длина луча. Для дальнейшего анализа воспользуемся численным решением системы. На рис. 11 приведены графики, иллюстрирующие зависимость параметра порядка от константы связи λ . Облако точек при малых значениях λ возникает как артефакт численного счета: параметр порядка усредняется $r(t)$ усредняется по очень большому промежутку времени T , а в численном счете используется относительно небольшой промежуток времени в силу ограниченности ресурсов.

Опираясь на численные результаты, заметим что для длинной звезды имеется три ”особенных” значения константы связи. Одно мы уже нашли ранее, это λ_c^b . Пристальное рассматривание графиков и анализ уравнений движения (2.51), дают следующие результаты для оставшихся двух констант:

$$\lambda_c^f = \frac{n - 1}{\sqrt{2n + 1}}, \quad \lambda_c^i = \frac{n - 1}{n + 1}. \quad (2.53)$$

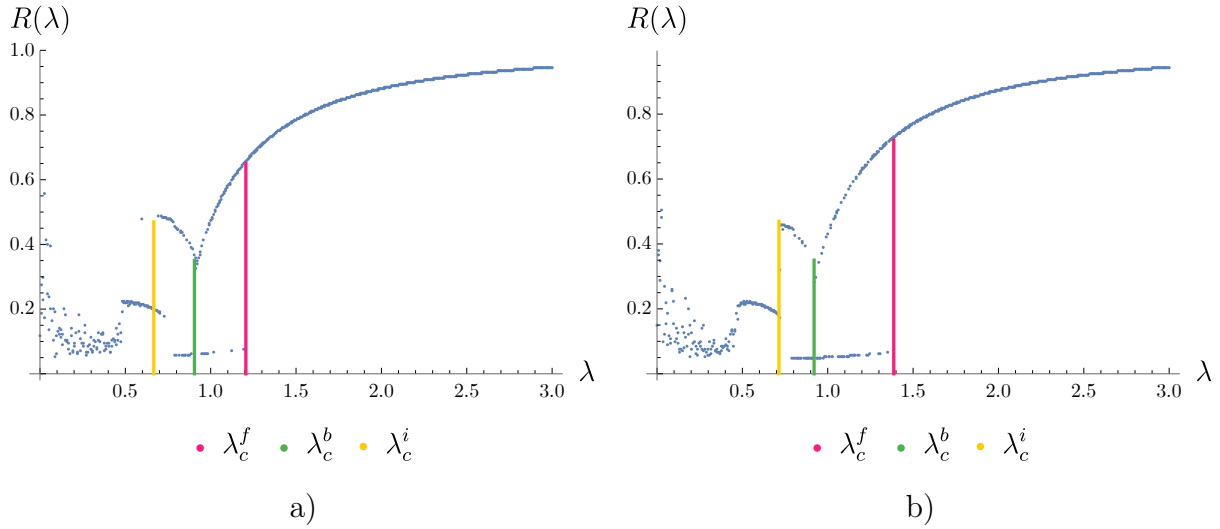


Рис. 11: Разрывная синхронизация на длинной звезде с а) $n = 5$, $p = 4$ и б) $n = 6$, $p = 4$

Качественно наблюдаемое явление можно обосновать так. Процесс синхронизации начинается с хаба, затем переходит на лучи и лишь в самом конце на листья. В промежуточной стадии листья эффективно не вносят вклада в процесс синхронизации. Такая гипотеза подтверждается если исследовать динамику синхронизации численно. Выберем случайные начальные условия β_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ и достаточно большую константу связи (чтобы синхронизованное состояние возникло). Затем построим функции $z_i = \exp(i\theta_i(t))$, полученные путем численного решения системы дифференциальных уравнений. Чтобы исследовать динамику синхронизации, можно раскрасить точки внутри лучей в своей цвет, а также раскрасить хаб и листья разными цветами. Эта простая манипуляция позволяет эмпирически понять как происходит синхронизацию, см. рис. 12.

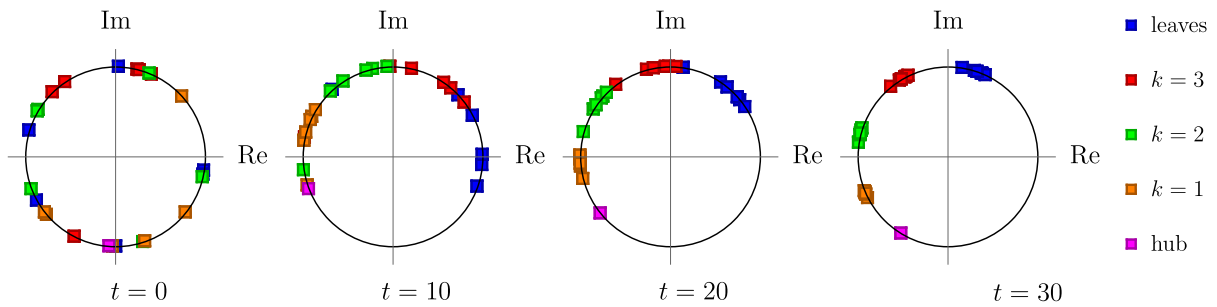


Рис. 12: Динамика синхронизации на длинной звезде с $n = 5$, $p = 4$, k нумерует слои.

Анализируя динамику, мы приходим к следующим выводам. Действительно, процесс синхронизации начинается с хаба и перетекает на лучи, листья же синхронизируются последними. В процессе синхронизации осцилляторы образуют $N_c = p + 1$ кластеров, причем есть кластер, в котором ровно один осциллятор – хаб. Это наблюдение аналогично процессу синхронизации на звезде, где также существует два кластера: кластер с хабом и кластер с лучами. Аналогично случаю звезды, между

кластерами есть разница фаз.

Перейдем теперь к вопросу о стабильности синхронизованной фазы. Синхронизованное решение можно представить как $\theta_i(t) = \Omega t + \varphi_i$, где φ_i есть константа. Рассмотрим малое возмущение $\delta\theta_i(t)$ вблизи синхронизованного состояния, т.е. $\theta_i(t) = \Omega t + \varphi_i + \delta\theta_i(t)$. Подставляя такое решение в уравнение (2.51) и удерживая линейных по $\delta\theta_i(t)$ порядок, получим уравнение вида

$$\delta\dot{\theta}_i = -\lambda T_{ij} \delta\theta_j, \quad (2.54)$$

где T_{ij} представляет собой квадратную матрицу и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Чтобы показать стабильность решения, достаточно указать при каком условии все собственные значения Λ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$ матрицы T_{ij} будут положительны. Используя теорему Гершгорина, можно убедиться, что если все $|\varphi_j - \varphi_i| < \pi/2$, то $\forall \Lambda < 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$ и такая система стабильна. Если $|\varphi_j - \varphi_i| > \pi/2$, то $\forall \Lambda > 0$, $i \in \{1, \dots, N\}$ и система нестабильна. Если же среди i и j найдутся такие $\Delta_{ij} < \pi/2$ и $\Delta_{ij} > \pi/2$, то требуется более тонкий анализ стабильности.

2.3.2 Фаза с \mathbb{Z}_{p+1} симметрией

Рассмотрим теперь все тот же граф в пределе большого числа лучей (вершин). Пусть мы находимся в синхронизованной фазе. Тогда явно выписав уравнения движения, для разности фаз на луче можно получить

$$\Delta_k = \frac{p(2-n) - 2k + 1}{np + 1}, \quad \Delta_k \equiv \lambda \sin(\theta_k - \theta_{k-1}). \quad (2.55)$$

Рассмотрим это выражение в пределе большого числа лучей, $p \rightarrow \infty$. Сделав простое разложение, в лидирующем порядке имеем просто $\Delta_k = -1 + \mathcal{O}(p^{-1})$, откуда для разности фаз находим

$$\theta_k - \theta_{k-1} = -\text{arccsc } \lambda. \quad (2.56)$$

Подставив полученный результат в выражение для порядка, приходим к следующему достаточно простому выражению,

$$r^2 = \frac{\cos(p \text{arccsc } \lambda) - 1}{\sqrt{1 - \lambda^{-2}} - 1}. \quad (2.57)$$

Этот результат интересен тем, что при $\lambda > 1$ параметр порядка обращается в ноль при $\lambda = \text{csc}(2\pi m/p)$, где $m \in \mathbb{Z}$. Подобное поведение намекает на состояние химеры – глобально степени свободы синхронизованы, тем не менее параметр порядка равен нулю. Теоретический анализ подтверждается численной симуляцией модели (рис. 13, 14).

2.3.3 Циклический граф

Еще одним интересным примером графа, для которого можно получить некоторые аналитические результаты является циклический граф (кольцо). Для кольца система уравнений имеет весьма простой вид,

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \lambda \sin(\theta_{i-1} - \theta_i), \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.58)$$

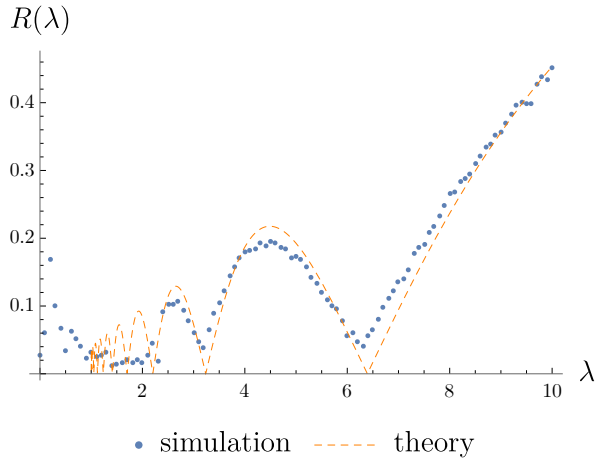


Рис. 13: Параметр порядка $R = R(\lambda)$ для длинной звезды с $n = p = 40$

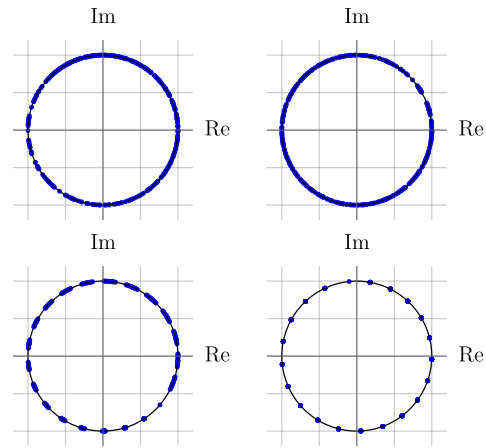


Рис. 14: Возникновение состояния с \mathbb{Z}_{p+1} симметрией для $n = 20, p = 20$

однако даже для случая $\omega_i = \omega$ можно убедиться, что преобразование Мёбиуса не приводит к понижению размерности. Действительно, систему можно привести к виду

$$\dot{\theta}_i = \omega + f e^{i\theta_i} + \bar{f} e^{-i\theta_i}, \quad f \equiv \frac{\lambda}{2i} (e^{-i\theta_{i+1}} + e^{-i\theta_{i-1}}), \quad (2.59)$$

т.е. функция f зависит от индекса. Тем не менее, можно получить некоторые результаты даже не применяя преобразование Мёбиуса. Для этого надо рассмотреть синхронизованное состояние, в котором $\theta_i = \Omega t + \varphi_i$, где Ω есть средняя частота системы осцилляторов, а φ_i просто константа. Подставляя это решение в уравнения движения получим,

$$\Omega = \omega_i + \lambda \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \lambda \sin(\varphi_{i-1} - \varphi_i). \quad (2.60)$$

Введем переменную $\delta_i = \omega_i - \Omega$, тогда уравнения (2.60) образуют систему N линейных уравнений с N неизвестными с одним свободным параметром. Обозначим этот параметр как p , очевидно что $p \in [-1, 1]$. Тогда для разности фаз $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ получим

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \arcsin \left(p + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{N-i} \delta_j \right). \quad (2.61)$$

Чтобы найти явный вид решений, надо для заданного λ и частот ω_i решить уравнение

$$\sum_{i=1}^{N-1} \arcsin \left(p + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=i}^N \delta_j \right) = 2\pi m, \quad (2.62)$$

относительно p , где $m = \{-M, \dots, M\}$ и $M = [N/4]$ (скобки обозначают целую часть от числа). Число m можно интерпретировать как число намоток. Такое рассуждение подводит к тому, что существует целая серия стабильных решений, параметризованных параметром m . действительно, всего имеется $1 + 2 \cdot [N/4]$ синхронизованных

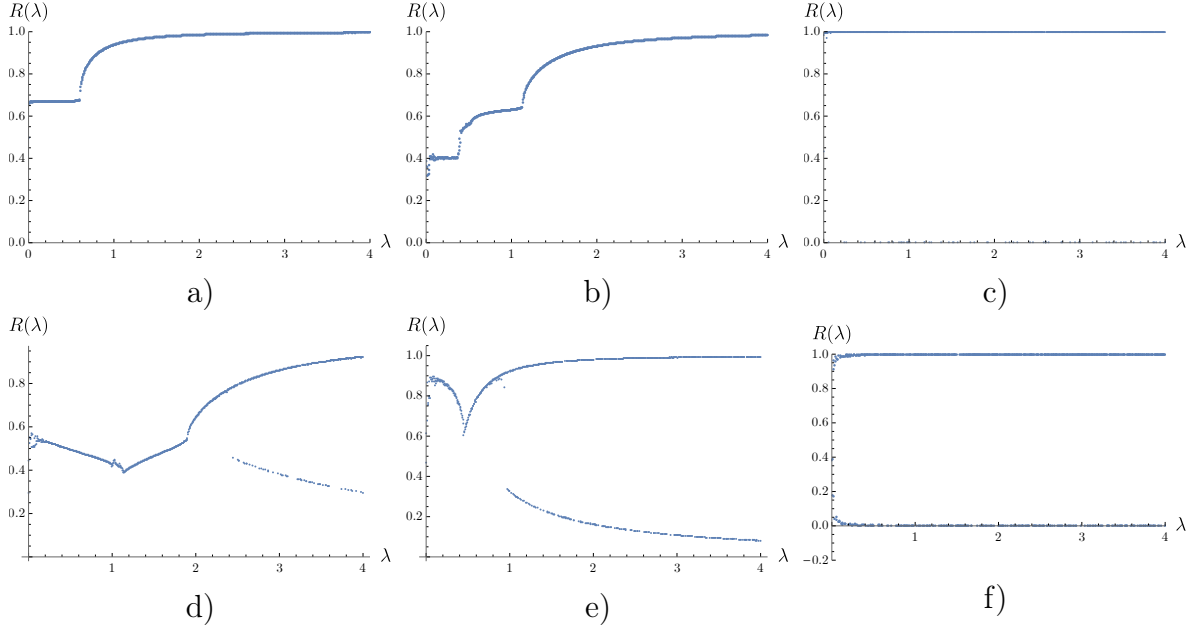


Рис. 15: Синхронизация на циклическом графе: а)-с) соответствуют $N = 5$ вершинам, с) – все собственные частоты одинаковы; d)-f) соответствуют $N = 10$ вершинам, f) – все собственные частоты одинаковы

решений, различающихся числом намоток. Наиболее интересным явлением для циклического графа является то, что для определенных значений m усредненный параметр порядка $R = R(\lambda)$ обращается в ноль. На рис. 15 приведены графики параметра порядка $R = R(\lambda)$ для циклического графа с разным числом вершин N и разными собственными частотами ω_i . Видно, что поведение параметра порядка сильно зависит от распределения частот ω_i . Также интересно, что в случае одинаковых частот $\omega_i = \omega$ имеется две ветви: $R_1 \rightarrow 1$ и $R_2 \rightarrow 0$ и это происходит при $N > 8$, т.е. когда $[N/4] > 1$ (это соответствует $m = \pm 2, \pm 1, 0$). Также можно проанализировать стабильность полученных решений. Для этого достаточно снова рассмотреть в линейном приближении отклонения от синхронизованного решения. Применяя теорему Гершгорина для матрицы Якоби J , можно показать что все собственные значения матрицы лежат внутри одного из дисков Гершгорина, $\{z : |z - J_{ii}| \leq K_i\}$, $K_i = \sum_{j \neq i} J_{ij}$. Это позволяет описать критерии стабильности решений. Если $\forall i$ выполняется $|\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \pi/2$ решения стабильны и собственные значения удовлетворяют $\text{Re } \lambda_i \leq 0$. Если же $\forall i$ модуль разности фаз $> \pi/2 \pmod{2\pi}$, то решение нестабильно $\text{Re } \lambda_i \geq 0$. Если же найдется такие i и j , что для некоторых i модуль разности фаз $< \pi/2$ и для некоторых j модуль разности фаз $> \pi/2$, то про стабильность ничего сказать нельзя.

3 Заключение и обсуждение

Обсудив модель Курамото на разных графах и продемонстрировав ключевые особенности данной модели, можно перейти к обсуждению полученных результатов. В рассмотренных примерах мы убедились в следующих фактах: 1) параметр порядка (1.7) может быть не самой подходящей величиной, т.к. в некоторых случаях такое определение параметра порядка дает контринтуитивный результат (возникновение со-

стояний с $R(\lambda) = 0$ в режиме сильной связи), 2) в случае графов со сложной топологией в синхронизованной фазе имеет место образование кластеров. Ниже мы обсудим что дает нам знание этих фактов.

3.1 Обсуждение

3.1.1 Параметр порядка модели

Введенный ранее параметр порядка (1.7) и его усредненное значение (1.8) в некотором смысле были определены интуитивно [3, 4]. Как было показано ранее, существует также определение локального параметра порядка в виде (2.34), глобальный же, в свою очередь определяют как $r = r_i/d_i$ (подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу). Явный недостаток такого определения в том, что вообще говоря таких локальных параметров порядка будет столько, сколько вершин у графа. Также ряд авторов определяет параметр порядка иначе.

Эта неоднозначность в выборе параметра порядка наводит на мысль о том, что существует некоторая наиболее подходящая величина, позволяющая различить синхронизованную и несинхронизованную фазы. Вернемся к случаю полного графа. Мы показали, что динамика модели Курамото на таком графе связана с функцией Буземана на диске Пуанкаре. Пусть $w \in D$ и $\zeta \in S^1$. Регуляризовав точку на границе как $\zeta = (1 - \epsilon)e^{in}$, приходим к следующему результату

$$B(w, \zeta) = \frac{1 - |w|^2}{|\zeta - w|^2} = \ln \epsilon - L(\zeta, 0), \quad (3.1)$$

т.е. функцию Буземана можно рассматривать как некоторую регуляризацию геодезической на диске Пуанкаре. Это наводит на мысль о том, что можно найти параметр порядка, явно связанный с геодезическими на диске Пуанкаре (хотя бы для полного графа). Существует два кандидата на эту роль: энтропия запутывания и комплексити. Энтропия запутывания напрямую выражается через длину геодезической [17], а комплексити оказывается связанной с площадью под геодезической [18].

Если рассуждать в терминах энтропии запутывания, то мы вынужденно оказываемся в ситуации с конечной температурой, т.е. рассматриваем геометрию ВТЗ черной дыры. Это необходимо, т.к. правая часть уравнения (2.33) описывает геодезические, которые начинаются в D и идут к границе S^1 . Такое рассмотрение осложняется тем, что регуляризация геодезических "портит" изометрию гиперболического пространства. Это приводит к тому, что неясно как интерпретировать уравнение (2.33), а именно описать параметр w в терминах энтропии. Описание в терминах комплексити кажется более подходящим, но также неясно как интерпретировать параметр w . Эти вопросы мы оставляем для дальнейшего исследования.

3.1.2 Связь сложной топологии графа с образованием кластеров

Во всех примерах графов со сложной топологией, но все же достаточно симметричных, мы наблюдали кластеризацию осцилляторов в синхронизованном состоянии. Наличие этих кластеров можно попытаться связать с группой автоморфизмов. Эта группа автоморфизмов распадается в прямую сумму групп автоморфизмов каждой компоненты связности графа.

В работе [19] авторы рассматривают похожий подход и приходят к выводу, что существование кластеров является достаточным для образования химер. Авторы рассматривают группу автоморфизмов $G = \text{Aut}(\mathbf{A})$ графа с матрицей смежности \mathbf{A} . Выберем вершину i , тогда все перестановки $\pi(i)$, которые сохраняют матрицу смежности, $A_{ij} = A_{\pi(i)\pi(j)}$, образуют группу. Орбиты этой группы $\phi(G, i) = \{\pi(i) | \pi \in G\}$ разбивают граф на кластеры симметрии. Таких разбиений может быть очень много, т.к. каждая подгруппа группы $\text{Aut}(\mathbf{A})$ будет также порождать кластеры. Выделив подгруппу F , авторы изучают набор $\{C_k\}$ "кандидатов" в кластеры и рассматривают синхронизацию в каждом кандидате. Такую процедуру можно рассматривать как coarse-grained процедура для матрицы смежности, т.к. для каждого кластера определяется эффективная матрица смежности $\tilde{A}_{nk} = \sum_{j \in C_k} A_{ij}$, где $i \in C_n$. Увы, из-за проблемы с наличием подгрупп такой подход не дает полной аналитической картины, т.к. истинная "кластерная" структура ими искажается.

3.1.3 Модель Курамото в разных системах

В заключение стоит упомянуть кратко о том в каких системах модель Курамото возникает. Одной из естественных систем, где возникает модель Курамото являются Джозефсоновские контакты [6, 20]. Динамика одного контакта сводится к безразмерному уравнению

$$\beta \dot{\phi} + \dot{\phi} + \sin \phi = I_b, \quad (3.2)$$

где $\phi(t)$ разница фаз в контакте, I_b безразмерный ток и β есть безразмерная мера емкости конденсатора в контакте. Динамика системы контактов сводится к обычным уравнениям Кирхгофа, которые в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j + \sin \phi_j + \dot{Q} &= I_b, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \\ L\ddot{Q} + R\dot{Q} + C^{-1}Q &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно показать, что эта система сводится к модели Курамото на полном графе и все описанные ранее методы применимы для её описания. В работе [21] описана возможность образования Бозе-конденсата в системе, где бозонные степени свободы локализованы в вершинах графа. Далее, в работе [22] обсуждается существование конденсата в системе Джозефсоновских контактов с топологией звезды. Опираясь на эти результаты, закономерный вопрос, который можно задать: связан ли феномен синхронизации в модели Курамото с образованием Бозе-конденсата?

Модель Курамото используется для изучения процессов в биологических нейросетях, в первую очередь коннектома [23]. Коннектом представляет собой очень сложную сеть с большим числом вершин. Модель используется как для анализа отдельных компонент, так и всего коннектома в целом. В работах [24] обсуждается процесс синхронизации в структурах, составляющих коннектом. Авторы обсуждают, что кора мозга (кортекс) функционирует в околокритическом режиме и сравнивают процессы синхронизации в кортексе с процессами синхронизации на графах типа "маленький мир". Помимо теоретических моделей и эмпирических фактов, в работах [25] и [26] создают искусственные нейронные сети, пользуясь знаниями про коннектом нематоды *Caenorhabditis elegans*. Результаты упомянутых работ подчеркивают, что синхронизация в действительности очень важна в биологических нейронных сетях.

Не менее интересно, что модель Курамото возникает и в твердотельных системах тоже. В работе [27] обсуждается возникновение недиагонального дальнего порядка в модели SYK+Hubbard. Показано, что теория среднего поля приводит к модели Курамото и сверхпроводящее состояние отвечает синхронизованному. Перевальное уравнение не фиксирует фазу локального параметра порядка, $\Delta_i = |\Delta|e^{i\phi_i}$, где i индекс орбитали модели Хаббарда. Действие фаз имеет вид

$$S = \int d\tau \left[\frac{m}{2} \sum_i^N \dot{\phi}_i - \frac{g}{N} \sum_{i<j}^N \cos(\phi_i - \phi_j) \right], \quad (3.4)$$

где τ евклидово время, g есть эффективная константа связи, а m масса фермиона. Уравнения движения такого действия есть уравнения модели Курамото (со второй производной) на полном графе. В работе [28] показано, что динамика спинового момента может быть описана в терминах преобразования Мёбиуса. Авторы рассматривают уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта, в котором гамильтониан спина имеет вид

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\gamma \mathbf{H} + i\mathbf{j}}{1 - i\alpha} \right) \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{H} есть внешнее магнитное поле, \mathbf{j} описывает перенос спинового момента (spin-transfer torque, STT), константа α есть Гильбертово затухание и γ есть гиромангнитное отношение. Тогда уравнение Ландау-Лифшица-Гильберта в такой системе может быть сведено к действию преобразования Мёбиуса с параметрами, зависящими от времени на спин. В статье [29] авторы описывают BCS-гамильтониан в терминах псевдоспина и рассматривают константу связи λ , зависящую от времени,

$$\mathcal{H} = - \sum_{\mathbf{p}} 2\epsilon_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{p}}^z - \lambda(t) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} s_{\mathbf{p}}^- s_{\mathbf{q}}^+, \quad (3.6)$$

где $s_{\mathbf{p}}^{\pm} = s_{\mathbf{p}}^x \pm s_{\mathbf{p}}^y$ есть Куперовская пара и $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - \mu$. Затем рассматривают эволюцию системы, когда константа связи меняется скачком. Эффективно динамика сводится к уравнению Блоха,

$$\dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}} = 2\mathbf{b}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b}_{\mathbf{p}} = -(\Delta_x, \Delta_y, \epsilon_{\mathbf{p}}), \quad (3.7)$$

где $\mathbf{r}_{\mathbf{p}} = 2\langle \mathbf{s}_{\mathbf{p}} \rangle$ и $\Delta = \Delta_x + \Delta_y$. Сходная динамика рассматривается в уравнении Ландау-Лифшица-Гильберта. Эти обсуждения напрямую связаны с озвученным выше вопросом про синхронизацию и квантовые фазовые переходы.

Интересны также обобщения модели Курамото сами по себе. В серии работ [30, 31] авторы обобщают модель на полном графе на матричные степени свободы, а именно исследуют систему

$$\dot{Z}_i = \Gamma_1 i\Omega_1 Z_i + iZ_i\Omega_2 - Z_i\Gamma_2 Z_i, \quad (3.8)$$

где Z_i , $\Omega_{1,2}$ и $\Gamma_{1,2}$ есть матрицы. Эта система сводится матричных уравнений Риккати. Автор последовательно рассматривают разные типы матриц и приводит детальное обсуждение свойств модели Курамото с такими степенями свободы. В работах [32] и [33] авторы рассматривают неабелевы степени свободы и изучают синхронизацию в такой системе. В статье [33] демонстрируется, что у неабелевой модели Курамото также есть низкоразмерная динамика, связанная с преобразованием Мёбиуса.

Наконец, в работе [34] показано, что в модели Курамото может возникать хаос. Авторы показывают возникновение хаотического аттрактора в модели, последовательно рассматривая разное число осцилляторов. Далее, в статье [5] авторы рассматривают непрерывный предел, выбирая в качестве фазовой плотности $\rho(\varphi, t)$ в момент времени $t = 0$ функцию $\rho(\varphi, 0) = (1 + \cos n\varphi)/(2\pi)$. Выбирая функции f и g в (2.2) соответствующие массиву Джозефсоновских контактов (см. [5, 6, 20]), авторы показывают что при определенном соотношении параметров в модели возникает хаотическое поведение.

3.2 Заключение

В этой работе мы последовательно изложили известные результаты для модели Курамото, которая является одной из самых простых моделей для феномена синхронизации. Несмотря на кажущуюся простоту, модель Курамото не является полностью интегрируемой даже в простейшем случае взаимодействия каждый с каждым и одинаковых собственных частотах осцилляторов. Результаты, которые обосновывают существование и описывают смысл интегралов движения модели, были получены сравнительно недавно. Аналитические и численные результаты для модели Курамото на сложных графах известны совсем для небольшого числа графов, среди которых выделяется граф типа звезда и циклический граф и также были получены недавно. Это подчеркивает факт, что исследования модели Курамото на разных графах все еще актуальны, равно как и исследования, посвященные различным обобщениям модели на полном графе.

Полученные нами результаты для графа длинная звезда являются попыткой продвинуться на пути к аналитическим результатам для графов с более общей топологией. Наличие нескольких критических констант связи и анализ динамики синхронизации указывают на то, что наблюдаемая картина может быть общей для графов с более сложной топологией, а именно: 1) синхронизация происходит пошагово, 2) наблюдается кластеризация в синхронизованной фазе. Возникновение фазы с нулевым параметром порядка для больших констант связи также указывает на то, что скорее всего наличие химер – это часто встречающееся явление для модели на сложном графе. Кластеризация в синхронизованной фазе указывает на то, что симметрии графа играют важную роль и аналитическое решение надо искать, стартуя с анализа симметрий графа. Наконец имеющиеся результаты для процесса синхронизации на полном графе в терминах геодезических на гиперболическом диске указывают на то, что имеется более глубокая связь между моделью Курамото и гиперболическим пространством.

Модель Курамото возникает в различных физических, химических и биологических системах. По этой причине установление связей между динамикой модели и другими моделям и системами может дать сильный толчок в понимании того как устроены весьма сложные явления, где модель Курамото возникает.

Благодарности

Автор искренне благодарит А. С. Горского за предложенную задачу и большое количество обсуждений и С. К. Нечаева за рецензирование работы. Также автор благодарен В. Архипкину, П. Архипову и А. Милехину за обсуждения, посвященные численным и аналитическим расчётам.

А Приложение

А.1 Фазовый переход на полном графе в пределе $N \rightarrow \infty$

Подставив определение параметра порядка (1.7) в уравнения движения для полного графа (1.6), получаем уравнение

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda r(t) \sin(\psi - \theta_i). \quad (\text{A.1})$$

Без ограничения общности можно считать, что $\psi = 0$. Более того, мы хотим изучить такие решения, что $r(t) = \text{const}$, тогда (A.1) принимает вид

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \lambda r \sin \theta_i. \quad (\text{A.2})$$

Из этого уравнения видно что поведение решений определяется отношением λr и ω_i . Для $|\omega_i| < \lambda r$ существует фиксированная стабильная точка $\omega_i = \lambda r \sin \theta_i$, $|\theta_i| < \pi/2$. Эти осцилляторы назовем *синхронизованными по фазе*. Если $|\omega_i| > \lambda r$, то такие осцилляторы будем называть *свободными*. Рассмотрим теперь предел $N \rightarrow \infty$, в таком пределе собственные частоты осцилляторов распределены с некоторой функцией $g(\omega)$. Синхронизованные по фазе осцилляторы отвечают центру распределения, а свободные находятся в хвостах. Потребовав, чтобы распределение свободных осцилляторов было стационарным, можно написать

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - \lambda r \sin \theta|}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \rho(\theta, \omega) = 1. \quad (\text{A.3})$$

Далее, параметр порядка определяется как сумма двух вкладов,

$$r = \langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{locked}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{drifting}}. \quad (\text{A.4})$$

Вычисление первого вклада простое, т.к. $\sin \theta = \omega/(\lambda r)$ для всех $|\omega| \leq \lambda r$. Рассматривая четные распределения, $g(\omega) = g(-\omega)$, мы можем написать

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \int_{-\lambda r}^{+\lambda r} d\omega g(\omega) \cos \theta(\omega) = \lambda r \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta g(\lambda r \sin \theta) \cos^2 \theta. \quad (\text{A.5})$$

Для второго же слагаемого мы получаем

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{|\omega| > \lambda r} d\theta d\omega e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega). \quad (\text{A.6})$$

Оба распределения в интеграле (A.6) четные, поэтому интеграл обращается в ноль. В итоге уравнение самосогласования принимает вид

$$r = \lambda r \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta g(\lambda r \sin \theta) \cos^2 \theta. \quad (\text{A.7})$$

Это уравнение всегда имеет решение $r = 0$ для любого значения константы связи λ . Это состояние отвечает полностью несинхронизованному состоянию с $\rho(\theta, \omega) = 1/(2\pi)$. Вторая же ветвь решений отвечает частично синхронизованному состоянию, которое удовлетворяет

$$1 = \lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta g(\lambda r \sin \theta) \cos^2 \theta. \quad (\text{A.8})$$

Это состояние имеет бифуркацию в точке $r = 0$ при $\lambda = \lambda_c$, что дает $\lambda_c = 2/(\pi g(0))$. В случае распределения Лоренца, $g(\omega) = \gamma/(\pi\omega^2 + \pi\gamma^2)$, можно проинтегрировать (A.8) точно и получить

$$r = \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^{1/2} \quad (\text{A.9})$$

Этот результат справедлив в пределе больших N .

A.2 Фазовый переход на графе со сложной топологией в пределе $N \rightarrow \infty$

Рассмотрим вновь локальный параметр порядка (2.34). Пусть валентность i -ой вершины достаточно большая, чтобы вызвать синхронизацию, т.е. система близка к синхронизованному состоянию ($\lambda \sim \lambda_c$). Тогда локальный параметр порядка можно переписать в виде

$$r_i = \sum_j A_{ij} \int_{-\lambda r_j}^{\lambda r_j} d\omega g(\omega) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda r_j}\right)^2} = \lambda \sum_j A_{ij} r_j \int_{-1}^1 dx g(x \lambda r_j) \sqrt{1 - x^2}. \quad (\text{A.10})$$

Вновь используя предположение, что $r_i \propto k_i$ и полагая $r_i = r k_i$. Суммируя по i и рассматривая предел большого числа осцилляторов, приходим к уравнению среднего поля для графа со сложной топологией,

$$\int dk k P(k) = \lambda_c \int dk k^2 P(k) \int_{-1}^1 dx g(0) \sqrt{1 - x^2} = \frac{\lambda_c g(0) \pi}{2} \int dk k^2 P(k). \quad (\text{A.11})$$

Это приводит к полученному ранее выражению (2.35).

A.3 Формальное разложение параметра порядка по β_i

Рассмотрим выражение для (1.7),

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{w + e^{i\alpha} \beta_j}{1 + \bar{w} e^{i\alpha} \beta_j}. \quad (\text{A.12})$$

Разложим знаменатель этого выражения по β_j в ряд Тейлора (разложение надо рассматривать как формальное),

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} (w + e^{i\alpha} \beta_j) (-e^{i\alpha} \bar{w} \beta_j)^l, \quad (\text{A.13})$$

выделяя два слагаемых, находим

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{i\alpha} \bar{w})^l - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} (-e^{i\alpha} \bar{w})^{l+1}. \quad (\text{A.14})$$

Переставляя суммирование, получим структуру вида $\sum_{j=1}^N \beta_j^l$. Если β_j , $j \in \{1, \dots, N\}$ распределены случайно и равномерно по S^1 , то тогда $\sum_j \beta_j^l = 0$ при любом $l > 0$. То есть, в случае равномерно распределенных случайных условий $r(t)$ равен просто w .

А.4 Явный вид фиксированных точек для графа звезда

Фиксированные точки уравнения (2.39) имеют вид

$$z_{s1,2} = \exp \left[i \arcsin \frac{(\beta - 1)\omega}{(\beta + 1)\lambda} \right], \quad \lambda > \lambda_c^f \quad (\text{A.15})$$

$$z_{a1,2} = -i \frac{(\beta - 1)\omega \pm \sqrt{(\beta - 1)^2 \omega^2 - (2\beta + 1)\lambda^2}}{(2\beta + 1)\lambda}, \quad (\text{A.16})$$

$$z_{s1,2} = \exp \left[i \arcsin \frac{(\beta - 1)\omega}{(\beta + 1)\lambda} \right], \quad \lambda_c^f \geq \lambda \geq \lambda_c^b,$$

$$z_{a2} = -i \frac{(\beta - 1)\omega - \sqrt{(\beta - 1)^2 \omega^2 - (2\beta + 1)\lambda^2}}{(2\beta + 1)\lambda}, \quad \lambda < \lambda_c^b. \quad (\text{A.17})$$

Точка z_{s1} является центром и соответствует синхронизованному состоянию. Точка z_{a1} является седловой и соответствует сепаратриссе. Точка z_{a2} является источником и соответствует некогерентному состоянию.

А.5 Параметр порядка для длинной звезды в пределе $p \gg 1$

Из выражения для разности фаз, получаем $\theta_k = \theta_{k-1} - \arcsin(1/\lambda)$. Подставляя θ_k в (1.7), получаем,

$$r = \frac{1}{np + 1} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = \frac{ne^{\theta_0} (e^{-i(p+1)\delta} - e^{-i\delta})}{(np + 1)(e^{-i\delta} - 1)}, \quad (\text{A.18})$$

где θ_0 есть фаза хаба, $\delta = -\arcsin(1/\lambda)$. Находя r^* и вычисляя $|r|$, получаем параметр порядка (2.57).

Список литературы

- [1] V.I. Arnol'd, *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* **25** (1961) 21.
- [2] A.T. Winfree, *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*, *Journal of theoretical biology* **16** (1967) 15.
- [3] S.H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **143** (2000) 1.
- [4] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer, Berlin, Heidelberg (1984).
- [5] S.A. Marvel, R.E. Mirollo and S.H. Strogatz, *Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action*, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **19** (2009) 043104.
- [6] S. Watanabe and S.H. Strogatz, *Integrability of a globally coupled oscillator array*, *Physical review letters* **70** (1993) 2391.
- [7] A. Pikovsky and M. Rosenblum, *Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **240** (2011) 872.
- [8] B. Chen, J.R. Engelbrecht and R. Mirollo, *Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50** (2017) 355101.
- [9] A. Douady and C.J. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, *Acta Mathematica* **157** (1986) 23.
- [10] R.M. D'Souza, J. Gómez-Gardeñes, J. Nagler and A. Arenas, *Explosive phenomena in complex networks*, *Advances in Physics* **68** (2019) 123.
- [11] V. Vlasov, Y. Zou and T. Pereira, *Explosive synchronization is discontinuous*, *Physical Review E* **92** (2015) 012904.
- [12] C. Xu, J. Gao, S. Boccaletti, Z. Zheng and S. Guan, *Synchronization in starlike networks of phase oscillators*, *Physical Review E* **100** (2019) 012212.
- [13] A. Pikovsky and M. Rosenblum, *Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators*, *Physical review letters* **101** (2008) 264103.
- [14] Z. Chen, Y. Zou, S. Guan, Z. Liu and J. Kurths, *Fully solvable lower dimensional dynamics of cartesian product of Kuramoto models*, *New Journal of Physics* **21** (2019) 123019.
- [15] C. Wang, Y. Zou, S. Guan and J. Kurths, *Cartesian product of synchronization transitions and hysteresis*, *New Journal of Physics* **19** (2017) 123036.

- [16] A. Crnkic and V. Jacimovic, *Exploring complex networks by detecting collective dynamics of Kuramoto oscillators*, in *Proceedings of the OPTIMA-2017 Conference*, edited by Yu. G. Evtushenko, et al. (CEUR-WS, 2017), pp. 146–151, 2017.
- [17] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of holographic entanglement entropy*, *Journal of High Energy Physics* **2006** (2006) 045.
- [18] R. Abt, J. Erdmenger, H. Hinrichsen, C.M. Melby-Thompson, R. Meyer, C. Northe et al., *Topological complexity in ads_3/cft_2* , *Fortschritte der Physik* **66** (2018) 1800034.
- [19] Y.S. Cho, T. Nishikawa and A.E. Motter, *Stable chimeras and independently synchronizable clusters*, *Physical review letters* **119** (2017) 084101.
- [20] S. Watanabe and S.H. Strogatz, *Constants of motion for superconducting Josephson arrays*, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **74** (1994) 197.
- [21] R. Burioni, D. Cassi, I. Meccoli, M. Rasetti, S. Regina, P. Sodano et al., *Bose-Einstein condensation in inhomogeneous Josephson arrays*, *EPL (Europhysics Letters)* **52** (2000) 251.
- [22] M. Lorenzo, M. Lucci, V. Merlo, I. Ottaviani, M. Salvato, M. Cirillo et al., *On Bose-Einstein condensation in Josephson junctions star graph arrays*, *Physics Letters A* **378** (2014) 655.
- [23] S. Di Santo, P. Villegas, R. Burioni and M.A. Muñoz, *Landau-Ginzburg theory of cortex dynamics: Scale-free avalanches emerge at the edge of synchronization*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **115** (2018) E1356.
- [24] G. Ódor and J. Kelling, *Critical synchronization dynamics of the Kuramoto model on connectome and small world graphs*, *Scientific reports* **9** (2019) 1.
- [25] M. Ricci, M. Jung, Y. Zhang, M. Chalvidal, A. Soni and T. Serre, *KuraNet: systems of coupled oscillators that learn to synchronize*, *arXiv preprint arXiv:2105.02838* (2021) [2105.02838].
- [26] M. Lechner, R. Hasani, A. Amini, T.A. Henzinger, D. Rus and R. Grosu, *Neural circuit policies enabling auditable autonomy*, *Nature Machine Intelligence* **2** (2020) 642.
- [27] H. Wang, A. Chudnovskiy, A. Gorsky and A. Kamenev, *SYK superconductivity: quantum Kuramoto and generalized Richardson models*, *arXiv preprint arXiv:2002.11757* (2020) [2002.11757].
- [28] A. Galda and V.M. Vinokur, *Linear dynamics of classical spin as Möbius transformation*, *Scientific reports* **7** (2017) 1.
- [29] R.A. Barankov and L.S. Levitov, *Synchronization in the BCS pairing dynamics as a critical phenomenon*, *Physical review letters* **96** (2006) 230403.

- [30] M. Lohe, *Higher-dimensional generalizations of the Watanabe-Strogatz transform for vector models of synchronization*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **51** (2018) 225101.
- [31] M. Lohe, *Systems of matrix Riccati equations, linear fractional transformations, partial integrability and synchronization*, *Journal of Mathematical Physics* **60** (2019) 072701.
- [32] M. Lohe, *Non-Abelian Kuramoto models and synchronization*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42** (2009) 395101.
- [33] V. Jaćimović and A. Crnkčić, *Low-dimensional dynamics in non-Abelian Kuramoto model on the 3-sphere*, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **28** (2018) 083105.
- [34] Y.L. Maistrenko, O.V. Popovych and P.A. Tass, *Chaotic attractor in the kuramoto model*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15** (2005) 3457.