

Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Московский физико-технический институт (государственный университет)”

Факультет общей и прикладной физики

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

О различных квантовых состояниях на фоне чёрной дыры

Выпускная квалификационная работа
(магистерская работа)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Работу выполнил:

студент группы М02-9216

Анемподистов Прокопий Андреевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., в.н.с, профессор

Ахмедов Эмиль Тофик оглы

Москва, 2021

Аннотация

Были исследованы свойства термальных состояний, в которых испускаемые чёрной дырой и падающие на неё моды имеют произвольные температуры. Были исследованы свойства пропагаторов и регуляризованного тензора-энергии импульса массивной скалярной теории на фоне чёрной дыры.

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени | 4 |
| 2.1 | Определения мод | 4 |
| 2.2 | Определение и свойства пропагатора | 5 |
| 2.3 | Состояния на фоне чёрной дыры Шварцшильда | 6 |
| 2.4 | Тензор энергии-импульса на фоне чёрной дыры Шварцшильда | 11 |
| 3 | Аномальные расходимости в состояниях с произвольными температурами | 16 |
| 3.1 | Двумерная черная дыра Шварцшильда | 16 |
| 3.1.1 | Моды и функция Вайтмана | 16 |
| 3.1.2 | Аномальная расходимость пропагатора на горизонте | 18 |
| 3.1.3 | Регуляризованный тензор-энергии импульса | 18 |
| 3.2 | Чёрная дыра Шварцшильда | 20 |
| 3.2.1 | Моды и функция Вайтмана в массивном случае | 20 |
| 3.2.2 | Каноническая сингулярность | 21 |
| 3.2.3 | Аномальная расходимость пропагатора в безмассовом случае | 23 |
| 3.2.4 | Аномальная расходимость пропагатора в массивном случае | 25 |
| 3.3 | Чёрная дыра Рейсснера-Нордстрёма | 26 |
| 3.3.1 | Моды и функция Вайтмана в безмассовом случае | 26 |
| 3.3.2 | Аномальная расходимость в безмассовом случае | 27 |
| 3.3.3 | Моды и функция Вайтмана в массивном случае | 27 |
| 3.3.4 | Аномальная расходимость в массивном случае | 28 |
| 4 | Заключение | 29 |
| A | Регуляризация тензора энергии-импульса | 30 |
| B | Преобразования Боголюбова | 32 |

1 Введение

При рассмотрении квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, для начала необходимо выбрать набор мод и задать начальные условия на какой-либо поверхности Коши [1]. Эта процедура однозначным образом задает состояние системы, по которому будут вычисляться корреляционные функции и другие наблюдаемые. При квантовании на фоне пространств с горизонтами оказывается, что одни состояния могут быть термальными с температурой горизонта соответствующего пространства [2], причем разные состояния отвечают разным физическим ситуациям.

Вопрос о том, какой физической ситуации отвечает выбранное состояние исследуется путем вычисления наблюдаемых в этом состоянии. Например, при квантовании поля на фоне чёрной дыры Шварцшильда, из анализа регулярности тензора энергии-импульса на будущем и прошлом горизонтах принято различать состояния Бульвара, Унру и Хартли-Хокинга. Тензор энергии-импульса расходится на обоих горизонтах в состоянии Бульвара, в то время как в состоянии Унру он регулярен на будущем горизонте и расходится на прошлом горизонте, а в состоянии Хартли-Хокинга он регулярен на обоих горизонтах. На пространственной бесконечности тензор энергии-импульса в состоянии Унру соответствует потоку частиц, испущенных чёрной дырой, в то время как в состоянии Хартли-Хокинга он соответствует газу частиц с температурой Хокинга, окружающему чёрную дыру. По причине всего вышесказанного, принято считать, что состояние Унру описывает чёрную дыру, образовавшуюся в результате коллапса (так как для таких чёрных дыр нет прошлого горизонта), а состояние Хартли-Хокинга описывает чёрную дыру, окружённую газом частиц с температурой Хокинга.

Возникает вопрос: как описать чёрную дыру, помещенную в газ с температурой, отличной от температуры Хокинга? Естественно предположить, что такая физическая ситуация описывается аналогом состояния Хартли-Хокинга с произвольными температурами леводвижущихся (падающих на чёрную дыру) и праводвижущихся (испускаемых чёрной дырой) частиц. В секции 3 будут исследованы свойства пропагатора и тензора-энергии импульса в состоянии с произвольными температурами леводвижущихся и праводвижущихся частиц для массивного скалярного поля в двух и четырех измерениях на фоне чёрных дыр Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрёма. Будет показано, что пропагаторы в таком состоянии приобретают аномальную расходимость, т.е. коэффициент перед расходимостью при светоподобном разделении точек везде кроме горизонта имеет стандартный вид, в то время как на горизонте коэффициент перед расходимостью становится явно зависящим от температуры состояния. Помимо этого, расходимость появляется и у тензора-энергии импульса в свободно падающей системе отсчета на горизонте при неканоническом выборе температуры состояния.

2 Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени

В данном разделе рассматривается теория скалярного поля

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \xi R \phi^2 - \mu^2 \phi^2 \right].$$

Везде кроме секции 2.4 с вычислением тензора энергии-импульса на фоне чёрной дыры Шварцшильда будет рассматриваться минимальная связь, т.е. $\xi = 0$. В первом подразделе для упрощения формул будет рассмотрена двумерная ($d = 2$) ситуация. Далее для определения состояний Бульвара, Унру и Хартли-Хокинга рассматривается четырехмерная безмассовая теория.

2.1 Определения мод

Уравнение движения записывается как

$$(\square + \mu^2)\phi = 0. \quad (1)$$

Пусть u_i - полный набор мод, решающих это уравнение. Нормировка производится с помощью скалярного произведения [7]:

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &\equiv -i \int_\Sigma u_i^* \overleftrightarrow{f}^\mu u_j d\Sigma_\mu = \delta_{ij}, \\ \langle u_i^*, u_j \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Σ - произвольная поверхность Коши. Здесь оператор $\overleftrightarrow{f}^\mu$ введен следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_\Omega [\psi_1^* (\square \psi_2) - (\square \psi_1)^* \psi_2] d^4x &= \int_{\partial\Omega} \psi_1^* \overleftrightarrow{f}^\mu \psi_2 d\Sigma_\mu, \\ \overleftrightarrow{f}^\mu &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_{x^\nu} - \overleftarrow{\partial}_{x^\nu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3)$$

где Ω — компактная область с гладкой границей $\partial\Omega$, ψ_1 и ψ_2 — любые гладкие функции в открытой области, содержащей Ω .

Разложение оператора поля по модам:

$$\phi = \sum_i [a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*], \quad (4)$$

где a_i и a_i^\dagger удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (5)$$

С помощью них строится фоксовское пространство и вакуумное состояние как

$$a_i |\text{vac}\rangle = 0, \quad \forall i. \quad (6)$$

Теперь, вообще говоря, нужно удостовериться, что возбужденные состояния имеют большую энергию, чем вакуумное. В статических пространствах (где существует времениподобный

вектор Киллинга) это можно сделать с помощью следующей процедуры. Пусть K^μ - времениподобный вектор Киллинга. Ему соответствует сохраняющийся заряд

$$K \equiv - \int_{\Sigma} K_{\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu}. \quad (7)$$

Коммутационные соотношения этого заряда с оператором поля:

$$[\phi, K] = iL_K \phi, \quad (8)$$

где L_K - производная Ли по направлению вектора K^μ . Тогда положительно-частотные моды можно определить как

$$L_K u_i = -i\omega_i u_i, \quad L_K u_i^* = i\omega_i u_i^*, \quad \omega_i > 0. \quad (9)$$

После нормального упорядочения тензора энергии-импульса, можно определить энергию

$$E = - \int_{\Sigma} K_{\mu} : T^{\mu\nu} : d\Sigma_{\nu}. \quad (10)$$

Вакуумное состояние тогда будет началом отсчета энергии

$$E|\text{vac}\rangle = 0, \quad (11)$$

в то время как операторы a_i и a_i^\dagger будут операторами рождения и уничтожения:

$$[a_i, E] = \omega_i a_i. \quad (12)$$

2.2 Определение и свойства пропагатора

В данной секции рассмотрим квантование безмассового поля на фоне двумерного плоского пространства. Здесь на простом примере будут показаны некоторые свойства пропагатора, которые будут также верны в случае более сложных фоновых пространств.

Уравнение движения на плоском фоне выглядит как

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t, x) = 0, \quad (13)$$

и оно имеет решением плоские волны

$$u_{\omega}(t, x) = \frac{1}{4\pi|\omega|} e^{-i|\omega|t + i\omega x}. \quad (14)$$

Разложение оператора поля по модам:

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[a_{\omega} u_{\omega}(t, x) + a_{\omega}^{\dagger} u_{\omega}^*(t, x) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi|\omega|} \left[a_{\omega} e^{-i|\omega|t + i\omega x} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i|\omega|t - i\omega x} \right]. \quad (15)$$

Так как здесь ω пробегает все значения $(-\infty; +\infty)$, то можно увидеть, что в (15) a_{ω}^{\dagger} и a_{ω} являются операторами рождения и уничтожения как левобегущих, так и правобегущих волн. Их можно разделить, поменяв пределы интегрирования с $(-\infty; +\infty)$ до $(0; +\infty)$:

$$\phi(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi|\omega|} \left[a_{\omega} e^{-i|\omega|t + i\omega x} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i|\omega|t - i\omega x} + a_{-\omega} e^{-i|\omega|t - i\omega x} + a_{-\omega}^{\dagger} e^{i|\omega|t + i\omega x} \right]. \quad (16)$$

Введя обозначение

$$a_{-\omega} = b_{\omega}, \quad a_{-\omega}^{\dagger} = b_{\omega}^{\dagger}, \quad (17)$$

получаем

$$\phi(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi|\omega|} \left[a_{\omega} e^{-i|\omega|t+i\omega x} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i|\omega|t-i\omega x} + b_{\omega} e^{-i|\omega|t-i\omega x} + b_{\omega}^{\dagger} e^{i|\omega|t+i\omega x} \right], \quad (18)$$

где $(a_{\omega}^{\dagger}, a_{\omega})$ и $(b_{\omega}^{\dagger}, b_{\omega})$ – операторы рождения и уничтожения левобегущих и правобегущих мод соответственно.

Пропагатор (функция Вайтмана)¹ определяется как

$$G(t, x|t', x') \equiv \langle \phi(t, x)\phi(t', x') \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{dp}{4\pi|p|} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{4\pi|q|} \left(\langle a_p a_q^{\dagger} \rangle e^{-i|p|t+ipx} e^{i|q|t'-iqx'} + \langle a_p^{\dagger} a_q \rangle e^{i|p|t-ipx} e^{-i|q|t'+iqx'} + \langle b_p b_q^{\dagger} \rangle e^{-i|p|t-ipx} e^{i|q|t'+iqx'} + \langle b_p^{\dagger} b_q \rangle e^{i|p|t+ipx} e^{-i|q|t'-iqx'} \right), \quad (19)$$

где в последнем равенстве мы подставили разложение оператора поля по модам и предположили, что состояние, по которому ведется усреднение, не содержит аномальных квантовых средних, т.е. $\langle a_p a_q \rangle = \langle a_p^{\dagger} a_q^{\dagger} \rangle = \langle b_p b_q \rangle = \langle b_p^{\dagger} b_q^{\dagger} \rangle = 0$. Далее в секции 3 будут рассматриваться состояния, в которых частицы распределены термально, но температуры левобегущих и правобегущих частиц являются произвольными и не равными друг другу в общем случае, т.е. в котором

$$\langle a_p^{\dagger} a_q \rangle = \frac{\delta(p-q)}{e^{\beta_R|p|} - 1}, \quad \langle b_p^{\dagger} b_q \rangle = \frac{\delta(p-q)}{e^{\beta_L|p|} - 1}. \quad (20)$$

Для такого состояния пропагатор переписывается в виде

$$\begin{aligned} G(t, x|t', x') &= \int_0^{+\infty} \frac{dp}{4\pi|p|} \left(\frac{e^{-i|p|(t-t')+ip(x-x')}}{1 - e^{-\beta_R|p|}} + \frac{e^{i|p|(t-t')-ip(x-x')}}{e^{\beta_R|p|} - 1} + \frac{e^{-i|p|(t-t')-ip(x-x')}}{1 - e^{-\beta_L|p|}} + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{i|p|(t-t')+ip(x-x')}}{e^{\beta_L|p|} - 1} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{dp}{4\pi|p|} \left(\frac{e^{i|p|(t-t')-ip(x-x')}}{e^{\beta_R|p|} - 1} + \frac{e^{i|p|(t-t')+ip(x-x')}}{e^{\beta_L|p|} - 1} \right) + \\ &+ \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{4\pi|p|} \left(\frac{e^{-i|p|(t-t')-ip(x-x')}}{1 - e^{-\beta_R|p|}} + \frac{e^{-i|p|(t-t')+ip(x-x')}}{1 - e^{-\beta_L|p|}} \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{4\pi p} \left(\frac{e^{ip(t-t')-ip(x-x')}}{e^{\beta_R p} - 1} + \frac{e^{ip(t-t')+ip(x-x')}}{e^{\beta_L p} - 1} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Следует отметить, что данное выражение для пропагатора получается также если в определении мод везде опустить знаки модуля. Более того, это утверждение работает и в других пространствах, поэтому везде далее мы будем опускать знаки модуля в нормировке мод и во временных экспонентах, т.к. это позволит сократить запись пропагатора через моды.

2.3 Состояния на фоне чёрной дыры Шварцшильда

Рассмотрим теперь конкретный пример – безмассовое поле на фоне четырехмерной чёрной дыры Шварцшильда с метрикой

$$ds^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2M/r} - r^2(d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (22)$$

¹Из функции Вайтмана можно построить любой другой пропагатор: фейнмановский, запаздывающий/опережающий и пропагатор Келдыша

диаграмма Пенроуза которой изображена на Рис. 1. В дальнейшем будет удобно ввести черепашью координату

$$\begin{aligned} r_* &= r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), & r &= 2M \left[1 + \mathcal{W}(e^{\frac{r_*}{2M}-1}) \right], \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r(r_*)} \right) \left[dt^2 - (dr_*)^2 \right] - r^2(r_*) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathcal{W}(x)$ – функция Ламберта.

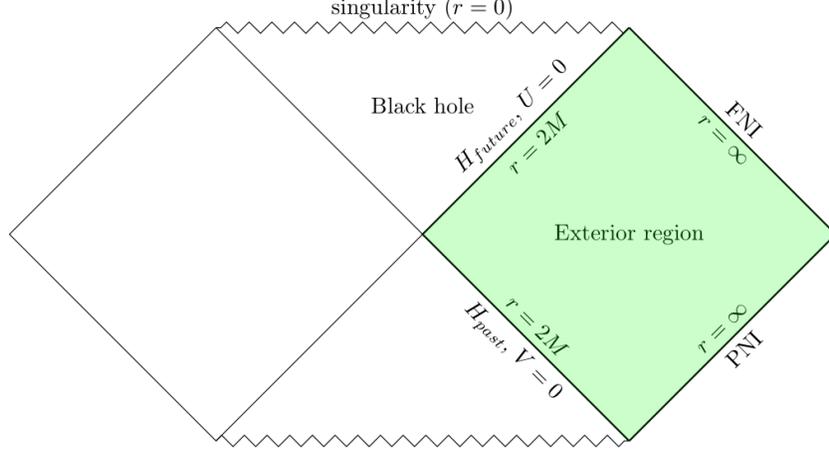


Рис. 1: Диаграмма Пенроуза для чёрной дыры Шварцшильда.

Далее мы интересуемся решениями безмассового уравнения Клейна-Гордона в такой геометрии. Для построения мод в состоянии Бульвара, потребуем положительно определенность мод по отношению к вектору Киллинга $\eta = \frac{\partial}{\partial t}$ (в левом патче $\eta = -\frac{\partial}{\partial t}$). Обозначая $x = (t, r, \theta, \varphi)$, для решения $u_{\omega lm}(x)$ переменные разделяются следующим образом:

$$u_{\omega lm}(x) = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} r^{-1} R_l(\omega|r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (24)$$

Тогда уравнение на радиальную функцию

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - V_l(r) \right] R(r) &= 0, \\ V_l(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) = \frac{\mathcal{W}(e^{\frac{r_*}{2M}-1})}{1 + \mathcal{W}(e^{\frac{r_*}{2M}-1})} \frac{1}{(2M)^2} \left[l(l+1) + \frac{1}{1 + \mathcal{W}(e^{\frac{r_*}{2M}-1})} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Для радиальной функции эффективно получаем уравнение Шрёдингера в потенциале, поведение которого приведено на Рис. 2.

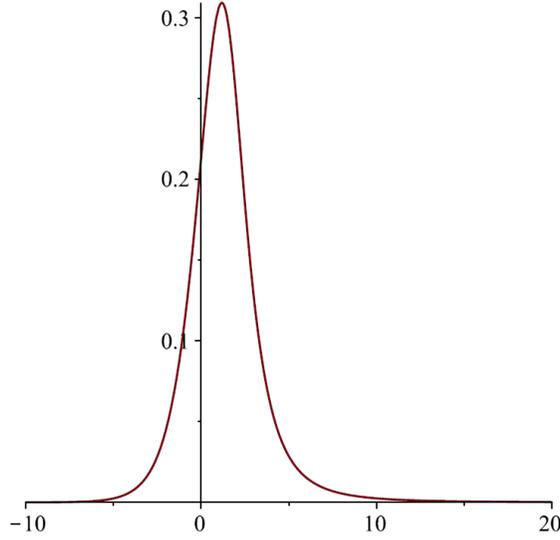


Рис. 2: График зависимости $V_l \times (2M)^2$ от $\frac{r_*}{2M}$ при $l = 0$. При других значениях l график качественно имеет аналогичное поведение. Горизонт чёрной дыры соответствует пределу $r_* \rightarrow -\infty$, а пространственная бесконечность получается в пределе $r_* \rightarrow +\infty$.

Решения в данном потенциале задаются модами, испущенными чёрной дырой и падающими на неё. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\vec{u}_{\omega lm}(x) &= (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} r^{-1} \vec{R}_l(\omega|r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) &= (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} r^{-1} \overleftarrow{R}_l(\omega|r) Y_{lm}(\theta, \varphi),\end{aligned}\quad (26)$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ это стандартные сферические гармоники, а $\vec{R}_l(\omega|r)$ и $\overleftarrow{R}_l(\omega|r)$ — решения радиального уравнения, соответствующие исходящим и падающим в чёрную дыру модам [9]. Они имеют асимптотическое поведение

$$\vec{R}_l(\omega|r) = \begin{cases} e^{i\omega r_*} + \vec{A}_l(\omega) e^{-i\omega r_*}, & r \rightarrow 2M \\ B_l(\omega) e^{i\omega r_*}, & r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

и

$$\overleftarrow{R}_l(\omega|r) = \begin{cases} B_l(\omega) e^{-i\omega r_*}, & r \rightarrow 2M \\ e^{-i\omega r_*} + \overleftarrow{A}_l(\omega) e^{i\omega r_*}, & r \rightarrow \infty. \end{cases}\quad (27)$$

С учетом этого, разложение оператора поля по модам записывается в виде

$$\phi(x) = \sum_{lm} \int_0^{+\infty} d\omega \left(a_{\omega lm} \vec{u}_{\omega lm}(x) + a_{\omega lm}^\dagger \vec{u}_{\omega lm}^*(x) + b_{\omega lm} \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) + b_{\omega lm}^\dagger \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x) \right), \quad (28)$$

где $\{a_{\omega lm}^\dagger, a_{\omega lm}\}$ и $\{b_{\omega lm}^\dagger, b_{\omega lm}\}$ — операторы рождения и уничтожения для испущенных и поглощенных мод соответственно.

Состояние Бульвара определено как $a_{\omega lm}|B\rangle = b_{\omega lm}|B\rangle = 0$. Вычислим в таком состоянии

функцию Вайтмана:

$$\begin{aligned}
G_B(x, x') &\equiv \langle B | \phi(x) \phi(x') | B \rangle \\
&= \left\langle B \left| \sum_{lm} \sum_{pn} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} d\omega d\omega' \left(a_{\omega lm} \vec{u}_{\omega lm}(x) + a_{\omega lm}^\dagger \vec{u}_{\omega lm}^*(x) + b_{\omega lm} \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) + b_{\omega lm}^\dagger \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left(a_{\omega' pn} \vec{u}_{\omega' pn}(x') + a_{\omega' pn}^\dagger \vec{u}_{\omega' pn}^*(x') + b_{\omega' pn} \overleftarrow{u}_{\omega' pn}(x') + b_{\omega' pn}^\dagger \overleftarrow{u}_{\omega' pn}^*(x') \right) \right| B \rangle \\
&= \sum_{lm} \int_0^{+\infty} d\omega \left(\vec{u}_{\omega lm}(x) \vec{u}_{\omega lm}^*(x') + \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x') \right) \\
&= \sum_{lm} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} e^{-i\omega(t-t')} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\vec{R}_l(\omega|r) \vec{R}_l^*(\omega|r') + \overleftarrow{R}_l(\omega|r) \overleftarrow{R}_l^*(\omega|r') \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Далее, для того, чтобы определить другие состояния, воспользуемся трюком, введенным Унру [4]. Для начала распишем метрику (22) в терминах координат Крускала:

$$ds^2 = -2M \frac{e^{-r/2M}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}
U &= -4M e^{-u/4M}, & V &= 4M e^{v/4M}, \\
u &= t - r - 2M \log(r/2M - 1), \\
v &= t + r + 2M \log(r/2M - 1). \quad (31)
\end{aligned}$$

Здесь следует помнить о том, что эти выражения для (U, V) через (t, r) применимы только в правом квадранте Шварцшильда (область, выделенная зеленым цветом на Рис. 1), в то время как в левом квадранте Шварцшильда (U, V) выражаются (u, v) как

$$U = 4M e^{-u/4M}, \quad V = -4M e^{v/4M}. \quad (32)$$

На прошлом горизонте событий (обозначенном как H_{past} на Рис. 1) $\zeta = \frac{\partial}{\partial U}$ является вектором Киллинга. Следовательно, можно потребовать положительную-частотность мод по отношению к ζ для мод, испущенных чёрной дырой, в то время как для падающих на черную дыру определять положительную-частотность по отношению к вектору Киллинга η . Так заданное состояние называется состоянием Унру. На прошлом горизонте для испускаемых мод имеем:

$$\vec{y}_{\omega lm} \sim e^{-i\omega U}. \quad (33)$$

Эти моды являются аналитическими функциями комплексной переменной U на вещественной оси и на нижней полуплоскости. Более того, любая линейная комбинация положительно-частотных мод имеет такие же свойства аналитичности. В то же время отрицательно-частотные моды оказываются аналитическими уже на верхней полуплоскости. В итоге, если рассматривается другое вакуумное состояние (которое должно содержать в себе и положительные и отрицательные частоты старого вакуумного состояния), то аналитические свойства меняются. Обратно, если моды имеют одинаковые аналитические свойства, значит они задают одно и то же вакуумное состояние.

Моды (26), расписанные в терминах крускаловских координат, на прошлом горизонте в правом патче ведут себя как:

$$\vec{u}_{\omega lm}^R(x) \approx (4\pi\omega)^{-1/2} \left| \frac{U}{4M} \right|^{i4M\omega} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (34)$$

в то время как на будущем горизонте в левом патче как:

$$\vec{u}_{\omega lm}^L(x) \approx (4\pi\omega)^{-1/2} \left| \frac{U}{4M} \right|^{-i4M\omega} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (35)$$

Тогда, нормированные моды

$$\vec{y}_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(4\pi M\omega)}} \left[e^{2\pi M\omega} \vec{u}_{\omega lm}^R + e^{-2\pi M\omega} (\vec{u}_{\omega lm}^L)^* \right], \quad (36)$$

являются аналитическими на вещественной оси и в нижней комплексной полуплоскости переменной U при выборе разреза логарифма проходящим по положительной чисто мнимой оси, так что $\log(-1) = -i\pi$. Здесь индексы R и L указывают на то, что эти функции не равны нулю только в правом или левом квадранте Шварцшильда соответственно. При аналитическом продолжении мод с левого на правый квадрант между модами появляется относительный множитель $(-1)^{i4M\omega} = e^{4\pi M\omega}$, что отражено в последнем уравнении.

Используя этот базис мод (т.е. когда испускаемые моды равны $\vec{y}_{\omega lm}$, а падающие равны $\overleftarrow{u}_{\omega lm}$), можно вычислить функцию Вайтмана в состоянии Унру когда две точки находятся в правом квадранте:

$$\begin{aligned} G_U(x, x') &= \langle U | \phi(x) \phi(x') | U \rangle = \left\langle U \left| \sum_{lm} \sum_{pn} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \phi_{\omega lm}(x) \phi_{\omega' pn}(x') \right| U \right\rangle = \\ &= \left\langle U \left| \sum_{lm} \sum_{pn} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \left(b_{\omega lm} \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) + b_{\omega lm}^\dagger \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x) + a_{\omega lm} \vec{y}_{\omega lm} + a_{\omega lm}^\dagger \vec{y}_{\omega lm}^* \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left(b_{\omega' pn} \overleftarrow{u}_{\omega' pn}(x') + b_{\omega' pn}^\dagger \overleftarrow{u}_{\omega' pn}^*(x') + a_{\omega' pn} \vec{y}_{\omega' pn} + a_{\omega' pn}^\dagger \vec{y}_{\omega' pn}^* \right) \right| U \right\rangle = \\ &= \sum_{lm} \sum_{pn} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \delta_{\omega\omega'} \delta_{lp} \delta_{mn} \left[\overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) \overleftarrow{u}_{\omega' pn}^*(x') \theta(\omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2sh(4\pi M\omega)} \left(e^{2\pi M\omega} \vec{u}_{\omega lm}^R + e^{-2\pi M\omega} (\vec{u}_{\omega lm}^L)^* \right) \left(e^{2\pi M\omega'} (\vec{u}_{\omega' pn}^R)^* + e^{-2\pi M\omega'} \vec{u}_{\omega' pn}^L \right) \right] = \\ &= \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x') \theta(\omega) + \frac{e^{4\pi M\omega}}{2 \sinh(4\pi M\omega)} \vec{u}_{\omega lm}(x) \vec{u}_{\omega lm}^*(x') \right) = \\ &= \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\frac{\vec{u}_{\omega lm}(x) \vec{u}_{\omega lm}^*(x')}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} + \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x) \overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x') \theta(\omega) \right], \quad (37) \end{aligned}$$

где $\kappa = (4M)^{-1}$ – поверхностная гравитация на горизонте чёрной дыры.

Аналогично можно определить состояние Хартли-Хокинга, потребовав от испускаемых мод положительной-частотности относительно вектора Киллинга ζ , а на будущем горизонте H_{future} потребовав от падающих мод положительную-частотность относительно вектора Киллинга $\chi = \frac{\partial}{\partial V}$. Моды (26) на будущем горизонте правого квадранта записываются в терминах крускаловских координат как:

$$\overleftarrow{u}_{\omega lm}^R(x) \approx (4\pi\omega)^{-1/2} \left| \frac{V}{4M} \right|^{-i4M\omega} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (38)$$

в то время как в левом квадранте:

$$\overleftarrow{u}_{\omega lm}^L(x) \approx (4\pi\omega)^{-1/2} \left| \frac{V}{4M} \right|^{i4M\omega} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (39)$$

Тогда, соответствующие положительно-определенные моды:

$$\overleftarrow{y}_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(4\pi M\omega)}} \left[e^{-2\pi M\omega} (\overleftarrow{u}_{\omega lm}^R)^* + e^{2\pi M\omega} \overleftarrow{u}_{\omega lm}^L \right]. \quad (40)$$

Используя это, вычислим функцию Вайтмана в состоянии Хартли-Хокинга когда две точки находятся в правом квадранте:

$$\begin{aligned} G_H(x, x') &= \langle H | \phi(x) \phi(x') | H \rangle = \left\langle H \left| \sum_{lm} \sum_{pn} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \phi_{\omega lm}(x) \phi_{\omega' pn}(x') \right| H \right\rangle = \\ &= \left\langle H \left| \sum_{lm} \sum_{pn} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \left[b_{\omega lm} \overleftarrow{y}_{\omega lm}(x) + b_{\omega lm}^\dagger \overleftarrow{y}_{\omega lm}^*(x) + a_{\omega lm} \overrightarrow{y}_{\omega lm}(x) + a_{\omega lm}^\dagger \overrightarrow{y}_{\omega lm}^*(x) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left[b_{\omega' pn} \overleftarrow{y}_{\omega' pn}(x') + b_{\omega' pn}^\dagger \overleftarrow{y}_{\omega' pn}^*(x') + a_{\omega' pn} \overrightarrow{y}_{\omega' pn}(x') + a_{\omega' pn}^\dagger \overrightarrow{y}_{\omega' pn}^*(x') \right] \right| H \right\rangle = \\ &= \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left[\frac{\overrightarrow{u}_{\omega lm}(x) \overrightarrow{u}_{\omega lm}^*(x')}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} + \frac{\overleftarrow{u}_{\omega lm}^*(x) \overleftarrow{u}_{\omega lm}(x')}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \right]. \quad (41) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что состояния Унру и Хартли-Хокинга содержат в себе равновесные (планковские) распределения частиц с температурой Хокинга $T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}$. Более конкретно, состояния Унру и Хартли-Хокинга могут быть получены с помощью подстановки разложения оператора поля по модам (28) в определение пропагатора и усреднив по состоянию, в котором

$$\begin{aligned} \text{Унру :} & \quad \langle a_{\omega lm}^\dagger a_{\omega' l' m'} \rangle = 0, & \langle b_{\omega lm}^\dagger b_{\omega' l' m'} \rangle &= \frac{\delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}, \\ \text{Хартли-Хокинг :} & \quad \langle a_{\omega lm}^\dagger a_{\omega' l' m'} \rangle = \frac{\delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}, & \langle b_{\omega lm}^\dagger b_{\omega' l' m'} \rangle &= \frac{\delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}. \end{aligned} \quad (42)$$

2.4 Тензор энергии-импульса на фоне чёрной дыры Шварцшильда

В этом разделе мы вычислим регуляризованный тензор энергии-импульса около горизонта чёрной дыры и на пространственной бесконечности. Регуляризация будет проведена с помощью метода раздвижки точек по геодезической. Для того, чтобы использовать этот метод, нужно вычислить геодезический интервал (мировая функция Синга [29]) между двумя близкими точками $x = (t, r, \theta, \varphi)$ и $x' = (t + \epsilon, r, \theta, \varphi)$:

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_0) \int_{\gamma} g_{\mu\nu}(z) \frac{dz^\mu}{d\lambda} \frac{dz^\nu}{d\lambda} d\lambda, \quad (43)$$

где λ – аффинный параметр вдоль геодезической γ между точками x и x' , λ_0 и λ_1 – начальное и конечное значение этого параметра на геодезической γ , а z – координатное представление γ , т.е. оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2 z^\mu}{d\lambda^2} \equiv \frac{d^2 z^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dz^\alpha}{d\lambda} \frac{dz^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (44)$$

Интеграл (43) инвариантен относительно репараметризаций аффинного параметра геодезической γ , что позволяет для удобства зафиксировать λ таким образом, что начальная точка геодезической соответствует $\lambda_0 = 0$, в то время как конечная – $\lambda_1 = 1$. Тогда имеем для геодезической $z(0) = x$ и $z(1) = x'$. Так как параметр ϵ считается малым, можно воспользоваться методом последовательных приближений и записать геодезическую как

$$z^\mu = \bar{z}^\mu + \delta z^\mu, \quad (45)$$

где $\bar{z}^\mu = x^\mu + \lambda(x'^\mu - x^\mu)$ соответствует прямой линии, соединяющей две точки. Тогда геодезический интервал можно разложить в виде:

$$\sigma(x, x') = \int_0^1 d\lambda \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(\bar{z})(x - x')^\mu (x - x')^\nu - \delta z^\mu g_{\mu\nu}(\bar{z}) \frac{D^2 \bar{z}^\nu}{d\lambda^2} + O((\delta z)^2) \right], \quad (46)$$

$$\sigma(x, x')^{(1)} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x - x')^\mu (x - x')^\nu \int_0^1 d\lambda = -\frac{1}{2} \epsilon^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (47)$$

$$\sigma(x, x')^{(2)} = - \int_0^1 d\lambda \delta z^\mu g_{\mu\nu}(\bar{z}) \frac{D^2 \bar{z}^\nu}{d\lambda^2} = - \int_0^1 d\lambda \delta z^1 g_{11} \Gamma_{00}^1 \epsilon^2 = - \int_0^1 d\lambda \delta z^1 \frac{M}{r^2} \epsilon^2. \quad (48)$$

Переписывая уравнение (44) в терминах δz , можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta z^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dz^0}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dz^1}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dz^2}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dz^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \delta z^2}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dz^1}{d\lambda} \frac{dz^2}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \left(\frac{dz^3}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \delta z^3}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dz^1}{d\lambda} \frac{dz^3}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dz^2}{d\lambda} \frac{dz^3}{d\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставив в эту систему $\delta z^2 = \delta z^3 = 0$, получаем

$$\frac{d^2 \delta z^1}{d\lambda^2} - \frac{M}{r(r-2M)} \left(\frac{d\delta z^1}{d\lambda} \right)^2 = -\frac{M}{r^3} (r-2M) \epsilon^2. \quad (50)$$

Решение этого уравнения выглядит как

$$\delta z^1 = c_2 - \frac{1}{M} r(r-2M) \log \cosh \left(\frac{M}{r^2} \epsilon (c_1 + \lambda) \right), \quad (51)$$

и после наложения граничных условий $z(0) = x$ и $z(1) = x'$ оно сводится к

$$\delta z^1 = \frac{r(r-2M)}{M} \log \frac{\cosh(M\epsilon/2r^2)}{\cosh(M\epsilon/r^2(\lambda - \frac{1}{2}))} \simeq \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \epsilon^2 \left(-\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{8} \right), \quad (52)$$

$$\sigma(x, x')^{(2)} = -\frac{M^2}{24r^4} (1 - 2M/r) \epsilon^4, \quad (53)$$

$$\sigma(x, x') = \sigma^{(1)}(x, x') + \sigma^{(2)}(x, x') = -\frac{\epsilon^2}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{M^2 \epsilon^2}{12r^4} \right), \quad (54)$$

$$\frac{1}{2\sigma} \equiv \frac{1}{L^2} \approx -\frac{1}{\epsilon^2(1-2M/r)} + \frac{M^2}{12r^4(1-2M/r)}. \quad (55)$$

Вычислим тензор энергии-импульса в случае конформного поля, т.е. когда $\xi = \frac{1}{6}$. В этом случае среднее от тензора энергии-импульса записывается в виде

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{3} \langle \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} \rangle - \frac{1}{6} g^{\mu\nu} \langle \phi_{;\sigma} \phi^{;\sigma} \rangle - \frac{1}{3} \langle \phi^{;\mu\nu} \phi \rangle. \quad (56)$$

Подставляя сюда разложение оператора поля по модам (28) и вводя обозначение

$$T_{\mu\nu}[u, u^*] = \frac{2}{3} u_{;\mu} u^*_{;\nu} - \frac{1}{3} u_{;\mu\nu} u^* - \frac{1}{6} g_{\mu\nu} u_{;\alpha} u^{*\alpha}, \quad (57)$$

можно убедиться, что верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle B|T_{\mu\nu}|B \rangle &= \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega \left\{ T_{\mu\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}[\check{u}, \check{u}^*] \right\}, \\ \langle U|T_{\mu\nu}|U \rangle &= \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega \left\{ \coth(\pi\omega/\kappa) T_{\mu\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}[\check{u}, \check{u}^*] \right\}, \\ \langle H|T_{\mu\nu}|H \rangle &= \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega \coth(\pi\omega/\kappa) \left\{ T_{\mu\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}[\check{u}, \check{u}^*] \right\}. \end{aligned} \quad (58)$$

Как было показано Кристенсенем в [10], тензор энергии-импульса для безмассового конформного скалярного поля на фоне Шварцшильда имеет следующий вид:

$$\langle B|T^{\mu\nu}|B \rangle = \frac{1}{2\pi^2(\sigma^\alpha \sigma_\alpha)^2} \left[g^{\mu\nu} - 4 \frac{\sigma^\mu \sigma^\nu}{(\sigma^\rho \sigma_\rho)} \right], \quad (59)$$

где $\sigma^\mu \equiv \sigma^{;\mu}$. Так как $2\sigma = g_{\mu\nu} \sigma^\mu \sigma^\nu$ (что следует из свойств геодезических [8]), то из (54) следует, что

$$\sigma^\mu = \left(\epsilon \sqrt{1 + \frac{M^2 \epsilon^2}{12r^4}}, 0, 0, 0 \right). \quad (60)$$

Тогда, для компонент тензора энергии-импульса имеем:

$$\begin{aligned} \langle B|T_0^0|B \rangle &= \langle B|T^{00} g_{00}|B \rangle = (-3) \frac{1}{2\pi^2 \epsilon^4 (1 - 2M/r)^2}, \\ \langle B|T_i^i|B \rangle &= \langle B|T^{ii} g_{ii}|B \rangle = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon^4 (1 - 2M/r)^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Тогда получаем что

$$\langle B|T_\nu^\mu|B \rangle = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon^4 (1 - 2M/r)^2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Так как при раздвижке временных координат на величину ϵ в первом уравнении в (58) под интегралом появляется множитель $e^{-i\omega\epsilon}$, то отсюда следует, что

$$\sum_{lm} \left\{ T_{\mu\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}[\check{u}, \check{u}^*] \right\} = \frac{\omega^3}{12\pi^2} \frac{1}{(1 - 2M/r)^2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\int_0^\infty d\omega e^{-i\omega\epsilon} \frac{\omega^3}{12\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\epsilon^4}. \quad (64)$$

С другой стороны, из регулярности ТЭИ на горизонте в состоянии Хартли-Хокинга [9] следует, что можно написать

$$\langle B|T_\mu^\nu|B\rangle_{ren} \underset{r \rightarrow 2M}{\sim} \langle B|T_\mu^\nu|B\rangle_{ren} - \langle H|T_\mu^\nu|H\rangle_{ren} = \langle B|T_\mu^\nu|B\rangle - \langle H|T_\mu^\nu|H\rangle. \quad (65)$$

Подставляя сюда (58), получаем

$$\begin{aligned} \langle B|T_\mu^\nu|B\rangle_{ren} \underset{r \rightarrow 2M}{\sim} -2 \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \left\{ T_{\mu\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}[\overleftarrow{u}, \overleftarrow{u}^*] \right\} = \\ = -\frac{1}{2\pi^2(1 - 2M/r)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (66)$$

Аналогично, для состояния Унру имеем

$$\langle U|T_a^b|U\rangle_{ren} \underset{r \rightarrow 2M}{\sim} \langle U|T_a^b|U\rangle - \langle H|T_a^b|H\rangle = -2 \sum_{lm} \int_0^\infty \frac{d\omega}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} T_a^b[\overleftarrow{u}; \overleftarrow{u}^*], \quad (67)$$

где индексы a и b пробегает (t, r) . Подставляя сюда (57) и асимптотики мод (27), получаем

$$\begin{aligned} \langle U|T_a^b|U\rangle_{ren} &= \frac{L}{4\pi r^2} \begin{bmatrix} (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & -1 \\ (1 - \frac{2M}{r})^{-2} & -(1 - \frac{2M}{r})^{-1} \end{bmatrix}, \\ L &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega \sum_{l=0}^\infty (2l+1) |B_l(\omega)|^2}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}, \end{aligned} \quad (68)$$

где L – светимость чёрной дыры.

Теперь покажем, что ТЭИ в состоянии Бульвара расходится на обоих горизонтах в системе отсчета свободно падающего наблюдателя, в то время как в состоянии Унру он регулярен на будущем горизонте [25]. Система отсчета свободно падающего наблюдателя в окрестности горизонта совпадает с координатами Крускала (31) (т.к. $g_{00} \approx 1$). Исследуем регулярность на будущем горизонте H_{past} , расположенном при $U = 0$. Для этого перепишем компоненты ТЭИ в координатах Крускала в виде:

$$\begin{aligned} T_{UU} &= \frac{M^2}{U^2} T_{uu} = \frac{V^2 e^{-r/M}}{4(r-2M)^2} T_{uu}, \\ T_{UV} &= -\frac{(4M)^2}{UV} T_{uv} = \frac{2M e^{-r/2M}}{r-2M} T_{uv}, \\ T_{VV} &= \left(\frac{4M}{V}\right)^2 T_{vv}. \end{aligned} \quad (69)$$

Отсюда видно, что для регулярности ТЭИ на будущем горизонте нужно потребовать следующие условия

$$\begin{aligned} T_{vv} &< \infty, \\ (r-2M)^{-1} T_{uv} &< \infty, \\ (r-2M)^{-2} T_{uu} &< \infty. \end{aligned} \quad (70)$$

Чтобы проверить выполнение этих условий для полученных ТЭИ (66) и (68), перепишем компоненты ТЭИ в виде

$$\begin{aligned} T_{vv} &= \frac{1}{4} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) T_t^t + 2T_t^r + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) T_r^r \right], \\ T_{uv} &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (T_t^t + T_r^r), \\ T_{uu} &= \frac{1}{4} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) T_t^t - 2T_t^r + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) T_r^r \right]. \end{aligned} \quad (71)$$

Подставив эти выражения в условия (70), нетрудно увидеть, что в состоянии Бульвара тензор энергии-импульса расходится на будущем горизонте, в то время как в состоянии Унру он является регулярным.

Для проверки регулярности тензора энергии-импульса на прошлом горизонте H_{past} , расположенном при $V = 0$, перепишем тензор энергии-импульса в виде

$$\begin{aligned} T_{UU} &= \frac{M^2}{U^2} T_{uu}, \\ T_{UV} &= -\frac{(4M)^2}{UV} T_{uv} = \frac{2M e^{-r/2M}}{r - 2M} T_{uv}, \\ T_{VV} &= \frac{U^2 e^{-r/M}}{4(r - 2M)^2} T_{vv}, \end{aligned} \quad (72)$$

при этом условия регулярности на прошлом горизонте записываются как

$$\begin{aligned} (r - 2M)^{-2} T_{vv} &< \infty, \\ (r - 2M)^{-1} T_{uv} &< \infty, \\ T_{uu} &< \infty. \end{aligned} \quad (73)$$

Нетрудно увидеть, что условия (73) не выполняются как для состояния Бульвара, так и для состояния Унру. Отсюда делаем вывод, что тензор энергии-импульса в состоянии Бульвара расходится на обоих горизонтах, в то время как в состоянии Унру он регулярен на будущем горизонте.

Аналогично можем получить на пространственной бесконечности для состояния Хартли-Хокинга получаем

$$\langle H | T_\mu^\nu | H \rangle_{ren} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \langle H | T_\mu^\nu | H \rangle - \langle B | T_\mu^\nu | B \rangle \sim \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad (74)$$

в то время как для состояния Унру

$$\langle U | T_\mu^\nu | U \rangle_{ren} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \langle U | T_\mu^\nu | U \rangle - \langle B | T_\mu^\nu | B \rangle \sim \frac{L}{4\pi r^2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Здесь мы видим, что состояние Хартли-Хокинга соответствует тепловой бане радиации с температурой Хокинга, в то время как состояние Унру соответствует потоку частиц, излученных чёрной дырой.

3 Аномальные расходимости в состояниях с произвольными температурами

В данной секции будут рассмотрены обобщенные термальные состояния, т.е. состояния, в которых температуры левобегущих и правобегущих мод являются произвольными и в общем случае отличными друг от друга. В специальных случаях равенства этих температур нулю или канонической температуре горизонта получаются состояния Бульвара, Унру или Хартли-Хокинга, рассмотренные в предыдущем разделе. Для простоты сначала будет рассмотрен двумерный аналог чёрной дыры Шварцшильда [12], затем эти результаты будут обобщены на случай четырехмерных чёрных дыр Шварцшильда и Рейсснера-Нордстрёма [30].

3.1 Двумерная черная дыра Шварцшильда

В этой секции мы рассмотрим двумерный аналог чёрной дыры Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} = \left[1 - \frac{2M}{r(r^*)}\right] (dt^2 - dr^{*2}), \quad (76)$$

где черепашня координата, определенная как в (23), такова, что $r^* \approx r$ при $r \rightarrow +\infty$ и $r^* \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 2M$. Около горизонта эта метрика выглядит как риндлеровская:

$$ds_{\text{nh}}^2 \approx e^{\frac{r^*}{2M}} (dt^2 - dr^{*2}) \quad (77)$$

с ускорением $a = (4M)^{-1}$.

3.1.1 Моды и функция Вайтмана

В черепашных координатах уравнение Клейна-Гордона для массивного поля в такой геометрии записывается как

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_{r^*}^2 \varphi + \mu^2 g_{00} \varphi = 0, \quad (78)$$

где массивное слагаемое зануляется на горизонте, т.к. оно домножается на g_{00} . Разделяя переменные как $\varphi(t, r^*) = e^{-i\omega t} \varphi_\omega(r^*)$, получаем

$$-\partial_{r^*}^2 \varphi_\omega(r^*) + \mu^2 g_{00}(r^*) \varphi_\omega(r^*) = \omega^2 \varphi_\omega(r^*). \quad (79)$$

Когда $\omega \leq \mu$ моды экспоненциально затухают при больших r^* и оказываются локализованными у горизонта [19]. В этом случае нет двойного вырождения как в случае массивного поля в пространстве Риндлера. Уравнение на радиальную функцию в координатах r выглядит как:

$$\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2M}{r^2} \frac{d}{dr} + \frac{\omega^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \mu^2 \right] \varphi_\omega(r) = 0, \quad (80)$$

которое после замены переменных

$$\xi^2 = \frac{r}{2M} - 1 \quad (81)$$

около горизонта записывается как

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + (4M)^2 \left(\frac{\omega^2}{\xi^2} - \mu^2 \right) \right] \varphi_\omega(r) = 0. \quad (82)$$

Это уравнение имеет решение при $|\omega| < \mu$ в виде

$$\varphi_\omega(r^*) = C(\omega)K_{4i\omega M}(4M\mu\xi) \sim \cos(\omega r^* + \delta_\omega), \quad (83)$$

где

$$\delta_\omega = \frac{\pi}{2} + 2M\omega(2\log(2M\mu) - 1) - \arg\Gamma(1 + i2M\omega). \quad (84)$$

Классически разрешенная область находится слева от точки поворота, являющейся решением уравнения $\omega^2 - \mu^2 g_{00}(r_{\text{turning}}^*) = 0$. Около горизонта, где эффективный потенциал для радиальной функции зануляется, нормированные моды ведут себя приблизительно как

$$\varphi_\omega(r^*) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(\omega r^* + \delta_\omega), \quad \omega < \mu, \quad |\omega r^*| \gg 1. \quad (85)$$

Для дальнейшего анализа нам не потребуется точный вид этих мод. Они не распространяются на пространственную бесконечность и не дают вклада в излучение Хокинга [11, 19]. С другой стороны, они играют важную роль в окрестности горизонта для вычисления расходимости пропагатора и регуляризованного тензора энергии-импульса.

При $\omega > \mu$, как и в безмассовом случае, выделяем праводвижущиеся моды $R_\omega(r^*)$ и леводвижущиеся моды $L_\omega(r^*)$ которые могут быть выражены в терминах функций Гойна. Такое представление мод оказывается малополезным, поэтому будем использовать квазиклассическое приближение, которое в двух измерениях² оказывается применимым для всех значений r^* . Квазиклассические решения записываются в виде:

$$R_\omega(r^*) = A_\omega \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \mu^2 g_{00}(r^*)}} \exp\left(i \operatorname{sgn}(\omega) \int_{r_0}^{r^*} \sqrt{\omega^2 - \mu^2 g_{00}(x)} dx\right), \quad (86)$$

$$L_\omega(r^*) = B_\omega \sqrt[4]{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \mu^2 g_{00}(r^*)}} \exp\left(-i \operatorname{sgn}(\omega) \int_{r_0}^{r^*} \sqrt{\omega^2 - \mu^2 g_{00}(x)} dx\right), \quad (87)$$

где r_0 – произвольная точка.

В этом случае разложение оператора поля по модам выглядит как:

$$\hat{\varphi}(t, r^*) = \int_0^m \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \varphi_\omega(r^*) \hat{c}_\omega + \int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \left[R_\omega(r^*) \hat{a}_\omega + L_\omega(r^*) \hat{b}_\omega \right] + h.c. \quad (88)$$

где

$$[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad [\hat{c}_\omega, \hat{c}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega'), \quad (89)$$

²Для квазиклассического приближения имеем

$$k(x) = 2M\sqrt{(\omega)^2 - (\mu)^2 g_{00}(x)}, \quad \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{k(x)} \right| = \frac{1}{4M\mu} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\mu} - g_{00}(x)\right)^{3/2}} \frac{dg_{00}}{dx}.$$

Здесь $x = 2M/r^*$; $k(x)$ – волновой вектор в задаче (79); следующее неравенство справедливо при всех $\omega > \mu$:

$$\left| \frac{d}{dx} \frac{1}{k(x)} \right| < 1.$$

Следовательно, если $2M\mu \gg 1$, то квазиклассическое приближение применимо для всех значений r^* и в этом случае нет отражения от потенциального барьера в (79). Такое отражение оказывается неизбежным в четырех измерениях.

Я хотел бы поблагодарить Дмитрия Трунина за указание на это свойство в двух измерениях.

и где все остальные коммутаторы равны нулю. Можно показать, что в приближении $2Mt \gg 1$ канонические коммутационные соотношения оператора поля и сопряженного импульса накладывают нормировочные условия

$$|A_\omega|^2 = |B_\omega|^2 \approx \frac{1}{2\pi}. \quad (90)$$

Как и в случае пространства Риндлера (см. Приложение В), построим функцию Вайтмана, теперь уже зависящую от трех (обратных) температур β_0 , β_L и β_R следующим образом:

$$G((t_1, r_1^*), (t_2, r_2^*))_{\beta_0\beta_L\beta_R} = \int_{|\omega| < \mu} \frac{d\omega}{2\omega} \frac{e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{1 - e^{-\beta_0\omega}} \varphi_\omega(r_2^*) \varphi_\omega(r_1^*) + \int_{|\omega| > \mu} \frac{d\omega}{2\omega} \left[\frac{e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{1 - e^{-\beta_L\omega}} L_\omega(r_1^*) L_\omega^*(r_2^*) + \frac{e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{1 - e^{\beta_R\omega}} R_\omega(r_1^*) R_\omega^*(r_2^*) \right]. \quad (91)$$

Можно увидеть, что в безмассовом случае (когда нет бесщелевых возбуждений, локализованных около горизонта), данное выражение для пропагатора сводится к пропагаторам: в состоянии Бульвара при $\beta_{R,L} = \infty$, в состоянии Унру при $\beta_L = \infty$ и $\beta_R = 8\pi M$, в состоянии Хартли-Хокинга при $\beta_R = \beta_L = 8\pi M$.

3.1.2 Аномальная расходимость пропагатора на горизонте

Первое слагаемое в правой части выражения (91) имеет двойной полюс при $\omega = 0$. Аномальная расходимость является инфракрасным эффектом и лидирующий вклад дает слагаемое

$$\varphi_\omega(r_1^*) \varphi_\omega(r_2^*) \approx \frac{1}{\pi} \cos\left(\omega(r_1^* + r_2^*) + 2\delta_\omega\right) \quad (92)$$

в уравнении (91). Точки на горизонте получаются взятием предела:

$$r_1^* = \lambda, \quad r_2^* = \lambda + const, \quad t_1 = t_2 = -\lambda. \quad (93)$$

Будущий горизонт соответствует пределу $\lambda \rightarrow -\infty$; вычисляя вычет в двойном полюсе при $\omega = 0$, получаем следующее поведение функции Вайтмана при светоподобном разделении точек на горизонте:

$$G(t_1, r_1^* = \lambda | t_2, r_2^* = \lambda) = \frac{|\lambda|}{\beta_0}, \quad \text{as } \lambda \rightarrow -\infty. \quad (94)$$

Получаем результат, явно зависящий от температуры низкочастотных мод, т.е. ответ (94) не воспроизводит стандартный множитель $1/4\pi$. Аналогичная ситуация наблюдается в других пространствах с горизонтами [12].

3.1.3 Регуляризованный тензор-энергии импульса

В координатах светового конуса $V = t + r^*$, $U = t - r^*$ метрика (76) принимает вид

$$ds^2 = C(U, V) dU dV, \quad C(U, V) = \frac{\mathcal{W}(e^{\frac{V-U}{4M}} - 1)}{1 + \mathcal{W}(e^{\frac{V-U}{4M}} - 1)}. \quad (95)$$

Около горизонта, используя асимптотическое поведение мод, можно переписать пропагатор в виде

$$G((V^+, U^+), (V^-, U^-)) \approx \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{1}{e^{\beta_0\omega} - 1} \left(e^{i\omega(V^+ - U^-) + 2i\delta\omega} + e^{i\omega(V^+ - V^-)} + e^{i\omega(U^+ - U^-)} + e^{i\omega(U^+ - V^-) - 2i\delta\omega} \right) + \int_{|\omega| > \mu} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \left[\frac{e^{i\omega(V^+ - V^-)}}{e^{\beta_R\omega} - 1} + \frac{e^{i\omega(U^+ - U^-)}}{e^{\beta_L\omega} - 1} \right], \quad (96)$$

В пределе совпадающих точек можно получить

$$\partial_{U^+} \partial_{U^-} G \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(U^+ - U^-)^2} + \frac{\pi}{12\beta_0^2} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Li_2(e^{-\mu\beta_L})}{\beta_L^2} - \frac{Li_2(e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0^2} \right) + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0} - \frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_L})}{\beta_L} \right), \quad (97)$$

где $Li_2(x)$ – полилогарифмическая функция.

Тогда, для компонент тензора энергии-импульса получаем

$$T_{UU} \approx -\left[\frac{1}{4\pi\epsilon^2(t_\alpha t^\alpha)} + \frac{R}{24\pi} \right] \frac{t_U t_U}{t_\alpha t^\alpha} + \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{\beta_0^2} - \frac{1}{(8\pi M)^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Li_2(e^{-\mu\beta_L})}{\beta_L^2} - \frac{Li_2(e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0^2} \right) + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0} - \frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_L})}{\beta_L} \right). \\ T_{VV} \approx -\left[\frac{1}{4\pi\epsilon^2(t_\alpha t^\alpha)} + \frac{R}{24\pi} \right] \frac{t_V t_V}{t_\alpha t^\alpha} + \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{\beta_0^2} - \frac{1}{(8\pi M)^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Li_2(e^{-\mu\beta_R})}{\beta_R^2} - \frac{Li_2(e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0^2} \right) + \frac{\mu}{2\pi} \left(\frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_0})}{\beta_0} - \frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_R})}{\beta_R} \right). \quad (98)$$

Недиагональные компоненты в пределе горизонта стремятся к нулю на горизонте

$$T_{UV} \approx \frac{\mu^2}{4} e^{\lambda/4M} \frac{|\lambda|}{\beta_0} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (99)$$

Получаем, что около горизонта тензор энергии-импульса имеет ту же структуру, что и в [34, 35]:

$$T_{\mu\nu} \approx \Theta_{\mu\nu} + \frac{R}{48\pi} g_{\mu\nu}, \quad (100)$$

где

$$\Theta_{UU} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_U^2 C^{-1/2} + \frac{\pi}{12\beta_0^2} + L(\beta_L, \beta_0), \\ \Theta_{VV} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_V^2 C^{-1/2} + \frac{\pi}{12\beta_0^2} + L(\beta_R, \beta_0), \\ \Theta_{UV} = \Theta_{VU} = 0,$$

и

$$L(\beta_1, \beta_2) = \left(\frac{Li_2(e^{-\mu\beta_1})}{\beta_1^2} - \frac{Li_2(e^{-\mu\beta_2})}{\beta_2^2} \right) + \frac{m}{2\pi} \left(\frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_2})}{\beta_2} - \frac{\log(1 - e^{-\mu\beta_1})}{\beta_1} \right). \quad (101)$$

В ситуации, когда все три температуры $\beta_0, \beta_R, \beta_L$ совпадают, логарифмические и дилогарифмические поправки (101) равны нулю. Более того, тензор энергии-импульса зануляется на горизонте когда все три температуры равны температуре Хокинга $\beta = 8\pi M$.

3.2 Чёрная дыра Шварцшильда

В данной секции рассмотрим четырехмерную чёрную дыру Шварцшильда (22). Сначала будут определены моды и функция Вайтмана в случае массивного поля (безмассовый случай был рассмотрен в разделе 2.3). В секции 3.2.2 будет показано, что вне горизонта у функции Вайтмана при светоподобной раздвижке точек стандартная (каноническая) расходимость. Затем будет показано, что расходимость модифицируется на горизонте как для массивных, так и безмассовых полей. Результаты данной секции опубликованы в [30].

3.2.1 Моды и функция Вайтмана в массивном случае

После разделения переменных в виде $\phi = e^{-i\omega t} R(r) Y_{lm}(\Omega)$, для массивного поля уравнение на радиальную функцию выглядит как:

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l(r)] R = 0, \quad (102)$$

с потенциалом

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2\right), \quad (103)$$

который стремится к μ^2 в пределе $r^* \rightarrow \infty$. Аналогично двумерной ситуации в разделе 3.1 и как в [12], [11], [19], моды с $\omega^2 < \mu^2$ экспоненциально затухают в классически запрещенной области и оказываются локализованными около горизонта. Переписывая уравнение (102) в терминах координаты r , устремляя к горизонту и производя замену переменной $\xi^2 = \frac{r}{2M} - 1$, можно получить уравнение

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left[\frac{(4M\omega)^2}{\xi^2} - 4l(l+1) - (4M\mu)^2 \right] R = 0, \quad (104)$$

решения которого даются модифицированными функциями Бесселя. Учитывая условие экспоненциального затухания в классически запрещенной области, получаем

$$R \approx \sqrt{\frac{\omega \sinh(4\pi M\omega)}{\pi M}} K_{4iM\omega} \left(2\sqrt{(2M\mu)^2 + l^2 + l} \xi \right). \quad (105)$$

Тогда, моды, соответствующие бесщелевым возбуждениям около горизонта записываются в виде

$$\varphi_{\omega lm}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi|\omega|}} e^{-i|\omega|t} R_l(\omega|r) Y_{lm}(\Omega), \quad (106)$$

где радиальная часть дается уравнением (105), так что около горизонта можно написать

$$R_l(\omega|r) \approx \frac{1}{r} \cos(\omega r_* + \delta_{\omega l}), \quad (107)$$

$$\delta_{\omega l} \approx \frac{\pi}{2} + 2M\omega \log(4M^2\mu^2 + l^2 + l) - 2M\omega - \arg \Gamma(1 + 4iM\omega). \quad (108)$$

Моды с $\omega^2 > \mu^2$ аналогичны модам в безмассовом случае:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\omega lm}(x) &= (4\pi|\omega|)^{-1/2} e^{-i|\omega|t} r^{-1} \vec{F}_l(\omega|r) Y_{lm}(\Omega), \\ \overleftarrow{F}_{\omega lm}(x) &= (4\pi|\omega|)^{-1/2} e^{-i|\omega|t} r^{-1} \overleftarrow{F}_l(\omega|r) Y_{lm}(\Omega), \end{aligned} \quad (109)$$

где радиальная часть удовлетворяет граничным условиям:

$$\vec{F}_l(\omega|r) = \begin{cases} e^{i\omega r_*} + \overleftarrow{C}_\omega e^{-i\omega r_*}, & r \rightarrow 2M \\ \sqrt{\frac{\omega}{p}} D_\omega e^{ipr_*}, & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (110)$$

$$\overleftarrow{F}_l(\omega|r) = \begin{cases} D_\omega e^{-i\omega r_*}, & r \rightarrow 2M \\ \sqrt{\frac{\omega}{p}} [e^{-ipr_*} + \overleftarrow{C}_\omega e^{ipr_*}], & r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (111)$$

где $p = \text{sgn}(\omega) \cdot \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, $\omega^2 > \mu^2$.

Разложение оператора поля по модам выглядит как:

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \sum_{lm} \int_0^\mu d\omega (\alpha_{\omega lm} \varphi_{\omega lm} + \alpha_{\omega lm}^\dagger \varphi_{\omega lm}^*) + \\ & + \sum_{lm} \int_\mu^\infty d\omega (\beta_{\omega lm} \vec{F}_{\omega lm} + \beta_{\omega lm}^\dagger \vec{F}_{\omega lm}^* + \gamma_{\omega lm} \overleftarrow{F}_{\omega lm} + \gamma_{\omega lm}^\dagger \overleftarrow{F}_{\omega lm}^*), \end{aligned} \quad (112)$$

и функция Вайтмана имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G(x, x') = & \sum_{lm} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{e^{i\omega(t-t')} R_l^*(\omega|r) R_l(\omega|r')}{e^{\beta_0\omega} - 1} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') + \\ & + \sum_{lm} \int_{|\omega|>\mu} \frac{d\omega}{4\pi\omega r r'} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')} \vec{F}_l^*(\omega|r) \vec{F}_l(\omega|r')}{e^{\beta_R\omega} - 1} + \frac{e^{i\omega(t-t')} \overleftarrow{F}_l^*(\omega|r) \overleftarrow{F}_l(\omega|r')}{e^{\beta_L\omega} - 1} \right] Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega'). \end{aligned} \quad (113)$$

В безмассовом случае функция Вайтмана сводится к

$$\begin{aligned} G(x, x') = & \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega r r'} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')} \vec{R}_l^*(\omega|r) \vec{R}_l(\omega|r')}{e^{\beta_R\omega} - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{e^{i\omega(t-t')} \overleftarrow{R}_l^*(\omega|r) \overleftarrow{R}_l(\omega|r')}{e^{\beta_L\omega} - 1} \right] Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega'). \end{aligned} \quad (114)$$

3.2.2 Каноническая сингулярность

Покажем, что функция Вайтмана имеет стандартную расходимость при светоподобном разделении точек вне горизонта. Будем считать, что угловые координаты точек совпадают. Для простоты рассмотрим безмассовый случай.

Метрика около горизонта может быть написана в виде

$$ds^2 \approx \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2 - r^2(\rho) d\Omega^2, \quad (115)$$

где

$$\rho = 4M \sqrt{\frac{r}{2M} - 1}, \quad \eta = \frac{t}{4M}. \quad (116)$$

тогда, квадрат геодезического расстояния

$$L^2 \approx 2\rho_1\rho_2 \cosh(\eta_1 - \eta_2) - \rho_1^2 - \rho_2^2. \quad (117)$$

Можно разложить потенциал около горизонта и найти решение, удовлетворяющее граничным условиям (27):

$$\vec{R}_l(\omega|r) \approx \frac{2}{\Gamma(-i4M\omega)} e^{-2iM\omega \log(l^2+l+1)+2iM\omega} K_{4iM\omega}(2\sqrt{l^2+l+1}e^{\frac{r_*-2M}{4M}}), \quad (118)$$

откуда следует, что

$$\vec{A}_l(\omega) \approx -e^{4iM\omega-4iM\omega \log(l^2+l+1)+2i\arg\Gamma(1+4iM\omega)}. \quad (119)$$

Теперь, подставив (118) в (114), получаем

$$G(x, x') \approx \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(2M)^2} \sum_{lm} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{\frac{i\omega(t-t')}{4M}}}{e^{\frac{\beta_R\omega}{4M}} - 1} \sinh(\pi\omega) \cdot \\ \cdot K_{i\omega}(2\sqrt{l^2+l+1}e^{\frac{r_*-2M}{4M}}) K_{i\omega}(2\sqrt{l^2+l+1}e^{\frac{r'_*-2M}{4M}}). \quad (120)$$

Анализ упрощается при рассмотрении дискретной температуры $\beta_R = \frac{8\pi M}{n}$ где n – натуральное число [27], [28]. А именно, в этом случае используется тот факт, что

$$\frac{\sinh(\pi\omega)}{e^{\frac{\beta_R\omega}{4M}} - 1} = \frac{e^{-\pi\omega}}{2} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi\omega(k-1)}{n}}. \quad (121)$$

Подставляя это выражение в (120) и вычисляя интеграл по ω , получаем

$$G(x, x') \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2M)^2} \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} \times \\ \times \sum_{k=1}^n K_0 \left(2\tilde{l} \sqrt{e^{\frac{r_*-2M}{2M}} + e^{\frac{r'_*-2M}{2M}} + 2e^{\frac{r_*-2M}{4M}} e^{\frac{r'_*-2M}{4M}} \cosh \left[-\frac{t-t'}{4M} + i\pi - i\frac{2\pi(k-1)}{n} \right]} \right), \quad (122)$$

где $\tilde{l} = \sqrt{l^2+l+1}$. В этой сумме только слагаемое с $k=1$ зависит от геодезического расстояния между точками (117), отделяя это слагаемое от остальных, запишем функцию Вайтмана в виде:

$$G(x, x') = G_{k=1}(x, x') + G_{k \neq 1}(x, x'). \quad (123)$$

Тогда получаем, что для светоподобно разделенных точек x и x' , т.е. для которых $L_{12} = 0$, но которые находятся вне горизонта:

$$G_{k=1}(x, x') \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2M)^2} \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2+l+1}}{2M} \sqrt{-L^2} \right) \approx \\ \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(2M)^2} \int_0^\infty dl l K_0 \left(\frac{l}{2M} \sqrt{-L^2} \right) = -\frac{1}{4\pi^2 L^2}, \quad (124)$$

и так как слагаемые $W_{k \neq 1}(x, x')$ не являются функциями геодезического расстояния, то вне горизонта они не сингулярны и их вкладом в пропагатор можно пренебречь. Получаем, что

$$G(x, x') \approx -\frac{1}{4\pi^2 L^2}, \quad (125)$$

т.е. расходимость функции Вайтмана имеет стандартный коэффициент $(4\pi^2)^{-1}$ перед расходимостью (в d измерениях этот коэффициент должен равняться $\Omega_d = \Gamma(\frac{d-2}{2})/4\pi^{d/2}$).

Однако, когда точки функции Вайтмана расположены на горизонте, т.е. в пределе

$$\begin{aligned} t &= -\lambda, & r_* &= \lambda, \\ t' &= -\lambda, & r'_* &= \lambda + c, & \lambda &\rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (126)$$

слагаемые $W_{k \neq 1}(x, x')$ тоже становятся сингулярными. Покажем это в случае $n = 2$. В этом случае в сумме (123) два слагаемых, первое из которых равно (124), а второе равно

$$G_{k=2}(x, x') \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2M)^2} \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} K_0 \left(2\tilde{l} \sqrt{e^{\frac{r_*-2M}{2M}} + e^{\frac{r'_*-2M}{2M}} + 2e^{\frac{r_*-2M}{4M}} e^{\frac{r'_*-2M}{4M}} \cosh \left[\frac{t-t'}{4M} \right]} \right). \quad (127)$$

В пределе (126), выражение под корнем в (127) переписывается в виде:

$$e^{\frac{r_*-2M}{2M}} + e^{\frac{r'_*-2M}{2M}} + 2e^{\frac{r_*-2M}{4M}} e^{\frac{r'_*-2M}{4M}} \cosh \left[\frac{t-t'}{4M} \right] = -L^2 \Lambda, \quad (128)$$

где

$$\Lambda = \frac{1 + e^{c/2M} + 2e^{c/4M}}{1 + e^{c/2M} - 2e^{c/4M}}. \quad (129)$$

В итоге, функция Вайтмана при светоподобном разделении точек на будущем горизонте, имеет вид:

$$\begin{aligned} G(x, x') \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2M)^2} \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi} \left\{ K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2 + l + 1}}{2M} \sqrt{-L^2} \right) + \right. \\ \left. + K_0 \left(\frac{\sqrt{l^2 + l + 1}}{2M} \sqrt{-L^2 \Lambda} \right) \right\} \approx -\frac{1}{4\pi^2 L^2} \frac{1 + \Lambda}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (130)$$

С другой стороны, в этом подходе невозможно получить зависимость функции Вайтмана от температуры даже в случае дискретной температуры $\beta_R = \frac{8\pi M}{n}$ с произвольным n , не говоря уже о случае произвольной β_R . В следующей секции расходимость функции Вайтмана на горизонте будет вычислена с помощью асимптотического поведения мод, в результате получим, что коэффициент перед расходимостью явно зависит от температуры. Более того, взяв предел высоких частот в (120), можно показать, что расходимость вне горизонта является ультрафиолетовым эффектом, в то время как на горизонте это инфракрасный эффект, что и обуславливает зависимость коэффициента перед расходимостью от температуры (т.е. от низколежащих состояний).

3.2.3 Аномальная расходимость пропагатора в безмассовом случае

Используя асимптотическое поведение мод (27), в пределе (126) функция Вайтмана (114) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} G(x, x') \approx \frac{1}{(2M)^2} \sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{e^{\beta_R \omega} - 1} \left(e^{-i\omega c} + \vec{A}_l(\omega) e^{-2i\lambda\omega} + \right. \right. \\ \left. \left. + \vec{A}_l^*(\omega) e^{2i\lambda\omega} + |\vec{A}_l(\omega)|^2 e^{i\omega c} \right) + \frac{1}{e^{\beta_L \omega} - 1} |B_l(\omega)|^2 e^{i\omega c} \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

Чтобы проинтегрировать по ω , нужно аналитическое выражение для коэффициентов $\vec{A}_l(\omega)$. Чтобы вычислить их, нужно найти коэффициенты перехода между решениями конфлюэнтного уравнения Гойна (confluent Heun equation) около горизонта и на пространственной бесконечности. Однако, эти коэффициенты неизвестны [13] (известно то, что их нельзя выразить

с помощью гипергеометрических функций), но мы можем приблизить потенциал для радиальной функции в виде [14, 15]:

$$\tilde{V}_l(r) = \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha(r_* - \tilde{r}_*)}, \quad (132)$$

где \tilde{r}_* – это положение пика потенциала и

$$V_0 = V_l(\tilde{r}_*), \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2V_0} \frac{d^2 V_l}{dr_*^2} \Big|_{r_*=\tilde{r}_*}. \quad (133)$$

Решения в таком потенциале даются гипергеометрическими функциями, поэтому нетрудно найти коэффициент отражения $\vec{A}_l(\omega)$:

$$\vec{A}_l(\omega) = \frac{\Gamma(i\omega/\alpha)\Gamma(-i\omega/\alpha - s)\Gamma(1 + s - i\omega/\alpha)}{\Gamma(-i\omega/\alpha)\Gamma(1 + s)\Gamma(-s)}, \quad s = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{4V_0}{\alpha^2} - 1}. \quad (134)$$

Вычисляя интеграл по вычетах, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{\vec{A}_l(\omega)e^{-2i\lambda\omega}}{e^{\beta_R\omega} - 1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{4\pi z} \frac{1}{e^z - 1} \frac{\Gamma(iz/\alpha\beta_R)\Gamma(-iz/\alpha\beta_R - s)\Gamma(1 + s - iz/\alpha\beta_R)}{\Gamma(1 + s)\Gamma(-s)\Gamma(-iz/\alpha\beta_R)} e^{2i\frac{|\lambda|}{\beta_R}z} = \\ &= \pi i \text{Res}(f(z), 0) + 2\pi i \text{Res}(f(z), \bar{0}), \end{aligned} \quad (135)$$

где в последнем равенстве второе слагаемое $\text{Res}(f(z), \bar{0})$ обозначает сумму по всем вычетам в верхней полуплоскости (не включая вычет в нуле).

Вычет при $z = 0$ в пределе $\lambda \rightarrow -\infty$ дает

$$\pi i \text{Res}(f(z), 0) = \frac{|\lambda|}{2\beta_R}. \quad (136)$$

Здесь могло бы возникнуть дополнительное слагаемое вида $\Gamma'(0)/\Gamma(0)$ от производных гамма функции, но они исключаются из конечного ответа, т.к. они имеют форму

$$\frac{\Gamma(-iz/\alpha\beta_R)\Gamma'(iz/\alpha\beta_R)}{\Gamma^2(iz/\alpha\beta_R)} + \frac{\Gamma(iz/\alpha\beta_R)\Gamma'(-iz/\alpha\beta_R)}{\Gamma^2(iz/\alpha\beta_R)}, \quad (137)$$

и используя тот факт, что

$$\Gamma(\epsilon) = -\Gamma(-\epsilon) \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 - \epsilon)} \quad (138)$$

можно заключить, что производные от гамма функций (137) не дают вклада в конечный ответ.

Далее имеем

$$2\pi i \text{Res}(f(z), \bar{0}) = -\frac{i}{2} \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{1}{e^{i\alpha\beta_R n} - 1} \frac{\Gamma(n - s)\Gamma(1 + s + n)}{\Gamma(1 + s)\Gamma(-s)} e^{-2|\lambda|\alpha n}, \quad (139)$$

что стремится к нулю в пределе $\lambda \rightarrow -\infty$.

Итого, в пределе когда обе точки пропагатора расположены на горизонте, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{\vec{A}_l(\omega)e^{-2i\lambda\omega}}{e^{\beta_R\omega} - 1} \approx \frac{|\lambda|}{2\beta_R}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (140)$$

Для комплексно-сопряженного слагаемого в (131) имеем аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{\vec{A}_l^*(\omega) e^{2i\lambda\omega}}{e^{\beta_R\omega} - 1} \approx \frac{|\lambda|}{2\beta_R}, \quad \lambda \rightarrow -\infty, \quad (141)$$

в то время как остальные слагаемые в (131) дают вклад, подавленный относительно (140) и (141) в пределе $\lambda \rightarrow -\infty$. Тогда, используя что

$$P_l(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vec{x}) Y_{lm}^*(\vec{y}), \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(y) = \delta(x-y), \quad (142)$$

функция Вайтмана переписывается в виде

$$G(x, x') \approx \frac{|\lambda|}{\beta_R} \frac{\delta(\Omega, \Omega')}{(2M)^2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (143)$$

Такой же результат может быть получен и без приближения потенциалом (132). А именно, можно воспользоваться модами вблизи горизонта (118) и получить тот же результат, но такой метод имеет недостаток то, что в геометрии около горизонта потенциал для радиальной функции оказывается экспоненциально растущим, поэтому в этом случае $|\vec{A}_l(\omega)| = 1$. Приближение потенциалом (132) показывает, что включение туннелирования мод сквозь потенциальный барьер не меняет ответ для аномальной расходимости функции Вайтмана.

Также можно увидеть, что для дискретной температуры $\beta = \frac{8\pi M}{n}$ ответ (143) может быть получен из (122) взятием асимптотического поведения $K_0(x)$ при $x \rightarrow 0$. Зависимость от l отщепляется от аргумента функции Макдональда из-за её логарифмического поведения в этом пределе, так что лидирующий вклад дают слагаемые, зависящие от геодезического расстояния, а зависимость от l отпадает. В итоге сумма по l дает дельта-функцию от угловых координат в (143).

3.2.4 Аномальная расходимость пропагатора в массивном случае

Так как аномальная расходимость пропагатора является инфракрасным эффектом (как было показано в предыдущем подразделе), мы пренебрегаем вкладом высокочастотных мод в (112). Тогда, функция Вайтмана в пределе светоподобного разделения точек на горизонте выглядит как:

$$G(x, x') \approx \sum_{lm} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{e^{i\omega(t-t')} R_l^*(\omega|r) R_l(\omega|r')}{e^{\beta_0\omega} - 1} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega'). \quad (144)$$

Предполагая, что $\mu\beta_0$ достаточно велико, чтобы пределы интегрирования полностью содержали в себе носитель подинтегрального выражения, мы продолжаем пределы интегрирования на всю вещественную ось. После этого, интеграл вычисляется по вычетам в полной аналогии с предыдущим подразделом. А именно, в пределе (126), функция Вайтмана выглядит как:

$$G(x, x') \approx \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega')}{(2M)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{1}{e^{\beta_0\omega} - 1} \left(e^{-i\omega c} + e^{2i\omega\lambda + 2i\delta_{\omega l}} + e^{i\omega c} + e^{-2i\omega\lambda - 2i\delta_{\omega l}} \right), \quad (145)$$

где $\delta_{\omega l}$ дается выражением (107). Вычисляя вычет на двойном полюсе при $\omega = 0$, получаем

$$G(x, x') \approx \frac{|\lambda|}{\beta_0} \frac{\delta(\Omega, \Omega')}{(2M)^2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty, \quad (146)$$

где $\delta(\Omega, \Omega')$ – дельта-функция на 2-сфере.

3.3 Чёрная дыра Рейсснера-Нордстрёма

Геометрия чёрной дыры Рейсснера-Нордстрёма дается метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (147)$$

диаграмма Пенроуза которой изображена на Рис. 3.

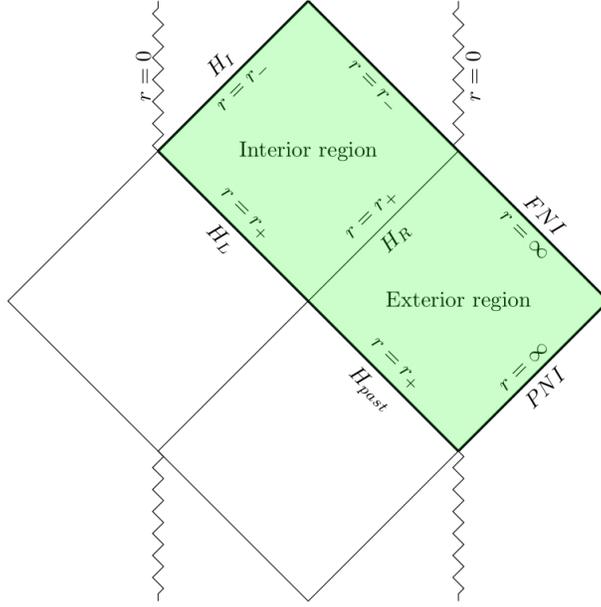


Рис. 3: Диаграмма Пенроуза для чёрной дыры Рейсснера-Нордстрёма.

У этой геометрии есть два горизонта при

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (148)$$

где поверхность $r = r_+$ является горизонтом событий, а поверхность $r = r_-$ является горизонтом Коши (рассматривается неэкстремальный случай $Q < M$). Поверхностная гравитация на этих двух горизонтах:

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_+ - r_-}{2r_{\pm}^2}, \quad (149)$$

и черепашьи координаты можно ввести как

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \log\left(\frac{|r - r_+|}{r_+ - r_-}\right) - \frac{1}{2\kappa_-} \log\left(\frac{|r - r_-|}{r_+ - r_-}\right). \quad (150)$$

Далее рассматривается ситуация, когда обе точки функции Вайтмана расположены на внешнем горизонте $r = r_+$, которая обозначена как H_R на Рис. 3.

3.3.1 Моды и функция Вайтмана в безмассовом случае

Во внешнем регионе $r > r_+$ решения уравнения Клейна-Гордона находятся аналогично как в случае чёрной дыры Шварцшильда. После разделения переменных, уравнение на радиаль-

ную функцию записывается в виде

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l(r)] R = 0,$$

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4}\right). \quad (151)$$

Как и в случае Шварцшильда, выделяем два типа решений (26) этого уравнения с граничными условиями (27), соответствующими испущенным чёрной дырой (правобегущим) и падающим на чёрную дыру (левобегущим) модам. Тогда, функция Вайтмана для состояния с произвольными температурами левобегущих и правобегущих мод записывается в виде

$$G(x, x') = \sum_{lm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{1}{rr'} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')} \vec{R}_l^*(\omega|r) \vec{R}_l(\omega|r')}{e^{\beta_R \omega} - 1} + \frac{e^{i\omega(t-t')} \overleftarrow{R}_l^*(\omega|r) \overleftarrow{R}_l(\omega|r')}{e^{\beta_L \omega} - 1} \right] Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega'). \quad (152)$$

3.3.2 Аномальная расходимость в безмассовом случае

Чтобы вычислить функцию Вайтмана в ситуации, когда обе точки расположены на внешнем горизонте $r = r_+$, что соответствует пределу (126), мы подставляем в (152) асимптотические выражения для мод в этом пределе. Затем мы вычисляем коэффициенты отражения $\vec{A}_l(\omega)$, решая уравнение на радиальную функцию в пределе стремления к горизонту и получаем

$$\vec{R}_l(\omega|r) \approx 2\tilde{l}^{-\frac{i\omega}{\kappa_+}} \frac{e^{i\omega r_+}}{\Gamma(-i\omega/\kappa_+)} K_{\frac{i\omega}{\kappa_+}}(2\tilde{l}e^{\kappa_+(r_*-r_+)}),$$

$$\vec{A}_l(\omega) \approx -\frac{\kappa_+}{\pi\omega} e^{-\frac{2i\omega}{\kappa_+} \log \tilde{l} + 2i\omega r_+} \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa_+}\right) \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{\kappa_+}\right). \quad (153)$$

Подставляя эти выражения в (152), получаем

$$G(x, x') \approx \frac{1}{(2M)^2} \sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \left[\frac{1}{e^{\beta_R \omega} - 1} (e^{-i\omega c} + \vec{A}_l(\omega) e^{-2i\lambda\omega} + \vec{A}_l^*(\omega) e^{2i\lambda\omega} + |\vec{A}_l(\omega)|^2 e^{i\omega c}) + \frac{1}{e^{\beta_L \omega} - 1} |B_l(\omega)|^2 e^{i\omega c} \right], \quad (154)$$

и вычисляя интегралы по ω как в случае чёрной дыры Шварцшильда, получаем

$$G(x, x') \approx \frac{|\lambda|}{\beta_R} \frac{\delta(\Omega, \Omega')}{r_+^2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (155)$$

3.3.3 Моды и функция Вайтмана в массивном случае

В массивном случае уравнение на радиальную функцию выглядит как

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_l(r)] R = 0, \quad (156)$$

с потенциалом

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} + \mu^2\right). \quad (157)$$

Моды с $\omega^2 \leq \mu^2$ записываются в виде

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega lm}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi|\omega|}} e^{-i|\omega|t} R_l(\omega|r) Y_{lm}(\Omega), \\ R_l(\omega|r) &\approx \frac{1}{r} \cos(\omega r_* + \delta_{\omega l}),\end{aligned}\tag{158}$$

где фаза принимает вид

$$\begin{aligned}\delta_{\omega l} &\approx \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2\kappa_+} \log(\tilde{l}^2 + \mu^2) - \omega r_+ - \arg \Gamma\left(1 + \frac{i\omega}{\kappa_+}\right), \\ \tilde{l}^2 &= l^2 + l + 1 - \frac{r_-}{r_+}.\end{aligned}\tag{159}$$

Моды с $\omega^2 > \mu^2$ определены как в (109). Тогда, функция Вайтмана записывается как:

$$\begin{aligned}G(x, x') &= \sum_{lm} \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta_0\omega} - 1} R_l^*(\omega|r) R_l(\omega|r') Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega') + \\ &+ \sum_{lm} \int_{|\omega|>\mu} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{1}{rr'} \left[\frac{e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta_R\omega} - 1} \vec{F}_l^*(\omega|r) \vec{F}_l(\omega|r') + \frac{e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta_L\omega} - 1} \overleftarrow{F}_l^*(\omega|r) \overleftarrow{F}_l(\omega|r') \right] Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega').\end{aligned}\tag{160}$$

3.3.4 Аномальная расходимость в массивном случае

Как и в случае Шварцшильда, лидирующий вклад в пределе (126) идёт из низких частот. Тогда функция Вайтмана в этом пределе переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}G(x, x') &\approx \sum_{lm} \int_{-\mu}^{\mu} d\omega \frac{\varphi_{\omega lm}^*(x) \varphi_{\omega lm}(x')}{e^{\beta_0\omega} - 1} \approx \\ &\approx \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega')}{(2M)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi\omega} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{e^{\beta_0\omega} - 1} \left(e^{i\omega(r_*+r'_*)+2i\delta_{\omega l}} + e^{-i\omega(r_*+r'_*)-2i\delta_{\omega l}} \right).\end{aligned}\tag{161}$$

Вычисляя интеграл по ω , получаем

$$G(x, x') \approx \frac{|\lambda|}{\beta_0} \frac{\delta(\Omega, \Omega')}{r_+^2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty,\tag{162}$$

т.е. мы снова получаем аномальную расходимость на внешнем горизонте.

4 Заключение

В результате было показано, что при рассмотрении обобщенных термальных состояний с произвольными температурами левобегущих и правобегущих мод функции Вайтмана приобретают аномальную расходимость когда их точки расположены на горизонте соответствующего пространства. Эта расходимость является аномальной в том смысле, что коэффициент перед расходимостью становится явно зависящим от температуры и совпадает со стандартным коэффициентом только в случае канонической температуры. Это показывает, что состояния с неканонической температурой нарушают не только зависимость функции Вайтмана от геодезического расстояния, но и их адамаровское поведение. Также показано, что в случае неканонической температуры состояний тензор энергии-импульса оказывается расходящимся на горизонте в свободно-падающей системе отсчета. Это означает, что отклик квантового поля на геометрию оказывается существенным.

Однако, все это было показано для свободной теории. Интересным является вопрос о том, что будет происходить в самовзаимодействующей теории, т.е. могут ли петлевые поправки привести к исправлению этих патологий. В диаграммной технике Келдыша-Швингера возможно написать кинетическое уравнение на заселенности уровней, которое будет показывать во что эволюционирует начальное состояние. Интересно посмотреть во что эволюционирует состояние с произвольными температурами леводвижущихся и праводвижущихся частиц. Должна ли происходить термализация, которая обеспечит адамаровское поведение точного пропагатора и регулярность тензора энергии-импульса на горизонте?

Также интересно исследовать вопрос о расходимости пропагаторов и тензора энергии-импульса в ситуации, когда у геометрии есть два горизонта. Здесь, в случае чёрной дыры Рейсснера-Нордстрёма, мы интересовались только тем, что происходит на внешнем горизонте. Далее планируется посмотреть что происходит на внутреннем горизонте, но для этого нужно продолжить пропагаторы из внешнего региона $r > r_+$ во внутренний $r_+ > r > r_-$. В случае канонической температуры это можно легко сделать, и метод построения пропагатора во внутреннем регионе был предложен в [16, 17]. Однако, этот метод не работает в случае неканонической температуры, поэтому планируется разработать метод продолжения пропагатора за горизонт в случае произвольной температуры. Другой интересной задачей с двумя горизонтами является геометрия чёрной дыры в де Ситтере/анти де Ситтере. В этом случае поле изначально рассматривается в регионе между двумя горизонтами (горизонтом событий и космологическим горизонтом), поэтому вопрос о продолжении пропагатора за горизонт не стоит. Однако, в этом случае имеется две канонические температуры (т.к. имеется два горизонта), поэтому интересно посмотреть возможно ли сохранить каноническую расходимость пропагатора и регулярность тензора-энергии импульса на обоих горизонтах.

Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю Ахмедову Эмилю Тофиковичу. Также автор выражает благодарность К. Базарову, Д. Дьяконову и Д.Трунину за полезные обсуждения.

Приложение

А Регуляризация тензора энергии-импульса

Здесь приводится вычисление тензора энергии-импульса с использованием регуляризации методом ковариантной раздвижки точек [34].

Для вычисления среднего от тензора энергии-импульса, используется функция Вайтмана в пределе совпадающих точек:

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle = D_{\mu\nu} \langle \hat{\varphi}(x^+) \hat{\varphi}(x^-) \rangle \Big|_{x^+ = x^- = x}, \quad \text{где } D_{\mu\nu} \text{ – дифференциальный оператор}$$

Здесь x^\pm – это точки, раздвинутые вдоль геодезической от x и t^μ – это единичный вектор, касательный к геодезической (см. Рис. 4).

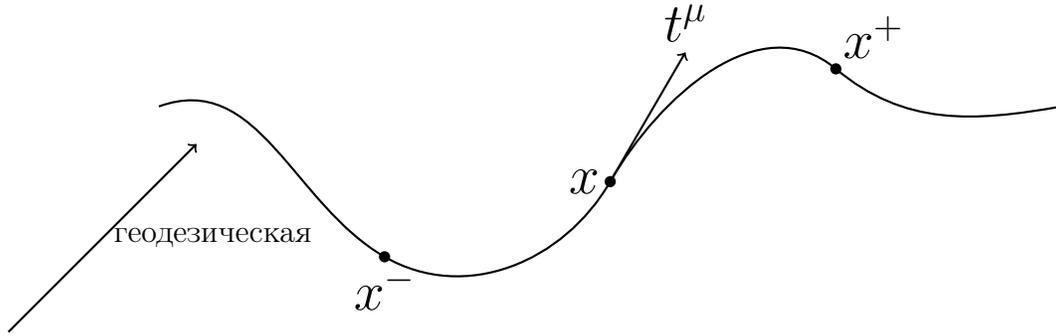


Рис. 4: Раздвижка точек по геодезической

Следовательно, точка на геодезической, близкая к x^μ , может быть представлена как:

$$x^\mu(\tau) = x^\mu + \tau t^\mu + \frac{1}{2} \tau^2 a^\mu + \frac{1}{6} \tau^3 b^\mu + \dots, \quad (163)$$

где τ – собственный интервал, т.е. граничные условия выглядят как:

$$x^\mu(\tau = 0) = x^\mu, \quad \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau = 0) = t^\mu.$$

Таким образом, точки x^\pm определены как:

$$x^{\mu\pm} = x^\mu(\tau = \pm\epsilon).$$

Любая двумерная конформно-плоская метрика может быть представлена в виде:

$$ds^2 = C(u, v) du dv.$$

Такая метрика имеет только две ненулевые компоненты символов Кристоффеля

$$\Gamma_{uu}^u = \partial_u \log C \equiv \Gamma_u; \quad \Gamma_{vv}^v = \partial_v \log C \equiv \Gamma_v.$$

As follows from the geodesic equations of motion the parameters t^μ, a^μ, b^μ in (163) are not independent. In fact, the geodesic equation: Как следует из уравнения на геодезические, параметры t^μ, a^μ, b^μ в (163) не являются независимыми. Геодезическое уравнение

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (164)$$

фиксирует заданные коэффициенты как:

$$a^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu t^\nu t^\lambda, \quad b^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu (a^\nu t^\lambda + t^\nu a^\lambda) - t^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu t^\nu t^\lambda. \quad (165)$$

Достаточно выразить a^μ и b^μ в терминах t^μ чтобы найти конечную часть среднего от тензора энергии-импульса.

Для этого метода нам также потребуются матрицы параллельного переноса $e_\nu^\mu(\tau)$, удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\frac{de_\nu^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} e_\nu^\sigma = 0, \quad \text{с условием } e_\nu^\mu(\tau = 0) = \delta_\nu^\mu. \quad (166)$$

Как и в случае геодезической, мы раскладываем матрицу параллельного переноса по степеням τ :

$$e_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \tau t_n^\mu u + \frac{1}{2} \tau^2 a_\nu^\mu + \dots,$$

где

$$t_n^\mu = -\Gamma_{\rho\nu}^\mu t^\rho, \quad a_\nu^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho t^\alpha t^\beta + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma t^\rho t^\alpha - t^\alpha t^\rho \partial_\alpha \Gamma_{\rho\nu}^\mu.$$

В результате, среднее от тензора энергии-импульса по состоянию с температурой β^{-1} дается следующим выражением:

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_\beta = \langle \partial_\alpha \varphi(x^+) \partial_\beta \varphi(x^-) \rangle_\beta \left(e_\mu^{+\alpha} e_\nu^{-\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} e_\sigma^{+\alpha} e_\rho^{-\beta} \right) + \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \langle \varphi(x^+) \varphi(x^-) \rangle_\beta. \quad (167)$$

где $e_\mu^{\pm\alpha} = e_\mu^\alpha(\tau = \pm\epsilon)$. Последним шагом является подстановка x^\pm и e_μ^α в (167) и взятие предела $\epsilon \rightarrow 0$. Для вычислений нам потребуется явный вид функции Вайтмана, и результат будет содержать слагаемые, зависящие от ϵ и от направления раздвижки точек. Для безмассовых полей на произвольном фоне можно получить [35]:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon^2(t_\alpha t^\alpha)} + \frac{R}{24\pi} \right] \left[\frac{t_\mu t_\nu}{t_\alpha t^\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right] + \Theta_{\mu\nu}. \quad (168)$$

Опусти члены, зависящие от ϵ и от направления раздвижки точек. Получим регуляризованный тензор энергии-импульса

$$\langle : T_{\mu\nu} : \rangle = \Theta_{\mu\nu} + \frac{R}{48\pi} g_{\mu\nu}, \quad (169)$$

где

$$\Theta_{uu} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2} + \text{state dependent terms}, \quad (170)$$

$$\Theta_{vv} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_v^2 C^{-1/2} + \text{state dependent terms}, \quad (171)$$

$$\Theta_{uv} = \Theta_{vu} = 0. \quad (172)$$

Условия ковариантного сохранения тензора энергии-импульса выглядит в компонентах как:

$$\frac{\partial T_{uu}}{\partial v} + \frac{\partial T_{vu}}{\partial u} - \Gamma_u T_{uv} = 0, \quad (173)$$

$$\frac{\partial T_{uv}}{\partial v} + \frac{\partial T_{vv}}{\partial u} - \Gamma_v T_{uv} = 0. \quad (174)$$

Можно увидеть, что эти условия выполнены при вычитании членов, зависящих от направления, в то время как усреднение по направлениям дает ответ, нарушающий условия сохранения.

В Преобразования Боголюбова

Здесь мы обозначаем правый и левый патчи Риндлера или Шварцшильда как I и II соответственно, а верхний и нижний патчи как F и P .

Для общей ситуации преобразования Боголюбова устроены следующим образом [22]. Пусть имеются два полных базиса мод, по которым раскладывается оператор поля:

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)], \quad (175)$$

$$\phi(x) = \sum_i [\bar{a}_i \bar{u}_i(x) + \bar{a}_i^\dagger \bar{u}_i^*(x)]. \quad (176)$$

Так как это полные базисы мод, они могут быть выражены друг через друга через линейное преобразование:

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*), \quad (177)$$

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \bar{u}_j - \beta_{ji} \bar{u}_j^*), \quad (178)$$

где коэффициенты Боголюбова α_{ij} и β_{ij} можно посчитать используя скалярное произведение как

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i; u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i; u_j^*). \quad (179)$$

Приравнивая разложение оператора поля по обоим базисам мод и используя ортонормальность мод, для операторов рождения и уничтожения получаем такие же линейные соотношения

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_j (\alpha_{ji} \bar{a}_j + \beta_{ji}^* \bar{a}_j^\dagger), \\ \bar{a}_j &= \sum_i (\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji} a_i^\dagger). \end{aligned} \quad (180)$$

Условие того, что оба набора операторов рождения и уничтожения удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям алгебры Гайзенберга накладывает условия на коэффициенты

$$\begin{aligned} \sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) &= \delta_{ij}, \\ \sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) &= 0. \end{aligned} \quad (181)$$

Рассмотрим как устроены преобразования Боголюбова при редукции с пространства Минковского в пространство Риндлера и обратно. Для простоты рассмотрим безмассовое поле. Моды в пространстве Минковского выглядят как:

$$u_p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi|p|}} e^{-i|p|t + ipx}, \quad -\infty < p < \infty. \quad (182)$$

Моды в пространстве Риндлера записываются следующим образом (где в скобках после переменных написано в каком регионе Риндлера они определены):

$$\begin{aligned}
u_\omega(\xi, \eta|I, P) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega(\xi-\eta)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [a(x-t)]^{\frac{i\omega}{a}} \theta(x-t), \\
u_\omega(\xi, \eta|II, F) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega(-\xi+\eta)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [a(t-x)]^{\frac{-i\omega}{a}} \theta(t-x), \\
u_\omega(\xi, \eta|I, F) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega(-\xi-\eta)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [a(x+t)]^{\frac{-i\omega}{a}} \theta(x+t), \\
u_\omega(\xi, \eta|II, P) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega(\xi+\eta)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [a(-x-t)]^{\frac{i\omega}{a}} \theta(-x-t),
\end{aligned} \tag{183}$$

где a – ускорение. Эти моды связаны с модами Минковского (182) преобразованием Боголюбова, которое, скажем, для $u_\omega(\xi, \eta|I, P)$ устроено как:

$$u_\omega(\xi, \eta|I, P) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[u_p(x, t) \alpha_{p|\omega}(I, P) + u_p^*(x, t) \beta_{p|\omega}(I, P) \right]. \tag{184}$$

Вычисляя скалярные произведения, можно найти Боголюбовские коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\alpha_{p|\omega}(I, P) &= -i\theta(p) \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{i\omega}{a}} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{a}\right), \\
\beta_{p|\omega}(I, P) &= i\theta(p) \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{i\omega}{a}} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{a}\right), \\
\alpha_{p|\omega}(I, F) &= i\theta(-p) \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{-i\omega}{a}} \Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right), \\
\beta_{p|\omega}(I, F) &= -i\theta(-p) \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{-i\omega}{a}} \Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right), \\
\alpha_{p|\omega}(II, P) &= -i\theta(-p) \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{-p\omega}} \left(\frac{a}{-p}\right)^{\frac{i\omega}{a}} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{a}\right), \\
\beta_{p|\omega}(II, P) &= i\theta(-p) \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{-p\omega}} \left(\frac{a}{-p}\right)^{\frac{i\omega}{a}} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{a}\right), \\
\alpha_{p|\omega}(II, F) &= i\theta(p) \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{-i\omega}{a}} \Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right), \\
\beta_{p|\omega}(II, F) &= -i\theta(p) \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}}{2\pi\sqrt{p\omega}} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{-i\omega}{a}} \Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right).
\end{aligned} \tag{185}$$

Обратно, моды Минковского могут быть разложены по риндлеровским модам как:

$$\begin{aligned}
u_p(x, t) &= \int_0^\infty d\omega \left[u_\omega(\xi, \eta|I, P) \alpha_{p|\omega}^*(I, P) - u_\omega^*(\xi, \eta|I, P) \beta_{p|\omega}(I, P) + \right. \\
&\quad + u_\omega(\xi, \eta|I, F) \alpha_{p|\omega}^*(I, F) - u_\omega^*(\xi, \eta|I, F) \beta_{p|\omega}(I, F) + \\
&\quad + u_\omega(\xi, \eta|II, P) \alpha_{p|\omega}^*(II, P) - u_\omega^*(\xi, \eta|II, P) \beta_{p|\omega}(II, P) + \\
&\quad \left. + u_\omega(\xi, \eta|II, F) \alpha_{p|\omega}^*(II, F) - u_\omega^*(\xi, \eta|II, F) \beta_{p|\omega}(II, F) \right].
\end{aligned} \tag{186}$$

Для такого разложения нужно использовать моды как из региона I , так и из региона II . Это отражает тот факт, что поверхность Коши для пространства Минковского содержит поверхности Коши для левого и правого квадранта. Покажем, что редукция от Минковского до правого патча Риндлера превращает изначальное чистое состояние в термальное. Для этого нам потребуются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{p|\omega}^*(I, P) \alpha_{p|\omega'}(I, P) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{p|\omega}^*(I, F) \alpha_{p|\omega'}(I, F) dp = \frac{e^{\pi\omega/a}}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \delta(\omega - \omega'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{p|\omega}^*(I, P) \beta_{p|\omega'}(I, P) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{p|\omega}^*(I, F) \beta_{p|\omega'}(I, F) dp = \frac{e^{-\pi\omega/a}}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \delta(\omega - \omega'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{p|\omega}(I, P) \beta_{p|\omega'}(I, P) dp &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{p|\omega}(I, F) \beta_{p|\omega'}(I, F) dp \sim \delta(\omega + \omega') = 0, \end{aligned} \quad (187)$$

где последнее равенство следует из того факта, что ω и ω' положительны. Теперь возьмем фоковский вакуум в Минковском, функция Вайтмана для такого состояния записывается как

$$G(x, t|x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} dp u_p(x, t) u_p^*(x', t'). \quad (188)$$

Подставляя сюда (186) (опуская моды в левом патче) и вычисляя интегралы по p как в (187), получаем

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta|\xi', \eta') &= \int_0^{\infty} d\omega \left[\frac{u_{\omega}(\xi, \eta|I, P) u_{\omega}^*(\xi', \eta'|I, P)}{1 - e^{-2\pi\omega/a}} + \frac{u_{\omega}^*(\xi, \eta|I, P) u_{\omega}(\xi', \eta'|I, P)}{e^{2\pi\omega/a} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\omega}(\xi, \eta|I, F) u_{\omega}^*(\xi', \eta'|I, F)}{1 - e^{-2\pi\omega/a}} + \frac{u_{\omega}^*(\xi, \eta|I, F) u_{\omega}(\xi', \eta'|I, F)}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right], \end{aligned} \quad (189)$$

т.е. получаем состояние, в котором левобегущие и правобегущие частицы распределены термально:

$$\langle a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega'} \rangle = \frac{\delta(\omega - \omega')}{e^{2\pi\omega/a} - 1}, \quad \langle b_{\omega}^{\dagger} b_{\omega'} \rangle = \frac{\delta(\omega - \omega')}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \quad (190)$$

Теперь покажем, как в правом патче Риндлера получить состояние с произвольной температурой. Распишем явно разложение оператора поля по модам в правом патче Риндлера:

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} d\omega \left[a_{\omega} u_{\omega}(\xi, \eta|I, P) + a_{\omega}^{\dagger} u_{\omega}^*(\xi, \eta|I, P) + b_{\omega} u_{\omega}(\xi, \eta|I, F) + b_{\omega}^{\dagger} u_{\omega}^*(\xi, \eta|I, F) \right]. \quad (191)$$

Сделаем следующее преобразование Боголюбова:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\omega} &= \cosh \gamma a_{\omega} - \sinh \gamma b_{\omega}^{\dagger}, \\ \bar{b}_{\omega} &= -\sinh \delta a_{\omega}^{\dagger} + \cosh \delta b_{\omega}. \end{aligned} \quad (192)$$

Нетрудно убедиться, что стандартные коммутационные соотношения выполняются для новых операторов рождения и уничтожения \bar{a}_{ω} и \bar{b}_{ω} . Определим новое состояние как фоковский вакуум для новых операторов рождения и уничтожения, т.е.

$$|0_{\gamma, \delta}\rangle : \quad \bar{a}_{\omega} |0_{\gamma, \delta}\rangle = \bar{b}_{\omega} |0_{\gamma, \delta}\rangle = 0, \quad \forall \omega > 0. \quad (193)$$

Посчитаем теперь пропагатор, усредненный по такому состоянию. Получим

$$\begin{aligned} \langle 0_{\gamma,\delta} | \phi(x) \phi(x') | 0_{\gamma,\delta} \rangle &= \int_0^\infty d\omega \left[\cosh^2 \gamma u_\omega(\xi, \eta | I, P) u_\omega^*(\xi', \eta' | I, P) + \sinh^2 \gamma \times \right. \\ &\times u_\omega^*(\xi, \eta | I, P) u_\omega(\xi', \eta' | I, P) + \cosh^2 \delta u_\omega(\xi, \eta | I, F) u_\omega^*(\xi', \eta' | I, F) + \sin^2 \delta u_\omega^*(\xi, \eta | I, F) u_\omega(\xi', \eta' | I, F) \left. \right]. \end{aligned} \quad (194)$$

Положив в этом равенстве

$$\cosh \gamma = \sqrt{\frac{e^{\beta_R \omega/2}}{2 \sinh(\beta_R \omega/2)}}, \quad \cosh \delta = \sqrt{\frac{e^{\beta_L \omega/2}}{2 \sinh(\beta_L \omega/2)}}, \quad (195)$$

получим для пропагатора

$$\begin{aligned} \langle 0_{\gamma,\delta} | \phi(x) \phi(x') | 0_{\gamma,\delta} \rangle &= \int_0^\infty \left[\frac{u_\omega(\xi, \eta | I, P) u_\omega^*(\xi', \eta' | I, P)}{1 - e^{-\beta_R \omega}} + \frac{u_\omega^*(\xi, \eta | I, P) u_\omega(\xi', \eta' | I, P)}{e^{\beta_R \omega} - 1} + \right. \\ &\left. + \frac{u_\omega(\xi, \eta | I, F) u_\omega^*(\xi', \eta' | I, F)}{1 - e^{-\beta_L \omega}} + \frac{u_\omega^*(\xi, \eta | I, F) u_\omega(\xi', \eta' | I, F)}{e^{\beta_L \omega} - 1} \right]. \end{aligned} \quad (196)$$

Таким образом, получили состояние с произвольными температурами левобегущих и правобегущих частиц:

$$\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle = \frac{\delta(\omega - \omega')}{e^{\beta_R \omega} - 1}, \quad \langle b_\omega^\dagger b_{\omega'} \rangle = \frac{\delta(\omega - \omega')}{e^{\beta_L \omega} - 1}. \quad (197)$$

Список литературы

- [1] E. T. Akhmedov, [arXiv:2105.05039 [gr-qc]].
- [2] W. Israel, Phys. Lett. A **57** (1976), 107-110 doi:10.1016/0375-9601(76)90178-X
- [3] D. G. Boulware, Phys. Rev. D **11**, 1404 (1975) doi:10.1103/PhysRevD.11.1404
- [4] W. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976) doi:10.1103/PhysRevD.14.870
- [5] J. Hartle and S. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 2188-2203 (1976) doi:10.1103/PhysRevD.13.2188
- [6] B. S. DeWitt, Int. Ser. Monogr. Phys. **114** (2003), 1-1042
- [7] B. S. DeWitt, Phys. Rept. **19** (1975), 295-357 doi:10.1016/0370-1573(75)90051-4
- [8] B. S. DeWitt, Conf. Proc. C **630701** (1964), 585-820
- [9] P. Candelas, Phys. Rev. D **21**, 2185-2202 (1980) doi:10.1103/PhysRevD.21.2185
- [10] S. M. Christensen, Phys. Rev. D **14** (1976) 2490. doi:10.1103/PhysRevD.14.2490
- [11] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93**, 024029 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.024029 [arXiv:1508.07500 [hep-th]].
- [12] E. T. Akhmedov, P. A. Anempodistov, K. V. Bazarov, D. V. Diakonov and U. Moschella, Phys. Rev. D **103** (2021) no.2, 025023 doi:10.1103/PhysRevD.103.025023 [arXiv:2010.10877 [hep-th]].
- [13] P. P. Fiziev, Class. Quant. Grav. **23** (2006), 2447-2468 doi:10.1088/0264-9381/23/7/015 [arXiv:gr-qc/0509123 [gr-qc]].
- [14] C. Chirenti, Braz. J. Phys. **48**, no.1, 102-109 (2018) doi:10.1007/s13538-017-0543-7 [arXiv:1708.04476 [gr-qc]].
- [15] E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, Class. Quant. Grav. **26** (2009), 163001 doi:10.1088/0264-9381/26/16/163001 [arXiv:0905.2975 [gr-qc]].
- [16] A. Lanir, A. Levi, A. Ori and O. Sela, Phys. Rev. D **97**, 024033 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.024033 [arXiv:1710.07267 [gr-qc]].
- [17] O. Sela, Phys. Rev. D **98**, 024025 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.98.024025 [arXiv:1803.06747 [gr-qc]].
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Theoretical Physics Vol. 3. Pergamon Press, Oxford (1977).
- [19] E. T. Akhmedov, D. A. Kalinov and F. K. Popov, Phys. Rev. D **93**, 064006 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.064006 [arXiv:1601.03894 [gr-qc]].
- [20] L. M. Burko, Phys. Rev. Lett. **79**, 4958-4961 (1997) doi:10.1103/PhysRevLett.79.4958 [arXiv:gr-qc/9710112 [gr-qc]].
- [21] P. R. Brady, S. Droz and S. M. Morsink, Phys. Rev. D **58**, 084034 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.58.084034 [arXiv:gr-qc/9805008 [gr-qc]].
- [22] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, doi:10.1017/CBO9780511622632

- [23] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199-220 (1975) [erratum: Commun. Math. Phys. **46** (1976), 206] doi:10.1007/BF02345020
- [24] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, Nature **272**, 35 (1978) doi:10.1038/272035a0
- [25] S. M. Christensen and S. A. Fulling, Phys. Rev. D **15**, 2088-2104 (1977) doi:10.1103/PhysRevD.15.2088
- [26] W. A. Hiscock, S. L. Larson and P. R. Anderson, Phys. Rev. D **56**, 3571-3581 (1997) doi:10.1103/PhysRevD.56.3571 [arXiv:gr-qc/9701004 [gr-qc]].
- [27] E. T. Akhmedov, K. V. Bazarov, D. V. Diakonov, U. Moschella, F. K. Popov and C. Schubert, Phys. Rev. D **100**, 105011 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.100.105011 [arXiv:1905.09344 [hep-th]].
- [28] E. T. Akhmedov, K. V. Bazarov, D. V. Diakonov and U. Moschella, Phys. Rev. D **102**, 085003 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.102.085003 [arXiv:2005.13952 [hep-th]].
- [29] E. Poisson, Living Rev. Rel. **7** (2004), 6 doi:10.12942/lrr-2004-6 [arXiv:gr-qc/0306052 [gr-qc]].
- [30] P. A. Anempodistov, [arXiv:2012.03305 [hep-th]].
- [31] S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850-2862 (1973).
- [32] S. A. Fulling, J. Phys. A **10**, 917-951 (1977).
- [33] R. Haag, Local Quantum Physics, Fields, Particles, Algebras. Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [34] P. Davies, S. Fulling and W. Unruh, Phys. Rev. D **13** (1976), 2720-2723 doi:10.1103/PhysRevD.13.2720
- [35] P. Davies and S. Fulling Proc. R. Soc. Lond. A 1977 354, 59-77 doi: 10.1098/rspa.1977.0056
- [36] U. Moschella and R. Schaeffer, AIP Conf. Proc. **1132**, no. 1, 303 (2009)
- [37] U. Moschella and R. Schaeffer, JCAP **02**, 033 (2009)