

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

МАГНИТНАЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ АДРОНОВ В РЕШЕТОЧНОЙ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

(магистерская диссертация)

Студент:

Ишкуватов Рафаэль Альфредович

(подпись студента)

Научный руководитель:

Лучевская Елена Викторовна,
канд. физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2021

Содержание

1. Введение	1
2. Действие КХД	5
3. Технические детали	9
4. Корреляционные функции мезонов	13
5. Вычисление эффективной массы с учетом погрешностей	17
6. Магнитная поляризуемость ρ^\pm мезона	19
7. Магнитная поляризуемость ρ^0 мезона	25
8. Тензорная магнитная поляризуемость	29
9. Заключение	33

Глава 1

Введение

В настоящее время известно 4 типа фундаментальных взаимодействий в природе: гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное. Сильное взаимодействие связывает атомные ядра, и физика этих взаимодействий может быть объясняется с помощью квантовой хромодинамики (КХД). В основе этой калибровочной теории лежит взаимодействие между кварками, которое переносится векторными частицами. Квантовая хромодинамика безусловно является экспериментальной теорией, ведь фундамент теории составляют данные экспериментов. Огромный вклад в классификацию элементарных частиц был сделан такими учеными, как Марри Гелл-Манн и Ювал Нееман. Независимо друг от друга, в 1961 году, основываясь на своих работах, они пришли к заключению, что существует внутренняя $SU_F(3)$ симметрия адронов [1, 2]. При добавлении к которой групп спиновых вращений $SU(2)$, частицы должны были обладать симметриями группы $SU(6)$ [3, 4]. До сих пор не были обнаружены такие фундаментальные представления частиц, однако основываясь именно на этих открытиях была предложена классификация элементарных частиц-адронов. Новая классификация основывалась на модели [5, 6], объясняющей спектр адронов, в том числе нейтронов и протонов, входящих в состав ядер, и учитывала вариативность частиц, образующихся в ускорителях элементарных частиц. В соответствии с этой моделью мезоны состоят из антикварка и кварка, в то время как барионы могут быть образованы лишь из трех кварков. М. Гелл-Манн, для объяснения известных квантовых чисел наблюдаемых в экспериментах адронов, постулировал существование трех типов кварков: u (ур - верхний),

d(down - нижний), s(strange - странный). Впоследствии были открыты еще три типа кварков: c(charm - очарованный), b(beauty - прекрасный), t(top - верхний). Дробный электрический заряд составляет $+2/3e$ для u, c, t кварков, и $-1/3e$ для d, s, b кварков. Связанное состояние двух u и одного d кварков (uud) является протоном, в то время как связанное состояние двух d и одного u кварка(udd)-нейтроном. Кварки имеют различные токовые массы, которые представлены в таблице 1.

тип кварка	m, Mev
u	2.16 ± 0.31
d	4.67 ± 0.25
s	93 ± 8
c	$(1.27 \pm 0.02) * 10^3$
b	$(4.18 \pm 0.03) * 10^3$
t	$(174 \pm 0.65) * 10^3$

Таблица 1. Значения масс различных типов кварков

Тот факт, что адроны имеют различные массы, может быть объяснен в рамках квантовой хромодинамики. Данная модель дала возможность обосновать величину магнитного момента у протона. Однако, у этой модели существовало критичное упущение: спектр некоторых возбужденных состояний адронов не мог быть объяснен с ее помощью. К примеру, резонанс Δ^{++} имеет спин $3/2$ и заряд $+2e$, вследствие чего в его состав должны входить три u кварка, каждый из которых имеет спин $1/2$. Но согласно принципу Паули не более одного фермиона в протоне может быть обладать заданной проекцией спина. Поэтому существование этого резонанса невозможно, но он был обнаружен экспериментально. Решение этой проблемы было найдено Г.А. Гринбергом. Им в 1964 году было выдвинуто предположение, что кварки, должны подчиняться парастатистике третьего ранга [7]. Для того чтобы это выполнялось, достаточно было ввести для кварков третье квантовое число. Немного позже, в 1965 году, М.Ханом и И.Намбу было введено это квантовое число и названо цветом [8, 9]. В модели, рассматриваемой ими, существует три цветовых состояния кварков: голубой, красный и жёлтый. Каждый кварк может пребывать в одном из этих трёх состояний. Все мезоны и барионы, наблюдаемые в природе, являются бесцветными. На математическом языке

это означает, что данные частицы представляют собой синглеты по отношению к группе симметрии $SU_c(3)$ (“с” – от английского color – цвет). Взаимодействие между кварками переносится с помощью глюонов, их существует 8 типов и равно количеству генераторов группы цветовых симметрий. Глюоны - векторные частицы со спином 1, масса которых равна нулю. Гипотеза о том, что взаимодействие кварков осуществляется через их цветовой заряд вследствие обмена глюонами, была выдвинута Вайнбергом и Нанопулосом [10, 11]. Только в этом случае можно было добавить квантовую хромодинамику в Стандартную Модель, единую теорию электро-слабых взаимодействий. Если предположить, что взаимодействие между кварками обусловлено типами кварков, то это приводит к нарушению чётности в Стандартной модели.

Влияние сильных магнитных полей на кварк-адронное вещество представляет собой богатую и полную удивительных эффектов область науки. Эти поля могут существовать в ранней Вселенной, они могут влиять на физику нейтронных звезд и приводить к нетривиальным эффектам при нецентральных столкновениях тяжелых ионов в земных лабораториях. Поведение энергии адронов во внешнем магнитном поле может дать информацию о внутренней структуре частицы. В сильном магнитном поле адронная волновая функция деформируется. Эта деформация определяется как КЭД, так и КХД взаимодействиями внутри адрона. Магнитная поляризуемость и гиперполяризуемость - это величины, описывающие отклик адрона на внешнее магнитное поле [12]. По-видимому, этот нелинейный отклик возникает исключительно из-за сильного взаимодействия КХД, связывающего кварки внутри мезона.

Ниже обсуждаются вычисления в $SU(3)$ калибровочной решёточной теории поля с киральным инвариантным оператором Дирака без динамических кварков. Данный метод позволяет рассчитать адронные энергии для различных проекций спина на ось магнитного поля. Магнитные поляризуемости и магнитные моменты могут быть извлечены как параметры фитирования из функции, описывающей зависимость энергии от величины магнитного поля. Значения энергий и магнитных поляризуемостей зависят от проекции спина мезона на ось поля. Физический смысл этого явления связан с различными деформациями адрона в различных

направлениях пространства. Следовательно, наличие магнитного поля создает своего рода анизотропию в пространстве, которая может приводить к возникновению дилептонной асимметрии при столкновениях тяжелых ионов. Дилептонная асимметрия [13] является важной физической характеристикой, которая чувствительна к различным каналам распада частиц и может быть использована для определения вкладов некоторых каналов. Дилептонные асимметрии дают информацию об эволюции кварк-глюонной плазмы в нецентральных столкновениях тяжелых ионов [14]. В данном дипломе представлено численное исследование влияния магнитного поля на тензорную поляризацию ρ мезонов в решёточной квантовой хромодинамике, которая также может быть обнаружена по угловому распределению их продуктов распада в эксперименте. Это требует более точного расчета поляризуемости.

Глава 2

Действие КХД

В основе квантовой хромодинамики лежит действие, которое определяется в пространстве Минковского следующим образом:

$$S_{\text{кхд}} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x) + \sum_q \bar{\psi}_q^i(x) (i\gamma_\mu D_\mu(x) - m_q)_{ij} \psi_q^j(x) \right). \quad (1)$$

Суммирование в (1) выполняется по всем рассматриваемым в теории типам кварков q . Тензор напряженности неабелевого поля в выражении (1) имеет вид:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_s f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2)$$

с неабелевой производной

$$(D_\mu(x))_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig_s \sum_a t_{ij}^a A_\mu^a(x), \quad (3)$$

где $t_{ij}^a = \lambda_{ij}^a/2$ – генераторы группы $SU_c(3)$, λ_{ij}^a – матрицы Гелл-Манна, $i, j = 1, 2, 3$ – цветовые индексы, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ – лоренцевы индексы, g_s – универсальная константа взаимодействия КХД. Полностью антисимметричный тензор f_{abc} является структурными константами цветовой $SU_c(3)$ калибровочной группы. Они удовлетворяют соотношению:

$$[t^a, t^b] = i \sum_c f^{abc} t^c. \quad (4)$$

Каждому кварковому полю соответствует четырёх-компонентный спинор Дирака $\psi_q^j(x)$. Восемь калибровочных глюонных полей $A_\mu^a(x)$ представляют собой элементы присоединённого представления $SU_c(3)$ алгебры Ли.

Плотность Лагранжа можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))^2 - \\ & \frac{1}{2} \left[g_s f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) + \frac{1}{2} (g_s f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x))^2 \right] + \\ & \sum_q \bar{\psi}_q^i(x) (i\gamma_\mu \partial_\mu(x) - m_q)_{ij} \psi_q^j(x) + \\ & \bar{\psi}_q^i(x) \left[\gamma_\mu \left(g_s \sum_a \frac{\lambda_{ij}^a}{2} A_\mu^a(x) \right) \right] \psi_q^j(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Полученное разложение является суммой слагаемых, включающих различные степени константы связи g_s сильного взаимодействия. Слагаемые нулевого порядка по g_s дают пропагаторы свободных кварков и глюонов, слагаемые первого порядка в лагранжиане отвечают кварк-глюонной и трёх-глюонной вершинам, слагаемое второго порядка соответствует четырёх-глюонной вершине. Под кварк-глюонной вершиной стоит понимать аннигиляцию кварка и антикварка в глюон, либо испускание кварком (или антикварком) виртуального глюона. Трёхглюонная и четырёхглюонная вершины соответствуют процессам взаимодействия глюонов между собой.

Два глюона взаимодействуют друг с другом также, как глюон с кварком, что существенно отличает КХД от КЭД (квантовая электродинамика). Главное и существенное отличие КХД от КЭД заключается в том, что в квантовой электродинамике отсутствует самодействие виртуальных фотонов, которые являются переносчиками электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами. Самодействие калибровочных бозонов в квантовой хромодинамике приводит к явлению

асимптотической свободы. Это означает, что константа сильной связи растёт на больших расстояниях, в то время как на малых расстояниях она уменьшается. Последнее утверждение было доказано доказано Гроссом и Вильчеком [15, 16].

При условии малости величины константы связи, КХД может быть изучено с использованием обычной техники диаграмм Фейнмана. Эта область соответствует высоким энергиям сталкивающихся в ускорителях частиц и может быть описана теорией возмущений. В основе этого подхода лежит разложение в ряд соответствующего лагранжиана по малой константе связи.

В области низких энергий теория возмущений не применима, так как константа связи сильного взаимодействия $g_s \sim 1$, в теории не существует какого-либо малого параметра. Эта область называется режимом сильной связи. Для исследований в этой области применимы численные методы решёточной теории поля, которые успешно описывают не только спектры адронов, но также многие другие интересные явления.

Глава 3

Технические детали

В данной работе использовались ансамбли статистически независимых конфигураций калибровочных $SU(3)$ полей. Для генерации этих конфигураций использовалось улучшенное действие:

$$S = \beta_{\text{имп}} \sum_{\text{плакет}} S_{\text{плакет}} - \frac{\beta_{\text{имп}}}{20u_0^2} \sum_{\text{пр}} S_{\text{пр}}, \quad (6)$$

где $S_{\text{плакет,пр}} = (1/3)\text{Tr}(1 - U_{\text{плакет,пр}})$ - решёточные слагаемые, определённые через плакет и прямоугольную петлю соответственно, $u_0 = (W_{1 \times 1})^{1/4}$ определяется соотношением $W_{1 \times 1} = \langle (1/2)\text{Tr}U_{\text{плакет}} \rangle$, которое было рассчитано при нулевой температуре.

Расчёты были проведены в $SU(3)$ решёточной калибровочной теории без динамических кварков. Рассматривались объёмы решёток $N_t \times N_s^3 = 18^4$ и 20^4 , а также шаги решёток $a = \{0.095, 0.105, 0.115\}$ фм. В таблице 2 представлены объём решётки $N_t \times N_s^3$, шаг решётки a , соответствующие значения $\beta_{\text{имп}}$ и количество конфигураций.

$N_t \times N_s^3$	$\beta_{\text{имп}}$	a , фм	$N_{\text{конф.}}$
18^4	8.20	0.115	300
18^4	8.30	0.105	400
18^4	8.45	0.095	200
20^4	8.20	0.115	300

Таблица 2. Параметры и количество решеточных конфигураций, которые были использованы для моделирования.

Для вычисления мезонной корреляционной функции на решётке ис-

пользовались пропагаторы кварков, которые можно представить в виде ряда по собственным модам, каждое слагаемое в котором выражается через k -ую собственную функцию ψ_k и соответствующее ей собственное значение λ_k :

$$D^{-1}(x, y) = \sum_{k < M} \frac{\psi_k(x) \psi_k^\dagger(y)}{i\lambda_k + m}, \quad (7)$$

где $M = 50$ - число наименьших собственных мод, которое было использовано для вычислений. Таким образом, ищется численное решение уравнения Дирака, то есть вычисляются собственные функции и собственные значения оператора Дирака для кварка, находящегося во внешнем калибровочном магнитном поле A_μ .

$$D\psi_k = i\lambda_k\psi_k, \quad D = \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu) \quad (8)$$

В этих расчетах был использован оператор Нойбергера [27]. Этот оператор позволяет рассматривать предел безмассовых кварков без нарушения киральной симметрии и может быть записан в следующем виде

$$D_{\text{об}} = \frac{\rho}{a} \left(1 + D_W / \sqrt{D_W^\dagger D_W} \right), \quad (9)$$

где $D_W = M - \rho/a$ - оператор Вильсона-Дирака с отрицательным массовым параметром ρ/a , a -шаг решётки, M - вильсоновская добавка в действие КХД на решётке. Знаковая функция $\text{sign}(H_W)$ эрмитового оператора Вильсона-Дирака H_W определяется следующим выражением:

$$\gamma_5 \text{sign}(H_W) = D_W / \sqrt{(D_W)^\dagger D_W}. \quad (10)$$

Она рассчитывается с использованием метода приближения min-max полиномами.

Фермионные поля удовлетворяют периодическим граничным условиям в пространстве и антипериодическим граничным условиям во времени. Исследуются поведение энергии основного состояния мезона в калибровочном поле, которое является суммой глюонного поля и внешнего постоянного магнитного поля. Магнитное поле взаимодействует только

с кварками, поэтому оно было добавлено только в оператор Дирака. Постоянное магнитное поле B направлено вдоль оси z .

$$A_{\mu ij} \rightarrow A_{\mu ij} + A_{\mu}^B \delta_{ij}, \quad (11)$$

где

$$A_{\mu}^B(x) = \frac{B}{2}(x_1 \delta_{\mu,2} - x_2 \delta_{\mu,1}). \quad (12)$$

Квантование магнитного поля на торе рассматривалось в [?]. Чтобы удовлетворить граничным условиям для фермионов, магнитное поле должно быть квантовано на решетке [20]

$$qB = \frac{2\pi k}{(aN_s)^2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (13)$$

где $q = -1/3e$, aN_s - пространственный размер решётки. Вычисление собственных функций и собственных значений оператора Дирака позволяет найти значение двухточечной корреляционной функции, с помощью которой определяется энергия основного состояния мезона.

Глава 4

Корреляционные функции МЕЗОНОВ

Вычисляются корреляционные функции

$$\langle \psi^\dagger(x) \gamma_i \psi(x) \psi^\dagger(y) \gamma_j \psi(y) \rangle_A, \quad (14)$$

где γ_i, γ_j - гамма-матрицы Дирака с индексами Лоренца $i, j = 1, 2, 3$ $x = (na, n_t a)$ и $y = (n' a, n'_t a)$ - координаты на решетке.

Пространственные координаты на решётке представляются следующим образом: $n, n' \in \Lambda_3 = \{(n_1, n_2, n_3) | n_i = 0, 1, \dots, N-1\}$, n_t, n'_t - номера узлов решетки во временном направлении. В Евклидовом пространстве $\psi^\dagger = \bar{\psi}$. корреляторы ρ^\pm мезонов (14) вычисляются следующим образом:

$$\langle \bar{\psi}_{d,u}(x) \gamma_i \psi_{u,d}(x) \bar{\psi}_{u,d}(y) \gamma_j \psi_{d,u}(y) \rangle_A = -\text{Tr}[\gamma_i D_{u,d}^{-1}(x, y) \gamma_j D_{d,u}^{-1}(y, x)], \quad (15)$$

где D_d^{-1} и D_u^{-1} - пропэгаторы d и u кварков в координатном пространстве. Рассматривается случай изоспиновой симметрии, то есть когда массы u и d совпадают. Поэтому при нулевом магнитном поле $D_d^{-1} = D_u^{-1}$, однако при ненулевом магнитном поле это равенство не выполняется.

По причине того, что взаимодействие с полем u и d кварков отличается, так как кварки обладают различными зарядами, коррелятор ρ^0 мезона представляется суммой

$$\langle \bar{\psi}_d(x) \gamma_i \psi_d(x) \bar{\psi}_d(y) \gamma_j \psi_d(y) + \bar{\psi}_u(x) \gamma_i \psi_u(x) \bar{\psi}_u(y) \gamma_j \psi_u(y) \rangle_A = \quad (16)$$

$$-\text{Tr}[\gamma_i D_d^{-1}(x, y) \gamma_j D_d^{-1}(y, x)] - \text{Tr}[\gamma_i D_u^{-1}(x, y) \gamma_j D_u^{-1}(y, x)].$$

Было выполнено численное преобразование Фурье корреляторов из координатного пространства в импульсное. Известно, что при нулевом магнитном поле энергия связана с импульсом посредством соотношения $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Для того, чтобы найти энергию основного состояния, рассматриваются мезоны с нулевым пространственным импульсом \vec{p} .

Энергия основного состояния мезона с определенной проекцией спина на ось магнитного поля определяется ковариантной матрицей плотности. Матрица спиновой плотности выражается через поперечные слагаемые ($e_x = (0, 1, 0, 0)$, $e_y = (0, 0, 1, 0)$) и продольные ($e_z = (0, 0, 0, 1)$) векторов поляризации. Как следствие, энергии ρ^\pm и ρ^0 мезонов с проекцией спина $s_z = 0$ вычисляются из (15) и (16) соответственно после преобразования Фурье, где $i, j = 3$.

Комбинации корреляторов

$$C(s_z = \pm 1) = \langle O_1(t) \bar{O}_1(0) \rangle_A + \langle O_2(t) \bar{O}_2(0) \rangle_A \pm i (\langle O_1(t) \bar{O}_2(0) \rangle_A - \langle O_2(t) \bar{O}_1(0) \rangle_A) \quad (17)$$

позволяют вычислить энергии векторных мезонов с проекциями спина равными $+1$ и -1 на ось поля, где $O_1 = \psi_{d,u}^\dagger(x) \gamma_1 \psi_{u,d}(x)$, $O_2 = \psi_{d,u}^\dagger(x) \gamma_2 \psi_{u,d}(x)$ - интерполяционные операторы, отвечающие ρ^\pm мезонам. Интерполяционные операторы для случая ρ^0 строятся аналогично (17) с учетом (16).

Корреляционная функция может быть разложена в ряд по собственным состояниям Гамильтониана \hat{H}

$$\begin{aligned} \langle O_i(t) \bar{O}_j(0) \rangle_T &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} \langle m | e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O}_i | n \rangle \langle n | e^{-t\hat{H}} \hat{O}_j^\dagger | m \rangle = \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-(T-t)E_m} \langle m | \hat{O}_i | n \rangle e^{-tE_n} \langle n | \hat{O}_j^\dagger | m \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, E_m and E_n -энергии возбужденных состояний с индексами m и n , и $Z = \sum_n \langle n | e^{-T\hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-TE_n}$ -статистическая сумма.

В выражении (18) отбрасывается множитель e^{-TE_0} , и получается следующая зависимость

$$\langle O_i(t)\bar{O}_j(0)\rangle_T = \frac{\sum_{m,n} e^{-(T-t)\Delta E_m} \langle m|\hat{O}_i|n\rangle e^{-t\Delta E_n} \langle n|\hat{O}_j^\dagger|m\rangle}{1 + e^{-T\Delta E_1} + e^{-T\Delta E_2} + \dots}, \quad (19)$$

где $\Delta E_n = E_n - E_0$. В термодинамическом пределе теории $T \rightarrow \infty$ справедливо

$$\langle O_i(t)\bar{O}_j(0)\rangle_{T \rightarrow \infty} = \sum_n \langle 0|\hat{O}_i|n\rangle \langle n|\hat{O}_j^\dagger|0\rangle e^{-tE_n}. \quad (20)$$

Тогда решёточный коррелятор можно представить в виде

$$C(n_t) = \langle \psi^\dagger(\mathbf{0}, n_t) \gamma_i \psi(\mathbf{0}, n_t) \psi^\dagger(\mathbf{0}, 0) \gamma_j \psi(\mathbf{0}, 0) \rangle_A = \sum_k \langle 0|\hat{O}_i|n\rangle \langle n|\hat{O}_j^\dagger|0\rangle e^{-n_t a E_n}. \quad (21)$$

Из (21) очевидно, что при больших n_t основной вклад вносит основное состояние. Учитывая периодические граничные условия на решетке, получается окончательная формула

$$C_{fit}(n_t) = A_0 e^{-n_t a E_0} + A_0 e^{-(N_T - n_t) a E_0} = 2A_0 e^{-N_T a E_0 / 2} \cosh\left(\left(\frac{N_T}{2} - n_t\right) a E_0\right), \quad (22)$$

где A_0 -постоянная, E_0 -энергия основного состояния. Эта формула используется для фитирования корреляционных функций, полученных из кварковых решёточных пропагаторов, откуда можно вычислить энергии основного состояния.

Глава 5

Вычисление эффективной массы с учетом погрешностей

Эффективные массы ρ -мезона m_{eff} были извлечены из фитов гиперболическим косинусом (22) с параметрами фитирования $m_{eff} = aE_0$ и A_0 , выполненных по методу χ^2 . Эффективная масса также может быть найдена из следующего уравнения:

$$\frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)} = \frac{\cosh(m_{eff}(n_t - N_T/2))}{\cosh(m_{eff}(n_t + 1 - N_T/2))}, \quad (23)$$

в котором учитываются граничные условия на решетке. Было проверено, что результаты для энергий совпадают с результатами, полученными из (23), с учетом корреляций между соседними точками плато. Чтобы контролировать стабильность результирующих значений m_{eff} , то есть определить плато $m_{eff}(n_t)$, фиты выполнялись в 4 диапазонах $n_t = [\frac{N_T}{2} - k, \frac{N_T}{2} + k]$, $k = 1..4$, где качество фитирования является удовлетворительным, $\chi^2/d.o.f. \sim 1$. Несмотря на то, что качество фитирования было часто приемлемым уже при $k \simeq 4$, значения m_{eff} при $k = 4$ все еще были систематически завышены.

Обычно плато m_{eff} достигалось при $k = 3$, то есть $n_t = 6 \div 12$ ($7 \div 13$) для объёма решётки 18^4 (20^4). В некоторых случаях более узкий диапазон n_t был выбран после визуального осмотра фитов, чтобы гарантиро-

вать, что m_{eff} была в пределах плато. Типичный график зависимости эффективной массы $m_{eff}(\rho^0)$ от диапазона фитирования n_t показан на рисунке Рис. 1 для решётки с объёмом 18^4 , шагом $a = 0.115$ фм и проекцией спина $|s_z| = 0, 1$ на ось магнитного поля при двух различных значениях магнитного поля.

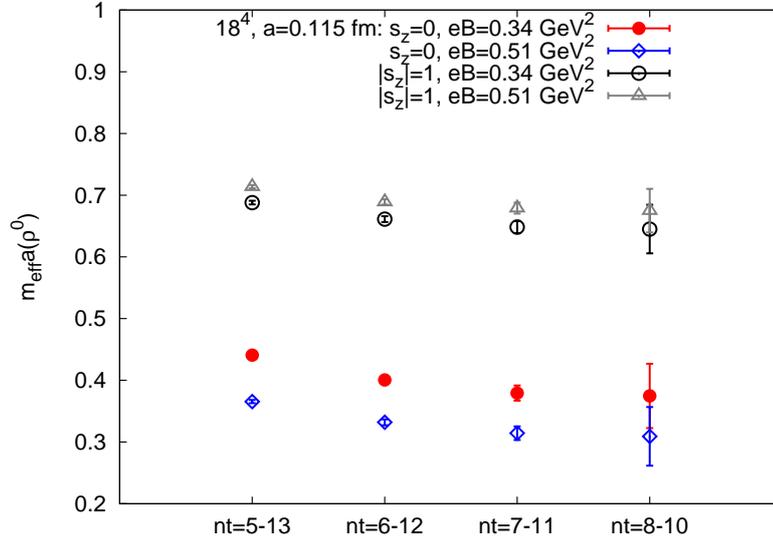


Рис. 1. График зависимости эффективной массы $m_{eff} \rho^0$ -мезона для проекций спина $s_z = 0$ и $|s_z| = 1$ на ось магнитного поля в зависимости от диапазона фитирования n_t . Результаты были получены на решётке с объёмом 18^4 , шагом 0.115 фм и массой пиона $m_\pi = 541$ МэВ.

Глава 6

Магнитная

поляризуемость ρ^\pm мезона

В магнитном поле энергетические уровни точечной заряженной частицы описываются следующей зависимостью[21]:

$$E^2 = p_z^2 + (2n + 1)|qB| - gsqB + m^2, \quad (24)$$

где p_z -импульс в направлении магнитного поля, n -главное квантовое число, q -электрический заряд частицы, g - g -фактор, s и m -спин и масса частицы соответственно.

Магнитное поле может влиять на внутреннюю структуру векторных мезонов, если оно достаточно сильное. Это влияние характеризуется ненулевыми магнитными поляризуемостями и гиперполяризуемостями, которые зависят от проекции спина мезона s_z на направление магнитного поля. Это означает, что отклик фермионных токов внутри мезона определяется взаимной ориентацией кварков и внешнего магнитного поля. Эти явления интересны и могут внести вклад в поляризацию испускаемых заряженных частиц в сильном магнитном поле, которые мы обсудим ниже.

Согласно сохранению четности, для проекции спина $s_z = 0$ квадрат энергии корректируется нелинейными членами четных степеней в магнитном поле. Для проекций спина $s_z = +1$ и $s_z = -1$ квадрат энергии содержит члены как четных, так и нечетных степеней в поле. Было обнаружено, что вклады этих членов зависят от рассматриваемого интер-

вала магнитных полей. Таким образом, для рассматриваемых решеток поправка третьего степенного члена к низшему энергетическому подуровню с $qs_z = +1$ не превосходит 20% и совместима с ошибками при $eB \in [0, 1.2] \text{ ГэВ}^2$. Аналогично, коррекция четвертой степени не дает значительного вклада в квадрат энергии для случая $s_z = 0$.

Поэтому мы получаем дипольную магнитную поляризуемость для проекции спина $s_z = 0$ из фитирования данных решетки следующим соотношением

$$E_{s_z=0}^2 = |eB| + m^2 - 4\pi t\beta_m(eB)^2 \quad (25)$$

при $eB \in [0, 1.2] \text{ ГэВ}^2$, где eB -магнитное поле в ГэВ^2 , β_m -дипольная магнитная поляризуемость и параметр фитирования, t -также параметр фитирования. Результаты решетки вместе с аппроксимирующими кривыми показаны на Рис. 2 ,где показан квадрат энергии, растущий с увеличением значения магнитного поля. При $eB \sim 0.2 \div 0.3 \text{ ГэВ}^2$ наблюдается горб, который приводит к увеличению погрешностей определения значения $\beta_m(s_z = 0)$. Это может быть результатом влияния шага решетки и объема решетки или иметь какое-то физическое объяснение. К сожалению, из-за больших ошибок вычислений строгий анализ не может быть проведен, но отмечу, что этот горб отсутствует для решетки с меньшим решёточным расстоянием $a = 0.095 \text{ фм}$. Следовательно, это, скорее всего, артефакт решёточного расстояния.

Значения β_m со значениями $\chi^2/n_{d.o.f.}$ и решёточными параметрами представлены в Таблице 3.

Поведение квадрата энергии в случае $qs_z = +1$ (что соответствует ρ^- при $s_z = -1$ и ρ^+ при $s_z = +1$) может быть описано следующей зависимостью:

$$E_{qs_z=+1}^2 = |eB| - g(eB) + m^2 - 4\pi t\beta_m(eB)^2 \quad (26)$$

при $eB \in [0, 1.2] \text{ ГэВ}^2$. Магнитная дипольная поляризуемость была получена из фитирования данных решетки по соотношению (26), где t , g и β_m параметры фитирования.

Эта энергетическая составляющая представлена на Рис.3 для объёма решетки 18^4 , шага решётки 0.105 фм , 0.115 фм и для объёма решётки 20^4 , шага решётки 0.115 фм . Также представлены значения массы пиона.

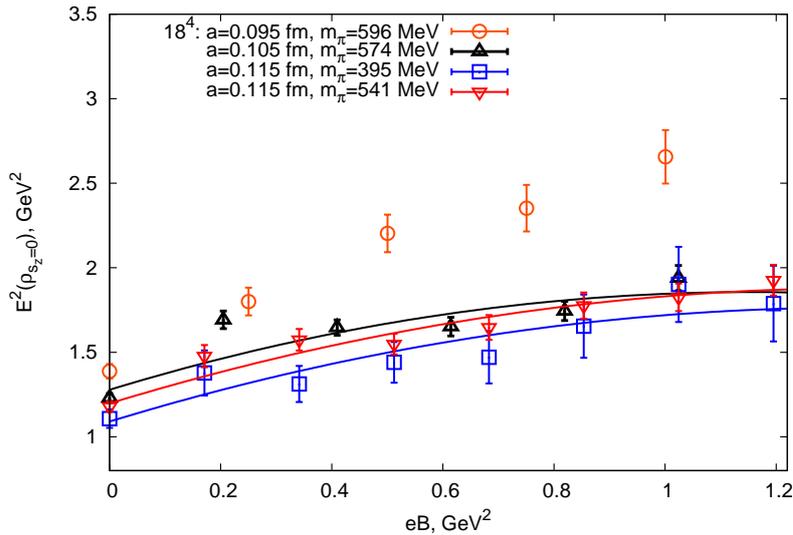


Рис. 2. Квадрат энергии заряженного ρ мезона для проекции $s_z = 0$ в зависимости от значения магнитного поля для различных наборов параметров решётки. Сплошные линии соответствуют фитам данных решетки, полученных с использованием формулы (25)

V	m_π (МэВ)	a (фМ)	β_m (ГэВ $^{-3}$)	$\chi^2/d.o.f.$
18^4	574 ± 7	0.105	0.03 ± 0.01	6.90
18^4	395 ± 6	0.115	0.028 ± 0.006	0.53
18^4	541 ± 3	0.115	0.027 ± 0.004	1.25

Таблица 3. Магнитная дипольная поляризуемость β_m заряженного ρ мезона с проекцией спина $s_z = 0$ была получена из фитирования решеточных данных(25). Массы пионов представлены во второй колонке, шаги решеток в третьей, значения $\chi^2/d.o.f$ представлены в последней.

Значения поляризуемости магнитного диполя представлены в Таблице 4. Эти результаты получены из 3-параметрического подбора. Значения ошибок β_m соответствует действительности.

На Рис.4 представлен квадрат энергии для различных проекций спина мезона на ось магнитного поля при объеме решётки 18^4 , шаге решётки $a = 0.115$ фм и массе пиона равной 541 МэВ. Ошибки энергий для случая $qs_z = -1$ достаточно высоки. Для случая $qs_z = -1$ для фитирования использовалась формула

$$E_{qs_z=-1}^2 = |eB| + g(eB) + m^2 - 4\pi m\beta_m(eB)^2. \quad (27)$$

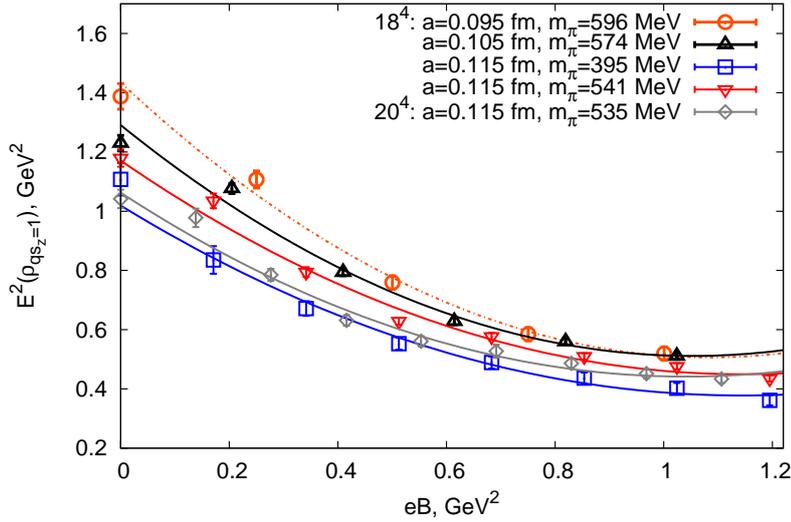


Рис. 3. Квадрат энергии заряженного ρ мезона в случае $qs_z = +1$ в зависимости от значения магнитного поля для различных параметров решётки. Сплошные линии соответствуют фитам данных решетки, полученным с использованием формулы (26)

Чтобы оценить вклад поляризуемости магнитного диполя в лептонную асимметрию, необходимо знать магнитную поляризуемость диполя для случаев $s_z = +1$ и $s_z = -1$. Однако из-за больших статистических ошибок магнитная дипольная поляризуемость не может быть получена из энергетической зависимости при $s_z = +1$, если рассматривается ρ^- , или из $s_z = -1$, если мы рассматривается ρ^+ . Тем не менее, сохранение четности требует равенства магнитных дипольных поляризуемостей для $s_z = +1$ и $s_z = -1$. Тогда это следует из (26) и (27)

$$E_{qs_z=-1}^2 - E_{qs_z=+1}^2 = 2g(eB). \quad (28)$$

Чтобы убедиться, что соотношение (28) удовлетворяется для наших данных, предоставляется значение $(E_{qs_z=-1}^2 - E_{qs_z=+1}^2)/2$ относительно значения магнитного поля на Рис. 5. Эта величина линейно возрастает с ростом магнитного поля. Значения g -фактора, полученные из этих фитов, равны 2.4 ± 0.1 для шага решётки $a = 0.105$ фм и 2.40 ± 0.04 для шага решётки $a = 0.115$ фм. Ошибки определения g -фактора недооцениваются, поскольку плато эффективной массы очень "шумное" для $qs_z = -1$.

V	m_π (МэВ)	a (фм)	g -factor	β_m (ГэВ $^{-3}$)	$\chi^2/d.o.f.$
18^4	574 ± 7	0.105	2.48 ± 0.19	-0.049 ± 0.010	2.66
18^4	541 ± 3	0.115	2.26 ± 0.14	-0.041 ± 0.006	2.32
20^4	535 ± 4	0.115	2.19 ± 0.12	-0.044 ± 0.006	1.48
18^4	395 ± 6	0.115	2.12 ± 0.13	-0.039 ± 0.006	1.49

Таблица 4. Магнитный дипольный момент и магнитная дипольная поляризуемость заряженного ρ мезона с $qs_z = +1$ при шагах решётки 0.105 фм, 0.115 фм, объёме решётки 18^4 , различных масс пиона и для шага решётки 0.115 фм, объёма решётки 20^4 и массы пиона $m_\pi = 535(4)$ МэВ с их ошибками и значениями $\chi^2/d.o.f.$ Результаты были получены с использованием 3-параметрического фитирования (26) при $eB \in [0, 1.2]$, они представлены на Рис. 3.

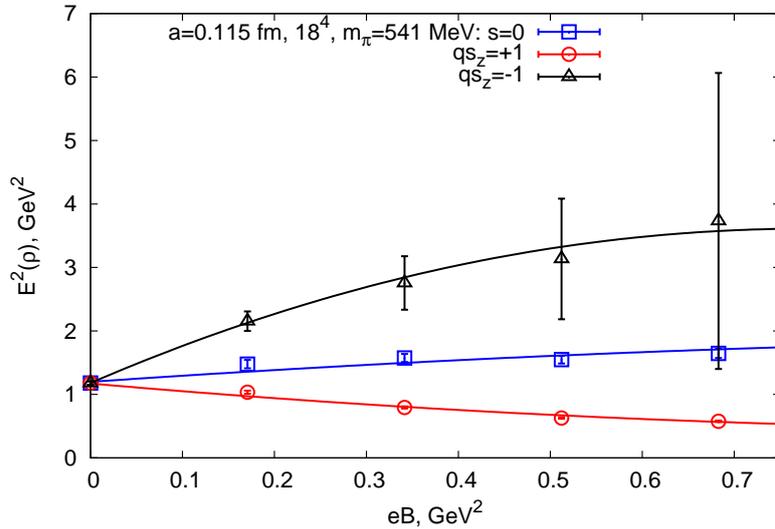


Рис. 4. Квадрат энергии заряженного ρ мезона при объёме решётки 18^4 , шаге решётки 0.115 фм and и массе пиона $m_\pi = 541$ МэВ в зависимости от заряда мезона и проекции спина на ось магнитного поля.

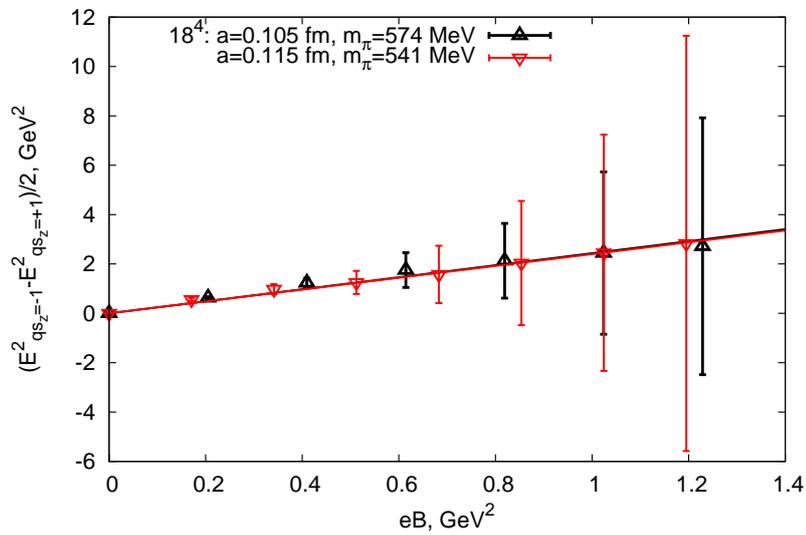


Рис. 5. Значение $(E^2_{qs_z=-1} - E^2_{qs_z=+1})/2$ в зависимости от значения магнитного поля при объёме решётки 18^4 , шагах решётки 0.105 фм и 0.115 фм.

Глава 7

Магнитная поляризуемость ρ^0 мезона

Во внешнем магнитном поле u -кварки и d -кварки по-разному связаны с магнитным полем. Это необходимо учитывать при расчётах. Энергии могут быть найдены из корреляционной функции (16) при увеличенной статистике[22].

В релятивистском случае энергия нейтрального ρ мезона с проекцией спина $s_z = 0$ описывается следующей зависимостью

$$E^2 = m^2 - 4\pi t \beta_m (eB)^2 - 4\pi t \beta_m^{h2} (eB)^4 - 4\pi t \beta_m^{h4} (eB)^6 - 4\pi t \beta_m^{h6} (eB)^8 - \dots, \quad (29)$$

где β_m^{h2} , β_m^{h4} и β_m^{h6} -различные магнитные гиперполяризуемости высших порядков, m -масса мезона при нулевом поле.

На Рис. 6 представлен квадрат энергии ρ^0 мезона с $s_z = 0$ в зависимости от значения поля в квадрате для различных решёток и масс пиона при $(eB)^2 \in [0 : 0.5] \text{ ГэВ}^4$. Решёточные данные изображены точками. Наблюдается быстрое уменьшение энергии для всех решёток. Это также сильно зависит от шага решетки, объема решетки и массы пиона. Линии соответствуют результатам, полученным с использованием формулы (29), когда также были включены члены $\sim (eB)^{10}$ и $\sim (eB)^{12}$. Для решётки с шагом $a = 0.105$ фм фиты были выполнены при $(eB)^2 \in [0 : 1.7] \text{ ГэВ}^4$, для других решёток используется $(eB)^2 \in [0 : 1.5] \text{ ГэВ}^4$. Члены более высоких степеней поля начинают вносить значительный вклад

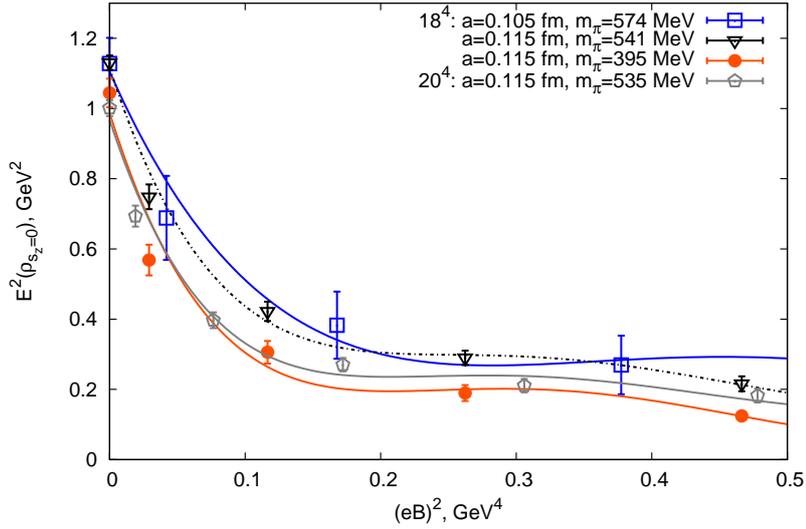


Рис. 6. Квадрат энергии ρ^0 ($s_z = 0$) основного состояния в зависимости от значения поля в квадрате. Данные показаны точками для различных шагов ешётки, масс пионов и двух объемов решеток 18^4 и 20^4 с фитами, полученными по формуле (29).

при низких полях. Таким образом, трудно извлечь магнитную поляризуемость, потому что условие квантования накладывает ограничение на минимальное значение поля. Экстраполяция до кирального предела не проводится, поскольку интерес представляют только качественные прогнозы на данном этапе исследований.

В Таблице 5 представлена магнитная поляризуемость β_m и гиперполяризуемость β_m^{2h} полученные благодаря фитам. Решёточный объем V , шаг решётки a , масса пиона m_π , интервалы полей, выбранных для процедуры фитирования и $\chi^2/n.d.o.f.$ также представлены. Результаты не противоречат друг другу в пределах ошибок.

При $eB \in [0 : 1.2]$ ГэВ² для проекции спина $|s_z| = 1$ на ось поля, квадрат энергии нейтрального векторного мезона может быть описан следующим соотношением:

$$E^2 = m^2 - 4\pi t \beta_m (eB)^2 - 4\pi t \beta_m^{h1} (eB)^3. \quad (30)$$

На Рис. 7 приведен квадрат энергии для ρ^0 мезона с проекцией спина $|s_z| = 1$, энергии нейтрального векторного мезона при $s_z = +1$ и $s_z = -1$ совпадают, по причине сохранения С-чётности. Магнитная поля-

V	$a(\text{фм})$	$m_\pi(\text{МэВ})$	$\beta_m(\text{ГэВ}^{-3})$	$\beta_m^{2h}(\text{ГэВ}^{-7})$	n	$(eB)^2(\text{ГэВ}^4)$	$\chi^2/d.o.f.$
18^4	0.105	574 ± 7	0.66 ± 0.16	-2.51 ± 0.98	10	[0 : 1.7]	1.04
18^4	0.115	541 ± 3	0.90 ± 0.16	-5.11 ± 1.59	12	[0 : 1.5]	2.46
20^4	0.115	535 ± 4	0.95 ± 0.15	-5.78 ± 1.60	12	[0 : 1.5]	2.63
18^4	0.115	395 ± 6	0.98 ± 0.30	-5.79 ± 2.74	12	[0 : 1.5]	3.32

Таблица 5. Значение магнитной дипольной поляризуемости β_m и магнитной гиперполяризуемости β_m^{2h} для ρ^0 с проекцией спина $s_z = 0$ представлены для различных объёмов решётки V , шагов решётки a и масс пиона m_π . Степень полинома n , диапазон поля,используемый для фитирования, и значения $\chi^2/d.o.f$ представлены в столбцах с шестого по восьмой соответственно.

ризуемость β_m получена фитированием решёточных данных с использованием формулы (30) для шагов решётки 0.105 фм и 0.115 фм, где m , β_m и β_m^{h1} -параметры фитирования. Решёточные данные для $a = 0.084$ фм и $a = 0.095$ фм не предоставляют возможности извлечь статистически значимые значения β_m , но они представлены, для того чтобы проверить объем решетки и влияние на шаг решётки. Значения β_m с ошибками и другие параметры представлены в Таблице 6. Результаты не протеворечат друг другу в пределах ошибок.

V	$a(\text{фм})$	$m_\pi(\text{МэВ})$	$\beta_m(\text{ГэВ}^{-3})$	$\beta_m^{1h}(\text{ГэВ}^{-5})$	$eB, \text{ГэВ}^2$	$\chi^2/d.o.f.$
18^4	0.105	574 ± 7	-0.10 ± 0.02	0.07 ± 0.02	[0 : 1.1]	0.47
18^4	0.115	541 ± 3	-0.07 ± 0.02	0.03 ± 0.03	[0 : 1.1]	0.87
20^4	0.115	535 ± 4	-0.10 ± 0.02	0.06 ± 0.03	[0 : 1.1]	1.54
18^4	0.115	395 ± 6	-0.11 ± 0.03	0.08 ± 0.03	[0 : 1.1]	0.65

Таблица 6. Значение магнитной дипольной поляризуемости β_m и магнитной гиперполяризуемости β_m^{1h} представлены для ρ^0 при $|s_z| = 1$, для объёмов решётки 18^4 и 20^4 , шагов решётки 0.105 фм и 0.115 фм и различных масс пиона. Четвертый и последний столбцы содержат интервалы магнитного поля, используемого для фитирования и $\chi^2/d.o.f.$ соответственно.

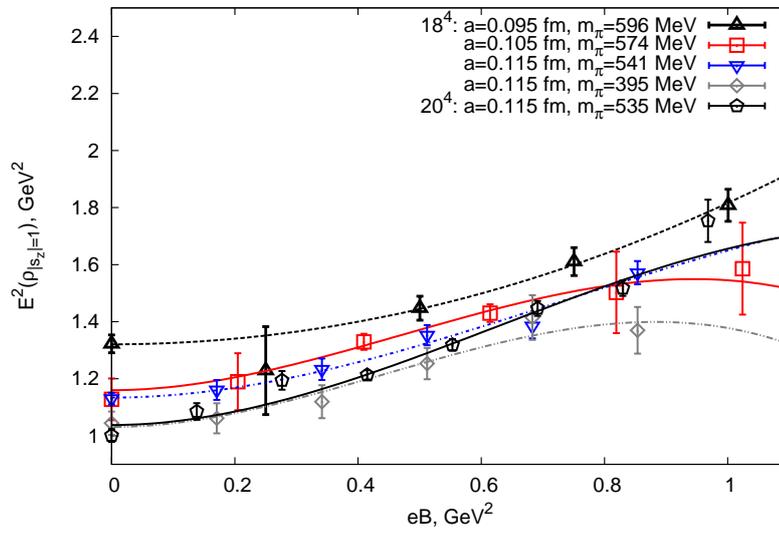


Рис. 7. Квадрат энергии $\rho^0(|s_z| = 1)$ мезона в зависимости от магнитного поля для различных шагов решётки, масс пиона, и 2 объёмов решётки 18^4 и 20^4 . Линии соответствуют фитам данных решетки, полученных по формуле (30).

Глава 8

Тензорная магнитная поляризуемость

В предыдущих главах было обнаружено, что энергия ρ^0 мезона с $s_z = \pm 1$ увеличивается относительно значения магнитного поля, в то время как энергия ρ^0 мезона с $s_z = 0$ быстро уменьшается относительно значения магнитного поля. Для ρ^\pm энергия убывает при случае $qs_z = +1$ и возрастает при случаях $qs_z = 0$ и $qs_z = -1$.

Такое энергетическое поведение имеет некоторые физические последствия. Малая энергия более прибыльна, чем высокая, поэтому в столкновениях должна преобладать продольная поляризация ρ^0 мезона, соответствующая случаю $s_z = 0$. Поэтому при нецентральной столкновении тяжелых ионов магнитное поле способствует продольной поляризации ρ^0 мезонов.

Дилептонные асимметрии в нецентральных столкновениях тяжелых ионов зависят от энергетического поведения векторных мезонов. Согласно принципу векторного доминирования, векторные мезоны могут напрямую превращаться в виртуальные фотоны. В свою очередь, электромагнитный распад виртуальных фотонов является одним из основных источников образования дилептона при столкновениях тяжелых ионов. Когда дилептоны рождаются в нецентральных столкновениях тяжелых ионов, их анизотропия зависит от отклика спиновой структуры промежуточных резонансов, таких как ρ^0 на магнитное поле столкновения. По этой причине особый интерес представляет выявление и различие между

различными источниками дилептонов, испускаемых при столкновениях нецентральных тяжелых ионов.

Форма распределения дилептона характеризуется следующим дифференциальным сечением:

$$\frac{d\sigma}{dM^2 d\cos\theta} = A(M^2)(1 + B \cos^2 \theta), \quad (31)$$

где $M^2 = (p_1 + p_2)^2$ -энергия лептонной пары в их системе покоя, p_1 and p_2 -четыре импульса лептонов, θ -угол между импульсами виртуального фотона и лептона. Коэффициент асимметрии B определяется поляризацией виртуальных фотонов, возникающих при столкновениях:

$$B = \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel}}, \quad (32)$$

где $\gamma_{\perp, \parallel}$ -вклады поперечной и продольной поляризаций виртуального промежуточного фотона.

Данные решеточные расчеты позволяют получить оценку коэффициента асимметрии для таких процессов. Для векторной частицы в декартовом базисе тензор поляризации имеет следующий вид:

$$P_{ij} = \frac{3}{2} \langle s_i s_j + s_j s_i \rangle - 2\delta_{ij}. \quad (33)$$

Если $w_{s_z=+1}$, $w_{s_z=-1}$ и $w_{s_z=0}$ -вероятности того, что ρ -мезон имеет спиновую проекцию на направление поля, равную $+1$, -1 и 0 соответственно, то значение компоненты P_{33} может быть представлено, с точки зрения этих вероятностей, в следующем виде:

$$P_{33} = w_{s_z=+1} + w_{s_z=-1} - 2w_{s_z=0} = \frac{N_{s_z=+1} + N_{s_z=-1} - 2N_{s_z=0}}{N_{s_z=+1} + N_{s_z=-1} + N_{s_z=0}}, \quad (34)$$

где $N_{s_z=+1}$, $N_{s_z=-1}$ и $N_{s_z=0}$ -числа частиц с различными проекциями спина.

При $w_{s_z=+1} + w_{s_z=-1} + w_{s_z=0} = 1$, следовательно, $P_{33} = 1 - 3w_{s_z=0}$ и $-2 \leq P_{33} \leq 1$. Тензорная поляризуемость описывает влияние магнитного поля на спиновые состояния ρ мезона, в свою очередь, спиновые состояния и тензорная поляризация обнаруживаются при его распаде на

лептонную пару. В сильном магнитном поле спин частицы имеет тенденцию выравниваться вдоль направления поля, но ненулевая температура приводит к перевороту спина.

Дифференциальное сечение (распад ρ мезона на лептонную пару) может быть представлено как:

$$\frac{d\sigma}{dM^2 d\cos\theta} = A(M^2) \left(1 + \frac{1}{4} P_{33} (3 \cos^2 \theta - 1)\right). \quad (35)$$

В сравнении с (31) можно заметить:

$$B = \frac{3P_{33}}{4 - P_{33}}. \quad (36)$$

Для поперечно поляризованного ρ мезона $B = 1$ и для продольно поляризованного $B = -1$.

Также введу понятие тензорной поляризуемости:

$$\beta_t = \frac{\beta_{s_z=+1} + \beta_{s_z=-1} - 2\beta_{s_z=0}}{\beta_{s_z=+1} + \beta_{s_z=-1} + \beta_{s_z=0}}, \quad (37)$$

которая является мерой влияния магнитного поля на векторный мезон, в частности для сильных магнитных полей и температуры $P \sim \beta_t$.

Было проведено вычисление β_t на решётке с учетом равенства $\beta_{s_z=+1} = \beta_{s_z=-1}$. Результаты представлены в Таблице 7 для нейтрального ρ -мезона и в Таблице 8 для заряженного ρ -мезона. Большие отрицательные значения β_t свидетельствуют о доминирующей продольной поляризации ρ^0 -мезона. Дилептоны излучаются в основном в направлениях, перпендикулярных оси магнитного поля. Это убедительный результат, ясно видно из графиков 6 и 7, что энергия состояния с $s_z = 0$ убывает, в то время как энергия состояния с $|s_z| = 1$ возрастает.

V	$a(\text{фм})$	$m_\pi(\text{МэВ})$	β_t
18^4	0.105	574 ± 7	-3.3 ± 0.6
18^4	0.115	541 ± 3	-2.6 ± 0.2
20^4	0.115	535 ± 4	-2.8 ± 0.3
18^4	0.115	395 ± 6	-2.9 ± 0.5

Таблица 7. Тензорная поляризуемость β_t ρ^0 мезона представлена в последнем столбце для объема решётки V , шага решётки a и массы пиона m_π .

V	$a(\text{фм})$	$m_\pi(\text{МэВ})$	β_t
18^4	0.105	574 ± 7	2.3 ± 0.7
18^4	0.115	541 ± 3	2.5 ± 0.5
18^4	0.115	395 ± 6	2.7 ± 0.7

Таблица 8. Тензорная поляризуемость β_t of the ρ^\pm представлена для различных решёток и масс пиона

Глава 9

Заключение

В данной работе представлен расчёт магнитной дипольной и тензорной поляризуемостей ρ^0 и ρ^\pm мезонов на решётке. Также был проведён тщательный анализ поведения плато эффективной массы в зависимости от количества узлов, используемых для фитирования по гиперболической функции косинуса. Помимо поляризуемостей, были посчитаны g -фактор для ρ^\pm мезонов. С учетом того, что статистика увеличена и включены большие наборы данных, были получены наиболее статистически значимые значения магнитных дипольных поляризуемостей для случая с проекцией спина $s_z = 0$. Наиболее интересным является тот факт, что в столкновениях ионов на ускорителях доминируют ρ -мезоны с проекциями спина, при которых энергия ρ -мезона уменьшается с увеличением магнитного поля.

Литература

- [1] M. Gell-Mann, Caltech preprint CTSL-20, 1961.
- [2] Y. Ne'eman, Nucl. Phys., vol. 26, p. 222, 1961.
- [3] F. Gursey, L.A. Radicati, Phys. Rev. Lett., vol. 47, p. 1792, 1981.
- [4] A. Pais, Phys. Rev. Lett, vol. 13, p. 175, 1964.
- [5] M. Gell-Mann, Phys. Lett., vol. 8, p. 214, 1964.
- [6] G. Zweig, CERN preprints Th. 401 and 412, 1964
- [7] O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett., vol. 13, p. 598, 1964.
- [8] M.Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev., vol. 139, p. B1006, 1965.
- [9] N. Bogolubov, B. Struminsky, A. Tavkhelidze, JINR Preprint D-1968, Dubna, 1965.
- [10] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., vol. 31, p. 494, 1973.
- [11] D.V.Nanopoulos, Nuovo Cimento Lett., 8, 873, 1973.
- [12] E.V. Lushevskaya, O.E. Solovjeva, O.V. Teryaev, *Determination of the properties of vectors mesons in external magnetic field by quenched $SU(3)$ lattice QCD*, *JHEP* **9** (2017) 142
- [13] E.L. Bratkovskaya, O.V. Teryaev, V.D. Toneev, *Anisotropy of dilepton emission from nuclear collisions*, *Physics Letters B* **348** (1995) 283
- [14] G. Baym, T. Hatsuda and M. Strickland, *Structure of virtual photon polarization in ultrarelativistic heavy-ion collisions*, *Nucl. Phys. A* **967** (2017) 712

-
- [15] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, p. 1323, 1973
- [16] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.*, vol. D9, p. 980, 1974.
- [17] G.'t Hooft, *A property of electric and magnetic flux in non-abelian gauge theories*, *Nucl. Phys. B* **153** (1979) 141
- [18] H. Zainuddin, *Group-theoretic quantization of a particle on a torus in a constant magnetic field*, *Phys. Rev. D* **40** (1989) 636
- [19] G.-H. Chen, *Degeneracy of Landau levels and quantum group $sl_q(2)$* , *Phys. Rev. B* **53** (1996) 9540
- [20] M.H. Al-Hashimi and U.J. Wiese, *Discrete Accidental Symmetry for a Particle in a Constant Magnetic Field on a Torus*, *Annals Phys.* **324** (2009) 343 [arXiv: 0807.0630]
- [21] Dmitri E. Kharzeev, Karl Landsteiner, Andreas Schmitt, and Ho-Ung Yee, *Strongly interacting matter in magnetic fields: an overview*, *Lecture Notes in Physics Volume* **871** (2013)
- [22] E.V. Luschevskaya, O.E. Solovjeva, O.E. Kochetkov and O.V. Teryaev, *Magnetic polarizabilities of light mesons in $SU(3)$ lattice gauge theory*, *Nucl. Phys. B* **898** (2015) 627 [arXiv: 1411.4284]