Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ: НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

(бакалаврская работа)

Студент:
Калугин Алексей Евгеньевич

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Огарков Станислав Леонидович,
канд. физ.-мат. наук

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2021

Аннотация

Рассматриваются функциональные уравнения Гамильтона-Якоби (ФГЯ), Шрёдингера (ФШ), Вильсона-Полчински (ВП) и их иерархии. Иерархия ФГЯ решается на δ-конфигурации $\varLambda$. Для ФШ выводится квазиклассическое приближение. Показывается связь между иерархией ФШ и иерархиями пары: квантового ФГЯ и уравнения непрерывности. В рамках квазиклассического подхода находится решение иерархии ФШ и выражения для двух- и четырёхточечных функций Грина уравнения ВП для теории φ^4. Рассматривается приближение Blaizot, Méndez-Galain, Wschebor (BMW) для ФШ, предлагается его улучшение — BMW_+. В рамках теории возмущений вычисляется поправка к квазиклассическому решению ФШ. Рассматривается функциональное уравнение для $\mathcal{S}$-матрицы. Предлагается класс теорий в котором начальные условия позволяют получить зависимость $\mathcal{S}$-матрицы от значения поля φ в виде ряда. Предлагается обобщение BMW_+-приближения на высшие вариационные производные $\mathcal{S}$-матрицы. Показывается, что уравнения, полученные этим методом, имеют одинаковый вид во всех порядках. Рассматривается класс неполиномиальных теорий, заданный функциональным рядом по композитным полям, для которого находятся начальные условия для уравнений на $\mathcal{S}$-матрицу в BMW_+-приближении. Строится диаграммная техника для нахождения начальных условий в высших порядках. Находится зависимость $\mathcal{S}$-матрицы от значения поля в виде ряда.

Благодарности

Выражаю благодарность научному руководителю Станиславу Леонидовичу Огаркову за неоценимую помощь в написании дипломной работы, за наставничество и предоставленные возможности.

Содержание

1. Введение

Формализм функционального интеграла лежит в основе большого числа современных физических теорий [1, 2, 3], поэтому его вычисление в общем случае является чрезвычайно важной математической задачей. В большинстве интересных случаев это, однако, не представляется возможным [4]. Тем не менее, зачастую можно переформулировать задачу вычисления функционального интеграла на языке уравнений в вариационных производных (УрВП) [2], для которых развиты различные техники приближенных аналитических вычислений [5].

В общем случае, решение УрВП может быть представлено в виде некоторого функционального ряда, в простейшем случае — функционального ряда Тейлора (ФРТ). В этом случае УрВП сводится к бесконечной системе (иерархии, цепочке) интегро-дифференциальных уравнений на коэффициентные функции (функции Грина, вершинные функции, корреляционные функции), сложным образом зацепленных друг за друга [2]. Частым случаем в квантовой теории поля (КТП) и функциональной ренормгруппе (ФРГ) является $(n; n+2)$-зацепление, при котором в уравнение n-го порядка входит $(n+2)$-точечная функция Грина. К сожалению, иерархии большинства физически интересных УрВП (Дайсон-Швингер, Томонага-Швингер, Вильсон-Полчински, Веттерих-Моррис, функциональное уравнение Шрёдингера) содержат именно такой тип зацепления. В таком случае, как и, например, в случае $(n;\ n+1)$-зацепления (такой тип зацепления имеет место в иерархии ББГКИ (Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона) [6]) алгоритм поиска точного решения всех уравнений иерархии не известен [7]. По этой причине, в реальных вычислениях используются различные аппроксимационные схемы вычислений. Например, часто используемые для приближенного решения ФРГ-потоковых уравнений в физике твёрдого тела вершинное разложение (Vertex Expansion) и градиентное разложение (Derivative Expansion) включают в себя т.н. “truncation,” т.е. отбрасывание уравнений порядков выше некоторого n из иерархии и исключение высших функций Грина из оставшихся уравнений некоторым согласованным способом [5].

Как мы покажем в первой главе, от перечисленных выше УрВП функциональное уравнение ФГЯ отличается тем, что его иерархия имеет значительно более простую структуру и не содержит $(n; n+2)$-зацепления, а поэтому, как мы покажем ниже, его иерархия может быть точно решена в любом порядке.

После рассмотрения ФГЯ мы переходим к рассмотрению функционального уравнения Шрёдингера (ФШ) и его иерархии. Мы вводим функциональное квазиклассическое приближение, в котором иерархия ФШ, содержащая $(n; n+2)$-проблему, приближенно сводится к гораздо более простым иерархии квантового ФГЯ и иерархии функционального уравнения непрерывности.

Далее мы используем опыт решения ФШ на другом физически интересном уравнении — уравнение Вильсона-Полчински (ВП), на котором основана одна из формулировок метода функциональной ренормгруппы (ФРГ). Оно также содержит $(n; n+2)$-проблему, и чтобы его решить, мы вводим аналог квазиклассического приближения ФШ, в котором иерархия ВП сводится к иерархии типа ФГЯ.

Во второй части работы рассматривается BMW-приближение и предлагается более точный его аналог — BMW_+-приближение. Главная идея этих приближений состоит в рассмотрении производных функционалов на ненулевом поле в специальной кинематике. Используя это приближение можно свести старшие вариационных производные функционала к младшим и замкнуть уравнение иерархии, переписав его через функции одного порядка, и тем самым избавится от $(n; n+2)$-зацепления.

Мы развиваем технику BMW_+ на ФШ и показываем, как уравнения иерархии ФШ сводится к уравнению теплопроводности на комплексную функцию с квадратичной (комплексной) нелинейностью. Решая это уравнение с помощью теории возмущений по потенциалу мы находим первую поправку к квазиклассическому волновому функционалу.

В последней части работы мы рассматриваем уравнение на функционал $\mathcal{S}$-матрицы в скалярных неполиномиальных теориях поля определенного класса. С помощью техники BMW_+, развитой при рассмотрении иерархии ФШ, мы находим полевую зависимость $\mathcal{S}$-матричного функционала на постоянных конфигурациях поля.

2. Функциональное уравнение Гамильтона-Якоби

В этом параграфе мы рассматриваем ФГЯ. Поле $\varLambda(z)$ мы будем называть голографическим, поскольку ФГЯ используется в методе голографической ренормализационной группы (ГРГ). ФГЯ имеет следующий вид (см., например [8]):

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varLambda(z)} = \mathcal{H}[\varLambda,\varphi,\varpi](z), \quad \varpi(x) = \frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi(x)}, \tag{1}$$

где Гамильтонов функционал $\mathcal{H}$ считается заданным, $\mathcal{S}$ — искомый функционал, а x и z — точки в $\mathbb{R}^D$. Или, в конденсированных обозначениях де Витта [5][1]:

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varLambda_\alpha} = \mathcal{H}_\alpha[\varLambda,\varphi,\varpi], \quad \varpi_\mu = \frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_\mu}, \tag{2}$$

где супериндекс α соответствует координате z, а супериндекс μ — координате x. В общем случае $\mathcal{H}$ может быть представлен в виде некоторого функционального ряда, однако мы ограничим рассмотрение менее общим случаем, который будет полезен нам в дальнейшем при решении ФРГ-потоковых уравнений. Пусть в разложении $\mathcal{H}$ в ФРТ по ϖ содержатся только нулевое и квадратичное слагаемые. Вводя обозначения $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{U}$ и $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{T}$:

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varLambda_\alpha} = \mathcal{U}_\alpha[\varLambda,\varphi] + \frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{T}_{\alpha,\mu_1\mu_2}[\varLambda,\varphi]\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_2}}. \tag{3}$$

Подставим $\mathcal{S}$ в (3) в виде функционального ряда по φ с неизвестными коэффициентами — функциями Грина $\mathcal{S}^{(n)}_{\nu_1\ldots\nu_n}[\varLambda] = \left.\frac{\delta^n\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\nu_1}\ldots\delta\varphi_{\nu_n}}\right|_{\varphi=0}$. Если мы теперь проварьируем обе стороны получившегося выражения по φ n раз, а затем положим поле $\varphi = 0$, то мы получим цепочку связанных друг с другом уравнений на функции Грина — иерархию ФГЯ. В квантовой теории скалярного поля в отсутствие спонтанно нарушенной симметрии, как правило, функции Грина нечетного порядка тождественно равны нулю вследствие инвариантности относительно замены $\varphi \to -\varphi$. Следуя этому, мы будем предполагать, что нечетные функции Грина тождественно равны нулю. Тогда первым нетривиальным уравнением иерархии будет уравнение на двухточечную функцию Грина $\mathcal{S}^{(2)}$:

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha} = \mathcal{U}^{(2)}_{\alpha,\nu_1\nu_2}[\varLambda] + \int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{T}^{(0)}_{\alpha,\mu_1\mu_2}[\varLambda]\,\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}[\varLambda]\,\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2}[\varLambda], \tag{4}$$

где $\mathcal{U}^{(2)}_{\alpha,\nu_1\nu_2} = \frac{\delta^2\mathcal{U}_\alpha}{\delta\varphi_{\nu_1}\delta\varphi_{\nu_2}}|_{\varphi=0}$, а $\mathcal{T}^{(0)}_{\alpha,\mu_1\mu_2} = \mathcal{T}_{\alpha,\mu_1\mu_2}|_{\varphi=0}$. Уравнение (4) — сложное интегро- дифференциальное уравнение, однако в случае дополнительных симметрий, например, трансляционной инвариантности его коэффициентов, оно значительно упрощается.

2.1. Трансляционно-инвариантное решение для двухточечной функции Грина на δ-конфигурации поля $\varLambda$

Предположим, что коэффициенты $\mathcal{U}^{(2)}$ и $\mathcal{T}^{(0)}$ уравнения (4), а также его решения обладают трансляционной симметрией. В этом случае удобно перейти в импульсное пространство[2]:

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda](k)}{\delta\varLambda(z)} = \mathcal{U}[\varLambda](z;k) + \mathcal{T}[\varLambda](z;k)\,\mathcal{S}[\varLambda](-k)\,\mathcal{S}[\varLambda](k). \tag{5}$$

---

[1] В дальнейшем там, где это не вызовет путаницы, мы будем пользоваться обозначениями де Витта.

[2] Здесь и далее в этом параграфе мы более не пишем надстрочный индекс "(2)" у $\mathcal{S}^{(2)}$, подразумевая его.

Наличие вариационной производной сильно усложняет дальнейшее исследование уравнения. В следующем параграфе, используя интегральное тождество для функционалов (см. Приложение А), мы перепишем (5) так, что вариационная производная по $\varLambda$ не будет входить в него явно. Но для начала посмотрим, что произойдет с уравнением при конкретном выборе $\varLambda$. Простейшими случаями являются постоянные полевые конфигурации и δ-конфигурации поля $\varLambda$.

Разложим двухточечную функцию $\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right]$ в ФРТ по $\varLambda$. Тогда ряд для вариационной производной $\mathcal{S}\left[\varLambda\right]$:

$$\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right](k)}{\delta\varLambda\left(z\right)}=\mathcal{S}^{(1')}\left(z;k\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int d^{D}z_{2}\ldots\int d^{D}z_{n}\,\mathcal{S}^{(n')}\left(z,z_{2},\ldots,z_{n};k\right)\varLambda\left(z_{2}\right)\ldots\varLambda\left(z_{n}\right). \tag{6}$$

Воспользуемся свободой выбора $\varLambda\left(z\right)$ и зафиксируем следующую конфигурацию:

$$\varLambda\left(z_{l}\right)=\varLambda\,\delta^{(D)}\left(z_{l}-w\right)\equiv\varLambda_{\delta,w}, \tag{7}$$

где w — некоторый произвольный параметр. На таком поле ФРТ для $\frac{\delta\mathcal{S}[\varLambda]}{\delta\varLambda}$ сводится к ряду:

$$\left.\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right](k)}{\delta\varLambda\left(z\right)}\right|_{\varLambda_{\delta,w}}=\mathcal{S}^{(1')}\left(z;k\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varLambda^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{S}^{(n')}\left(z,w,\ldots,w;k\right). \tag{8}$$

Таким образом, если дополнительно положить $z=w$, уравнение в вариационных производных сведется к уравнению в частных производных на $\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right)$. Подобную процедуру (подстановка (7), а затем выбор $z=w$) мы будем в дальнейшем называть выбором δ-конфигурации поля $\varLambda$.

В случае, когда коэффициенты в (8) инвариантны относительно замены $k\longleftrightarrow -k$, мы получаем уравнение Риккати:

$$\frac{\partial\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right)}{\partial\varLambda}=\mathcal{U}\left(\varLambda;w;k\right)+\mathcal{T}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{S}^{2}\left(\varLambda;w;k\right). \tag{9}$$

Для произвольных $\mathcal{U}\left(\varLambda;w;k\right)$ и $\mathcal{T}\left(\varLambda;w;k\right)$ уравнение (9) не разрешимо в квадратурах, однако в некоторых физически интересных сценариях можно продвинуться дальше.

Следующий вид коэффициентов ФРТ гамильтониана $\mathcal{U}$ и $\mathcal{T}$ является одним из таких сценариев:

$$\mathcal{U}\left[\varLambda\right](z;k)=\left[\int d^{D}z'\mathcal{B}^{\frac{1}{b}}\left(z';z;k\right)\varLambda\left(z'\right)\right]^{b},\quad \mathcal{T}\left[\varLambda\right](z;k)=-\left[\int d^{D}z'\mathcal{A}^{\frac{1}{a}}\left(z';z;k\right)\varLambda\left(z'\right)\right]^{a}, \tag{10}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — некоторые произвольные функции, а a и b — действительные числа. Тогда коэффициенты уравнения (9) будут представлять собой мономы по $\varLambda$, и уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial\mathcal{S}\left(\varLambda\right)}{\partial\varLambda}=\mathcal{B}\varLambda^{b}-\mathcal{A}\varLambda^{a}\mathcal{S}^{2}\left(\varLambda\right). \tag{11}$$

С подобным уравнением мы столкнёмся ниже при приближенном решении уравнений иерархии Вильсона-Полчински. Решение уравнения (11) известно и выражается через модифицированные функции Бесселя первого и второго родов I_d и K_d:

$$\mathcal{S}\left(\varLambda\right)=\mathcal{B}\varLambda^{b+1}\frac{\mathcal{C}K_{d}\left(X\right)+I_{d}\left(X\right)}{\mathcal{C}\tilde{K}_{d}\left(X\right)+\tilde{I}_{d}\left(X\right)}, \tag{12}$$

где мы использовали обозначения :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_d(X) &= (b+1)\,K_d(X) - \frac{a+b+2}{2} X K_{d+1}(X)\,; \\ \tilde{I}_d(X) &= (b+1)\,I_d(X) + \frac{a+b+2}{2} X I_{d+1}(X) \\ X = &\frac{2\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}}\varLambda^{\frac{a+b+2}{2}}}{a+b+2} \quad d = \frac{b+1}{a+b+2}, \end{aligned} \tag{13}$$

а $\mathcal{C}$ — постоянная (зависящая от k и w), определяемая начальными условиями.

2.2. Трансляционно-инвариантное решение для двухточечной функции Грина на постоянных полевых конфигурациях

Рассмотрим теперь в некотором смысле диаметрально противоположный выбор $\varLambda$ — постоянные полевые конфигурации. Для этого воспользуемся интегральным тождеством для функционалов (177) (см. Приложение A) и перепишем с его помощью уравнение (5):

$$\mathcal{S}\left[\varLambda+\varDelta\right](k) - \mathcal{S}\left[\varLambda\right](k) = \int\limits_0^1 dt\left\{\mathcal{U}\left[\varLambda;\varDelta\right](t;k) + \mathcal{T}\left[\varLambda;\varDelta\right](t;k)\left|\mathcal{S}\left[\varLambda+t\varDelta\right](k)\right|^2\right\}, \tag{14}$$

где новые функциональные коэффициенты в правой части заданы следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\left[\varLambda;\varDelta\right](t;k) &\equiv \int d^Dz\,\varDelta(z)\mathcal{U}\left[\varLambda+t\varDelta\right](z;k)\,, \\ \mathcal{T}\left[\varLambda;\varDelta\right](t;k) &\equiv \int d^Dz\,\varDelta(z)\,\mathcal{T}\left[\varLambda+t\varDelta\right](z;k)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Положим теперь $\varLambda(z) = \varLambda = \mathrm{Const}$ и $\varDelta(z) = \varDelta = \mathrm{Const}$. Обозначим $\varLambda_0 = \varLambda$, $\varDelta = \varLambda_1 - \varLambda_0$ и $t\varDelta = \varLambda_t - \varLambda_0$. Подставляя в (14) и (15), приходим к уравнению на $\mathcal{S}(\varLambda_t;k)$:

$$\mathcal{S}(\varLambda_1;k) - \mathcal{S}(\varLambda_0;k) = \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda_1} d\varLambda_t \int d^Dz\left\{\mathcal{U}(\varLambda_t;z;k) + \mathcal{T}(\varLambda_t;z;k)\left|\mathcal{S}(\varLambda_t;k)\right|^2\right\}. \tag{16}$$

Можно показать, что если $\mathcal{U}(\varLambda_1;z;k)$ и $\mathcal{T}(\varLambda_1;z;k)$ являются чётными функциями k, то это интегральное уравнение оказывается эквивалентным уравнению Риккати:

$$\frac{\partial\mathcal{S}(\varLambda_1;k)}{\partial\varLambda_1} = \int d^Dz\,\mathcal{U}(\varLambda_1;z;k) + \left|\mathcal{S}(\varLambda_1;k)\right|^2\int d^Dz\,\mathcal{T}(\varLambda_1;z;k)\,, \tag{17}$$

где $\mathcal{U}(\varLambda_1;k) \equiv \int d^Dz\,\mathcal{U}(\varLambda_1;z;k)$, $\mathcal{T}(\varLambda_1;k) \equiv \int d^Dz\,\mathcal{T}(\varLambda_1;z;k)$.

Таким образом, уравнение Риккати получается как минимум в двух предельных случаях: на конфигурациях $\varLambda \sim \delta$ и $\varLambda \sim \mathrm{Const}$. Разумеется, из этого не следует, что так будет происходить при любом выборе конфигураций $\varLambda$ и $\varDelta$, но множество таких конфигураций как минимум не пусто, а значит для удачных функциональных гамильтонианов двухточечная функция Грина может быть найдена точно на некоторых конфигурациях $\varLambda$.

3. Функциональное уравнение Шрёдингера

Функциональное уравнение Шрёдингера возникает при переходе от квантовой механики к квантовой теории поля. Ниже представлен один из возможных способов его возникновения в КТП из матрицы рассеяния. Необходимость такой конструкции обуславливается тем, что матрицы рассеяния недостаточно для решения некоторых задач физики частиц, в частности, для описания характеристик связанных состояний.

Обозначим амплитуды начального и конечного состояний как $\Psi_{-\infty}$ и $\Psi_{+\infty}$ соответственно. Тогда $\Psi_{+\infty} = \hat{\mathbb{S}}\,\Psi_{-\infty}$, где $\hat{\mathcal{S}}$ — матрица рассеяния. Следуя [9], введём функцию $0 < \lambda(x) < 1$ и заменим $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x) \longmapsto \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x) \cdot \lambda(x)$. Теперь функция $\lambda(x)$ характеризует “интенсивность включения взаимодействия”. В таком случае $\hat{\mathbb{S}} = \hat{\mathbb{S}}[\lambda]$, и мы, фиксируя $\Psi_{-\infty} = \varPsi$, получаем $\Psi_{+\infty} = \varPsi[\lambda] = \hat{\mathbb{S}}[\lambda]\,\varPsi$. Варьируя по λ и пользуясь унитарностью $\hat{\mathbb{S}}$ получаем:

$$\frac{\delta\varPsi[\lambda]}{\delta\lambda(x)} = \frac{\delta\,\hat{\mathbb{S}}[\lambda]}{\delta\lambda(x)}\varPsi = \frac{\delta\,\hat{\mathbb{S}}[\lambda]}{\delta\lambda(x)}\,\hat{\mathbb{S}}^{\dagger}[\lambda]\,\varPsi[\lambda] \tag{18}$$

Вводя обозначение: $-i\frac{\delta\,\hat{\mathbb{S}}[\lambda]}{\delta\lambda(x)}\,\hat{\mathbb{S}}^{\dagger}[\lambda] \overset{\text{def.}}{=} \hat{\mathcal{H}}[\lambda](x)$, приходим к функциональному уравнению Шрёдингера:

$$\frac{\delta\varPsi[\lambda]}{\delta\lambda_{\mu}} = i\hat{\mathcal{H}}_{\mu}[\lambda]\,\varPsi[\lambda]\,, \tag{19}$$

где индекс μ, как и везде в данной работе, соответствует координате x. Из уравнения (19) можно далее получить уравнение Томонага-Швингера [9] — уравнение на функционал $\varPsi[\sigma]$ пространственно-подобных гиперповерхностей.

Мы будем рассматривать функциональное уравнение следующего вида:

$$\frac{\delta\varPsi[\varLambda,\varphi]}{\delta\varLambda_{\alpha}} = i\hat{\mathcal{H}}_{\alpha}\varPsi[\varLambda,\varphi]\,, \quad \hat{\mathcal{H}}_{\alpha} = \mathcal{H}_{\alpha}[\varLambda,\varphi,\hat{\varpi}]\,, \quad \hat{\varpi}_{\mu} = \frac{\delta}{\delta\varphi_{\mu}}, \tag{20}$$

где $\varPsi$ — волновой функционал, φ — скалярное поле, функция пространственной переменной x (соответствующей индексу μ), $\hat{\varpi}$ — функциональный оператор импульса, а в разложении функционального гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}$ в ФРТ по $\hat{\varpi}$ входят только кинетическое и потенциальное слагаемые:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha} = \int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}[\varLambda,\varphi]\,\hat{\varpi}_{\mu_1}\hat{\varpi}_{\mu_2} + \mathcal{U}_{\alpha}[\varLambda,\varphi]\,. \tag{21}$$

3.1. Квазиклассическое приближение

Квазиклассическое приближение для функционального уравнения Шрёдингера позволяет найти приближённое решение иерархии ФШ, так как в этом случае отсутствует проблема $(n; n+2)$. Оно имеет большое значение, в частности, в квантовой гравитации [10]. Ниже мы представляем его строгий вывод.

Перейдём от комплекснозначного функционала $\varPsi = \mathcal{A}[\varLambda,\varphi]\,e^{i\mathcal{S}[\varLambda,\varphi]} \in \mathbb{C}$ к действительным $\mathcal{A},\mathcal{S} \in \mathbb{R}$, причём $\mathcal{A} > 0$. Подставляя данную замену в ФШ (20) с функциональным гамильтонианом (21), получаем[3]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varLambda_{\alpha}} + i\mathcal{A}\,\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varLambda_{\alpha}} = \int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\biggl\{ -\mathcal{A}\,\frac{\delta^2\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}} - 2\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}} + \\ + i\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}} - i\mathcal{A}\,\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}\biggr\} + i\mathcal{A}\,\mathcal{U}_{\alpha}. \end{aligned} \tag{22}$$

---

[3] Здесь и далее в этой главе предполагается, что $\mathcal{K}$ не зависит от φ

Действительная часть (22) даёт функциональное уравнение непрерывности:

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left\{\mathcal{A}\,\frac{\delta^2\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}+2\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}=0. \tag{23}$$

А мнимая часть (22) — уравнение ФГЯ с т.н. квантовой поправкой $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{Quant})}$:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}=\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{Quant})}+\mathcal{U}_\alpha, \tag{24}$$

где $\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{Quant})}=\frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}$.

Используя неотрицательность функционала $\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]$, репараметризуем его следующим образом: $\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]:=e^{\mathcal{R}[\Lambda,\varphi]}$. Тогда уравнение непрерывности (23) примет вид:

$$\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left\{\frac{\delta^2\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}+2\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}=0. \tag{25}$$

Восстановим теперь $\hbar$ в уравнении (24):

$$\mathcal{S}\mapsto\frac{\mathcal{S}}{\hbar},\quad \mathcal{K}\mapsto\hbar^2\mathcal{K},\quad \frac{\delta}{\delta\Lambda}\mapsto\hbar\frac{\delta}{\delta\Lambda}. \tag{26}$$

Квантовое уравнение ФГЯ не инвариантно относительно такой замены, и квантовая поправка $\mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})}$ масштабируется пропорционально $\hbar^2$:

$$\mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})}\mapsto\hbar^2\mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})}. \tag{27}$$

В соответствии с этим, в пределе $\hbar\to 0$ квантовое уравнение ФГЯ перейдет в классическое:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}=\mathcal{U}_\alpha. \tag{28}$$

Таким образом член, содержащий вторую вариационную производную составляет квантовую поправку, исчезающую при $\hbar\to 0$. Этот факт мы будем использовать при построении квазиклассического приближения уравнения Вильсона-Полчински.

Получим теперь первые уравнения иерархий уравнений Гамильтона-Якоби и непрерывности. Будем считать, что все рассматриваемые функционалы — чётные по φ. Тогда вариации $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$ нечетного порядка должны занулиться на нулевом поле φ. Последовательно варьируя (28) по φ_{ν_i} и кладя $\varphi=0$, получим уравнения нулевого, второго и четвертого порядков:

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(0)}}{\delta\Lambda_\alpha}=\mathcal{U}_\alpha^{(0)}. \tag{29}$$

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}}{\delta\Lambda_\alpha}+2\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2}=\mathcal{U}^{(2)}_{\alpha,\nu_1\nu_2}. \tag{30}$$

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(4)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}{\delta\Lambda_\alpha}+2\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\Upsilon_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}=\mathcal{U}^{(4)}_{\alpha,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}, \tag{31}$$

где

$$\Upsilon_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}=\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_2\nu_3\nu_4}+\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_3\nu_4}+\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_3}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_2\nu_4}+\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_4}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3}, \tag{32}$$

а $\mathcal{S}^{(n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ и $\mathcal{R}^{(n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ — n-точеченые функции Грина. Заметим, что $\forall n>2$ уравнения на $\mathcal{S}^{(n)}$ — линейные и замкнутые, а кроме того, нет $(n,n+2)$ - зацепления, о котором шла речь во введении. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}$ функции Грина $\mathcal{S}^{(n)}$ могут быть получены из иерархии.

Аналогичным образом получим первые два уравнения иерархии функционального уравнения непрерывности (25):

$$\frac{\delta \mathcal{R}^{(0)}}{\delta \Lambda_\alpha} + \int_{\mu_1} \int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2} \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\mu_2} = 0. \tag{33}$$

$$\frac{\delta \mathcal{R}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}}{\delta \Lambda_\alpha} + \int_{\mu_1} \int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2} \left\{ \mathcal{S}^{(4)}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} + 2\mathcal{R}^{(2)}_{\mu_1\nu_1} \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2} + 2\mathcal{R}^{(2)}_{\mu_1\nu_2} \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_1} \right\} = 0. \tag{34}$$

3.2. Трансляционно-инвариантные решения уравнений иерархии на δ-полевой конфигурации

3.2.1. Иерархия функционального уравнения Гамильтона-Якоби

В трансляционно-инвариантном анзаце, уравнение нулевого порядка (29) сохраняет свой вид:

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(0)}[\Lambda]}{\delta \Lambda(z)} = \mathcal{U}^{(0)}[\Lambda](z). \tag{35}$$

Как это делалось выше, выбрав δ-конфигурацию поля Λ, получим УрЧП:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(0)}(\Lambda; w)}{\partial \Lambda} = \mathcal{U}^{(0)}(\Lambda; w). \tag{36}$$

Решением этого уравнения является функция вида:

$$\mathcal{S}^{(0)}(\Lambda; w) = \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} d\Lambda' \, \mathcal{U}^{(0)}(\Lambda'; w) + \mathcal{S}^{(0)}(\Lambda_0; w). \tag{37}$$

Уравнения порядков $n > 0$ претерпевают изменения при наложении условия трансляционной инвариантности. В импульсном представлении на δ-конфигурации Λ уравнение четвертого порядка на Фурье-компоненты $\tilde{\mathcal{S}}^n$ и $\tilde{\mathcal{R}}^n$ имеет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4)}{\partial \Lambda} + 2\Upsilon(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{U}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4), \tag{38}$$

где

$$\Upsilon(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{S}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) \sum_{j=1}^{4} \mathcal{K}(\Lambda; w; k_j) \, \mathcal{S}^{(2)}(\Lambda; w; -k_j). \tag{39}$$

Здесь справа стоит известная функция $\mathcal{U}^{(4)}$, а слева — произведения $\mathcal{S}^{(2)}$, которые были получены при решении уравнения второго порядка (см. параграф про уравнение Гамильтона-Якоби) и считаются известными. Таким образом, это *линейное* неоднородное уравнение, а значит оно разрешимо относительно $\mathcal{S}^{(4)}$. То же верно и для $n > 4$: только уравнение на двухточечную функцию $\mathcal{S}^{(2)}$ окажется нелинейным. Таким образом, в случае δ - конфигураций Λ нахождение $\mathcal{S}^{(n)}$ для любого n не составляет трудности. Ниже мы показываем, что то же верно и для $\mathcal{R}^{(n)}$.

3.2.2. Иерархия функционального уравнения непрерывности и комплексный потенциал

Рассмотрим теперь иерархию уравнения непрерывности с учётом наложенного условия трансляционной инвариантности. Уравнение нулевого порядка (33) сохраняет свой прежний вид, но в нём возникает сингулярный ($\propto (2\pi)^D\delta^{(D)}(0) = \mathrm{Vol}_{[D]}$) член — вакуумный пузырёк[4]. Чтобы получить конечный ответ для $\varPsi$, регуляризуем расходящееся выражение, поглотив сингулярность мнимой частью комплексного потенциала:

$$\mathcal{U}\left[\varLambda,\varphi\right](z) \to \mathcal{U}^{(\mathbb{C})}\left[\varLambda,\varphi\right](z) = \mathcal{U}\left[\varLambda,\varphi\right](z) - i\mathcal{W}\left[\varLambda,\varphi\right](z)\,. \tag{40}$$

Теперь функционал $\mathcal{U}^{(\mathbb{C})}$ содержит в себе информацию о структуре вакуума теории. Подставляя $\mathcal{U}^{(\mathbb{C})}$ в трансляционно инвариантную версию уравнения (33), получаем:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(0)}\left[\varLambda\right]}{\delta\varLambda(z)} + (2\pi)^D\delta^{(D)}(0)\int_k \mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right](-k) = \mathcal{W}\left[\varLambda\right](z)\,. \tag{41}$$

Сингулярная часть $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\text{sing}} + \mathcal{W}_{\text{reg}}$ поглощает расходимость, и мы приходим к уравнению:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(0)}\left[\varLambda\right]}{\delta\varLambda(z)} = \mathcal{W}_{\text{reg}}\left[\varLambda\right](z)\,. \tag{42}$$

Такие действия приводят к тому, что исходное уравнение Шрёдингера (20) становится нелинейным[5] по $\varPsi$, так как $\mathcal{W}_{\text{sing}} \propto \int_k \mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right](-k)$, а $\mathcal{S}^{(2)}$ — коэффициент ФРТ фазы функционала $\varPsi$.

Пользуясь стандартной процедурой, выберем теперь δ-конфигурации поля $\varLambda$ в регуляризованном уравнении (42), получим:

$$\frac{\partial\mathcal{R}^{(0)}(\varLambda;w)}{\partial\varLambda} = \mathcal{W}_{\text{reg}}(\varLambda;w)\,. \tag{43}$$

Решением этого уравнения будет функция:

$$\mathcal{R}^{(0)}(\varLambda;w) = \int_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\varLambda'\,\mathcal{W}_{\text{reg}}(\varLambda';w) + \mathcal{R}^{(0)}(\varLambda_0;w)\,. \tag{44}$$

Рассмотрим теперь уравнение второго порядка (34) с наложенным условием трансляционной инвариантности:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(2)}\left[\varLambda\right](k)}{\delta\varLambda(z)} + \int_q \mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;q)\,\mathcal{S}^{(4)}\left[\varLambda\right](q,-q,k,-k) + 2\varSigma\left[\varLambda\right](z;k) = 0, \tag{45}$$

где:

$$\varSigma\left[\varLambda\right](z;k) = \mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right](k)\,\mathcal{R}^{(2)}\left[\varLambda\right](-k) + (k \rightleftarrows -k)\,. \tag{46}$$

На δ-конфигурации $\varLambda$ получаем:

$$\frac{\partial\mathcal{R}^{(2)}(\varLambda;w;k)}{\partial\varLambda} + \int_q \mathcal{K}(\varLambda;w;q)\,\mathcal{S}^{(4)}(\varLambda;w;q,-q,k,-k) + 2\varSigma(\varLambda;w;k) = 0, \tag{47}$$

и, предполагая чётность функций $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}^{(2)}$ и $\mathcal{R}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\varSigma(\varLambda;w;k) &= \mathcal{K}(\varLambda;w;k)\,\mathcal{S}^{(2)}(\varLambda;w;k)\,\mathcal{R}^{(2)}(\varLambda;w;-k) + (k \rightleftarrows -k) = \\ &= 2\mathcal{K}(\varLambda;w;k)\,\mathcal{S}^{(2)}(\varLambda;w;k)\,\mathcal{R}^{(2)}(\varLambda;w;k)\,.\end{aligned} \tag{48}$$

---

[4] Этот факт не является неожиданным, подобные расходимости часто возникают в КТП [9, 11].

[5] Похожая ситуация возникает в КТП во время процедуры перенормировки: параметры теории переопределяются таким образом, чтобы расходимости в функциях Грина были устранены.

Уравнение (47) на двухточечную функцию Грина $\mathcal{R}^{(2)}$ — *линейное* неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Аналогичные *линейные* уравнения будут получаться для функций Грина и более высокого порядка, и все они разрешимы. Таким образом в случае функционального уравнения непрерывности проблема иерархий на δ-конфигурациях поля Λ также точно разрешима.

Таким образом иерархию ФШ можно решать итерационным методом, начиная с квазиклассического приближения для иерархии квантового ФГЯ.

4. Уравнение Вильсона-Полчински

В этом параграфе мы вводим квазиклассическое приближение для уравнения Вильсона-Полчински и, пользуясь им, вычисляем двух- и четырёхточечные ампутированные связные функций Грина для теории φ^4 в $D=3$ -мерном пространстве-времени.

ФРГ-потоковое уравнение Вильсона-Полчински может быть сформулировано не только в терминах Вильсоновского эффективного действия [12], но и, как было показано в работе [13], в терминах производящего функционала ампутированных связанных функций Грина $\mathcal{G}_{ac}[\varphi]$, который в дальнейшем, для краткости, мы будем обозначать просто $\mathcal{G}[\varphi]$. Более подробно — см. обзор [14]. Определение $\mathcal{G}$ можно переписать в следующем виде [5]:

$$e^{\mathcal{G}[\varphi]} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0}\int \mathcal{D}[\varphi']\, e^{-S_0[\varphi']-S_{\text{int}}[\varphi'+\varphi]} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}|G_0\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^{-S_{\text{int}}[\varphi]}, \tag{49}$$

где G_0 — свободный пропагатор, $\mathcal{Z}_0$ — статсумма свободной теории, а φ — внешние поля. Вводя обрезание в свободный пропагатор $G_0 \Rightarrow G_{0,\Lambda}$ и дифференцируя левую и правую части выражения (49) по параметру обрезания Λ получим уравнение Вильсона-Полчински (ВП) в терминах $\mathcal{G}$:

$$\frac{\partial\mathcal{G}[\varphi]}{\partial\Lambda} = \frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\partial G_{\mu_1\mu_2}}{\partial\Lambda}\left\{\frac{\delta^2\mathcal{G}[\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}} + \frac{\delta\mathcal{G}[\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{G}[\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}. \tag{50}$$

Если перейти от переменной Λ к независимому полю $\Lambda(z)$, то мы придём к следующему функциональному уравнению:

$$\frac{\delta\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\Lambda_\alpha} = \frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\delta G_{\mu_1\mu_2}[\Lambda]}{\delta\Lambda_\alpha}\left\{\frac{\delta^2\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}} + \frac{\delta\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}. \tag{51}$$

Обратно к (50) можно, как и всегда, перейти выбрав δ-конфигурации поля Λ. Если теперь подставить в (51) $\mathcal{G}$ в виде функционального ряда по полям φ, то можно получить иерархию интегро-дифференциальных уравнений на (ампутированные связные) функции Грина $\mathcal{G}^{(n)}$. Уравнения этой иерархии связанны друг с другом сложным образом: уравнение n-ого порядка содержит в правой части[6] $\mathcal{G}^{(n+2)}$, это и есть то самое $(n,\, n+2)$-зацепление, о котором шла речь во введении. Такая связь не позволяет точно решить иерархию известными методами и представляет собой основную сложность в методе функциональной ренормгруппы.

Уравнение (51) — частный случай более общей конструкции — функционального производящего уравнения (Master equation [15, 16]):

$$\frac{\delta\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\Lambda_\alpha} = \int_\mu \frac{\delta\Psi_{\alpha,\mu}[\Lambda,\varphi,\varpi]}{\delta\varphi_\mu} + \int_\mu \Psi_{\alpha,\mu}[\Lambda,\varphi,\varpi]\,\varpi_\mu, \quad \varpi_\mu = \frac{\delta\mathcal{G}[\Lambda,\varphi]}{\delta\varphi_\mu}. \tag{52}$$

Здесь $\Psi_{\alpha,\mu} \equiv \Psi(z;x)$ — функционал роста крупнозернистости мод [7, 14], некоторым образом (неявно) зависящий от производящего функционала $\mathcal{G}$. Этот функционал задаёт конкретную ФРГ потоковую процедуру: конкретный способ исключения степеней свободы. Можно показать [7], что Ψ зависит от функционала обрезания Λ, внешнего поля φ, импульса ϖ, но не зависит от производных $\frac{\delta\varpi}{\delta\varphi}$. Уравнение ВП получается из производящего уравнения (52) при следующем [7] выборе Ψ:

$$\Psi_{\alpha,\mu}[\Lambda,\varphi,\varpi] = \frac{1}{2}\int_\nu \frac{\delta G_{\mu\nu}[\Lambda]}{\delta\Lambda_\alpha}\,\varpi_\nu. \tag{53}$$

---

[6] Здесь мы предполагаем, что ампутированные связанные функции Грина нечетного порядка тождественно равны нулю.

4.1. Квазиклассическое приближение

Вновь обратимся к формуле (49). При введении обрезания в свободный пропагатор, это равенство сохраняет свой вид:

$$e^{\mathcal{G}_\varLambda[\varphi]} = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}|G_{0,\varLambda}\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)}e^{-S_{\mathrm{int}}[\varphi]}. \tag{54}$$

Устремим $\varLambda$ к бесконечности. Тогда $G_{0,\varLambda} \to 0$, а значит:

$$\mathcal{G}_\varLambda \xrightarrow{\varLambda\to\infty} -S_{\mathrm{int}} = -\int_\mu g_\mu V_\mu(\varphi), \tag{55}$$

где $g_\mu \equiv g(x)$ — безразмерная константа связи, а V_μ — потенциал.

Рассмотрим функциональное уравнение (51) подробнее. В его правой части стоит слагаемое, содержащее вторую вариационную производную $\mathcal{G}[\varphi]$ по φ. По аналогии с квазиклассическим приближением функционального уравнения Шрёдингера, избавимся от второй производной, заменив во втором слагаемом (51) $\mathcal{G}[\varphi]$ на его значение при $\varLambda \to \infty$. В результате получим уравнение типа Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\delta\mathcal{G}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varLambda_\alpha} = \frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\delta G_{\mu_1\mu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha}\left\{\frac{\delta\mathcal{G}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{G}[\varLambda,\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_2}} - \frac{\delta^2 S_{\mathrm{int}}[\varphi]}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}. \tag{56}$$

Поскольку уравнение (56) имеет вид функционального уравнения ГЯ, то его иерархия, в отличие от иерархии уравнения (51), не содержит проблемы $(n,\ n+2)$ и в результате может быть решена точно в каждом порядке. Ниже мы находим решения для двухточечной и четырёхточечной функций Грина приближенного уравнения ВП (56).

4.2. Двухточечная функция Грина

Варьируя левую и правую части приближенного уравнения (56) по φ и кладя $\varphi = 0$ можно получить иерархию приближенного уравнения. Если нечетные функции Грина тождественно равны нулю, то первым нетривиальным уравнением иерархии будет уравнение на двухточечную функцию Грина:

$$\frac{\delta\mathcal{G}^{(2)}_{\nu_1,\nu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha} = -\frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\delta G_{\mu_1\mu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda(z)}S^{(4)}_{\mathrm{int};\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2} + \int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\delta G_{\mu_1\mu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha}\mathcal{G}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}[\varLambda]\,\mathcal{G}^{(2)}_{\mu_2\nu_2}[\varLambda]. \tag{57}$$

Будем искать решения обладающие трансляционной инвариантностью. В качестве конкретного примера возьмем теорию со взаимодействием вида $\frac{g}{4!}\varphi^4$. В этом случае: $S_{\mathrm{int}}[\varphi] = \frac{g}{4!}\int_\mu \varphi^4_\mu \quad\Rightarrow\quad S^{(4)}_{\mathrm{int}}(k',-k',k,-k) = g$. Тогда в импульсном пространстве уравнение (57) примет вид:

$$\frac{\delta\mathcal{G}^{(2)}[\varLambda](k)}{\delta\varLambda(z)} = -\frac{g}{2}\int_{k'}\frac{\delta G[\varLambda](k')}{\delta\varLambda(z)} + \frac{\delta G[\varLambda](k)}{\delta\varLambda(z)}|\mathcal{G}^{(2)}[\varLambda](k)|^2. \tag{58}$$

Выбирая δ-конфигурации поля $\varLambda$, при $z = w$ получим[7]:

$$\frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)}{\partial\varLambda} = -\frac{g}{2}\int_{k'}\frac{\partial G(\varLambda;k')}{\partial\varLambda} + \frac{\partial G(\varLambda;k)}{\partial\varLambda}|\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)|^2. \tag{59}$$

Чтобы продвинуться дальше, нам необходимо знать явный вид зависимости деформированного свободного пропагатора $G(\varLambda;w;k') \equiv G(\varLambda;k')$ от обрезания $\varLambda$. Наиболее удобно

---

[7] Далее мы опускаем явную зависимость от w.

производить обрезание при помощи т.н. аддитивного регулятора Литима (Litim additive regulator [5, 17]), который имеет следующий вид:

$$G^{-1}(\varLambda;k)=G^{-1}(k)+R_{\text{Litim}}(\varLambda;k)\,,\quad R_{\text{Litim}}(\varLambda;k)=\left(\frac{1}{G(\varLambda)}-\frac{1}{G(k)}\right)\theta(\varLambda-k)\,. \tag{60}$$

В этом случае деформированный пропагатор $G(\varLambda;k)$ выражается следующим образом:

$$G(\varLambda;k)=\frac{G(k)}{1+\left(\frac{G(k)}{G(\varLambda)}-1\right)\theta(\varLambda-k)},\quad G(\varLambda;k)=\begin{cases}G(k) & \text{при } \varLambda<k,\\ G(\varLambda) & \text{при } \varLambda>k.\end{cases} \tag{61}$$

Подставляя (61) в уравнение (59), получаем:

$$\frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)}{\partial\varLambda}=\frac{\partial G(\varLambda)}{\partial\varLambda}\left\{\theta(\varLambda-k)\,|\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)\,|^2-\frac{g}{2}\frac{B_D\varLambda^D}{(2\pi)^2}\right\}, \tag{62}$$

где B_D — объём D-мерного диска. Дополнительно предположим чётность функций Грина по k, переобозначим $g_D=\frac{B_D(1)g}{2(2\pi)^2}$. Тогда, если пропагатор имеет вид $G(k)=\frac{1}{k^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}$, то уравнение запишется следующем образом:

$$\frac{\partial\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)}{\partial\varLambda}=\frac{2n}{\varLambda^{2n+1}}\left\{-\theta(\varLambda-k)\left[\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)\right]^2+g_D\varLambda^D\right\}. \tag{63}$$

Граничные условия на двухточечную функцию $\mathcal{G}^{(2)}$ получаются варьированием граничных условий на производящий функционал $\mathcal{G}[\varphi]$, причём для перенормируемых теорий граничные условия для уравнения (63) задаются на бесконечности, но, если теория неперенормируема, то они заданы на некотором максимальном масштабе $\varLambda_0$.

По отдельности рассматривая случаи $\varLambda<k<\varLambda_0$ и $k<\varLambda<\varLambda_0$ и затем сшивая решения при $\varLambda=k$, получим ответ для[8] $n=1$, $D=3$:

$$\mathcal{G}^{(2)}(\varLambda;k)=2g_3(\varLambda-k)+\sqrt{g_3k^3}\,\frac{I_1(\lambda_0)\,K_1(\kappa)-K_1(\lambda_0)\,I_1(\kappa)}{I_1(\lambda_0)\,K_2(\kappa)+K_1(\lambda_0)\,I_2(\kappa)},\quad \lambda_0=\frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{\varLambda_0}},\quad \kappa=\frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k}}, \tag{64}$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов, соответственно. Положив теперь $\varLambda=0$, мы восстановим двухточечную функцию Грина исходной теории без обрезания. Устремляя $\varLambda_0$ к бесконечности получаем конечный результат (см. рис. 1а):

$$\mathcal{G}^{(2)}(k)=-2g_3k+\sqrt{g_3k^3}\,\frac{K_1(\kappa)}{K_2(\kappa)}. \tag{65}$$

Как и ожидалось, предел существует — теория перенормируема [3].

4.3. Четырёхточечная функция Грина

Уравнение на четырёхточечную функцию Грина имеет следующий вид:

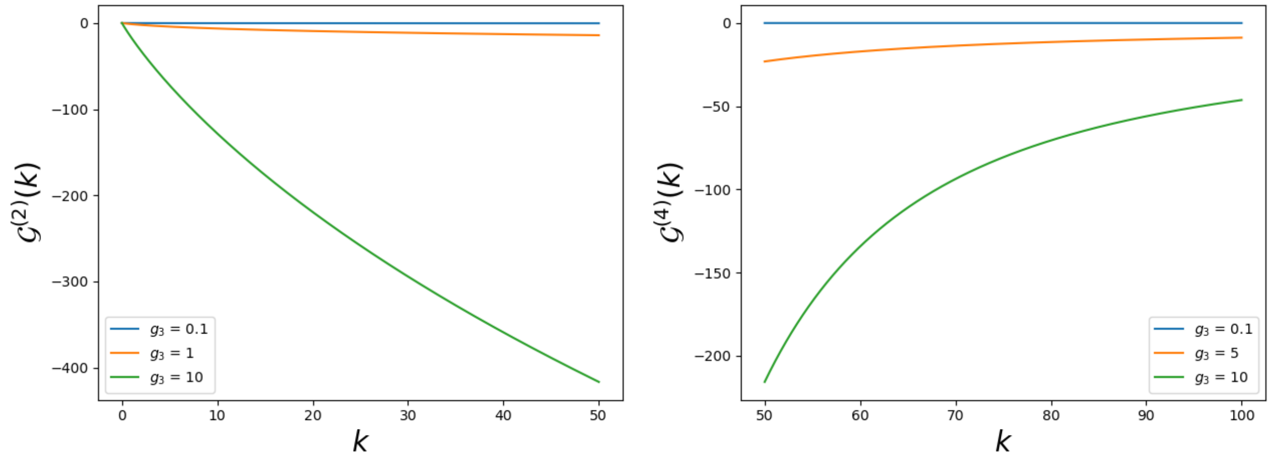
$$\frac{\delta\mathcal{G}^{(4)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha}=\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\frac{\delta G_{\mu_1\mu_2}[\varLambda]}{\delta\varLambda_\alpha}\varUpsilon_{\mu_1\mu_2;\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}[\varLambda]\,, \tag{66}$$

где функционал $\varUpsilon[\varLambda]$:

$$\varUpsilon_{\mu_1\mu_2;\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}[\varLambda]=\mathcal{G}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}[\varLambda]\,\mathcal{G}^{(4)}_{\mu_2\nu2\nu_3\nu_4}[\varLambda]+(\nu_1\rightleftarrows\nu_2)+(\nu_1\rightleftarrows\nu_3)+(\nu_1\rightleftarrows\nu_4)\,. \tag{67}$$

---

[8] Хоть в этом случае ($D=3$) теория φ^4 и перенормируема [3], мы всё равно сперва запишем решения для конечного $\varLambda_0$, а потом устремим его к бесконечности.



(a) $m = 2$; $k_1 = k_2 = k$

(b) $m = 4$; $k_1 = k_2 = -k_3 = -k_4 = k$

Рис. 1: Ампутированные связные функции Грина $\mathcal{G}^{(m)}(k_1, \ldots, k_m)$ теории φ^4 при $D = 3$, полученные из квазиклассического приближения уравнения Вильсона-Полчински при различных значениях константы связи g_3.

Вновь нас интересует трансляционно-инвариантная задача. На δ-конфигурации поля Λ при $z = w$ (опуская зависимость от w) уравнение (66) в импульсном пространстве принимает следующий вид[9]:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{(4)}(\Lambda; k_1, k_2, k_3, k_4)}{\partial \Lambda} = \mathcal{G}^{(4)}(\Lambda; k_1, k_2, k_3, k_4) \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial G(\Lambda; k_j)}{\partial \Lambda} \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda; -k_j). \tag{68}$$

В случае теории φ^4, решение уравнения (68), как и в случае двухточечной функции Грина, зависит только от модулей k_j:

$$\mathcal{G}^{(4)}(\Lambda; k_1, k_2, k_3, k_4) = -g \exp\left\{ \sum_{j=1}^{4} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} d\Lambda' \frac{\partial G(\Lambda'; k_j)}{\partial \Lambda'} \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda'; -k_j) \right\}. \tag{69}$$

Вновь рассматриваем случай $n = 1$, $D = 3$. В пределе $\Lambda_0 \to \infty$ получим для $\Lambda = 0$ четырёхточечную функцию Грина $\mathcal{G}^{(4)}$:

$$\mathcal{G}^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -16g \prod_{j=1}^{4} \frac{1}{\kappa_j (\kappa_j K_0(\kappa_j) + 2K_1(\kappa_j))}, \qquad \kappa_j = \frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k_j}}. \tag{70}$$

В специальном, важном для эксперимента случае $k_1 = -k_2 = k$, $k_3 = -k_4 = k'$ ответ (70) принимает вид (см. рис. 1):

$$\mathcal{G}^{(4)}(k, -k, k', -k') = \frac{-16g}{(\kappa\kappa')^2 (\kappa K_0(\kappa) + 2K_1(\kappa))^2 (\kappa' K_0(\kappa') + 2K_1(\kappa'))^2}, \qquad \kappa' = \frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k'}}. \tag{71}$$

Таким образом, квазиклассический подход к уравнению Вильсона-Полчински даёт согласованные результаты. Как и в случае ФШ, ответ можно уточнять при помощи итерационной процедуры, первой ступенью которой и будет квазиклассическое приближение.

---

[9] Мы подразумеваем, что выполнено кинематическое тождество $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

5. BMW-приближение

В предыдущих двух главах мы использовали квазиклассическое приближение для нахождения функций Грина функциональных уравнений Шрёдингера и Вильсона-Полчински. В этой главе мы пойдем по другому пути и воспользуемся BMW-приближением [18]. Как мы увидим ниже, BMW-приближение наиболее удобно для работы с неполиномиальными теориями и позволяет получить приближенную зависимость коэффициентов ФРТ функционала, используя разложение в ряд Тейлора этого функционала на некоторой ненулевой конфигурации поля.

5.1. Функциональное уравнение Шрёдингера

Для начала, воспользуемся BMW-приближением для нахождения вариационных производных функционалов $\mathcal{S}$ и $\mathcal{R}$ на ненулевом поле. Для этого проварьируем дважды по φ_ν функциональные уравнения Гамильтона-Якоби (24) и непрерывности (25). Для экономии места ниже мы явно не указываем функциональные зависимости от Λ и φ, подразумевая их. Итак, уравнение (24) даёт:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\nu_1\nu_2}}{\delta \Lambda_\alpha} + \int_{\mu_1\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha\mu_1\mu_2}\left[\mathcal{S}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_2} + \mathcal{S}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_1} + \mathcal{S}_{\mu_1\nu_1\nu_2}\mathcal{S}_{\mu_2} + \mathcal{S}_{\mu_1}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_1\nu_2}\right] = \mathcal{U}^{(\mathrm{Q})}_{\alpha\nu_1\nu_2} + \mathcal{U}_{\alpha\nu_1\nu_2}, \tag{72}$$

где:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{(\mathrm{Q})}_{\alpha\nu_1\nu_2} &\equiv \frac{\delta^2 \mathcal{U}^{(\mathrm{Q})}}{\delta\varphi_{\nu_1}\delta\varphi_{\nu_2}} = \\ &= \int_{\mu_1\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha\mu_1\mu_2}\left[\mathcal{R}_{\mu_1\nu_1\nu_2}\mathcal{R}_{\mu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{R}_{\mu_2\nu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{R}_{\mu_2\nu_1} + \mathcal{R}_{\mu_1}\mathcal{R}_{\mu_2\nu_1\nu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}\right].\end{aligned} \tag{73}$$

Из уравнения (25) получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta \mathcal{R}_{\nu_1\nu_2}}{\delta \Lambda_\alpha} + \\ &+ 2\int_{\mu_1\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha\mu_1\mu_2}\left[\mathcal{R}_{\mu_1\nu_1\nu_2}\mathcal{S}_{\mu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_1\nu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_2} + \mathcal{R}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{S}_{\mu_2\nu_1} + \frac{1}{2}\mathcal{S}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}\right] = 0.\end{aligned} \tag{74}$$

Переходя к Фурье-компонентам:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \Lambda}(z;k_1,k_2) + \int_p \mathcal{K}(p)\Big[\mathcal{S}(-p,k_1,k_2)\,\mathcal{S}(p) + \mathcal{S}(-p)\,\mathcal{S}(p,k_1,k_2) + \\ &\quad + \mathcal{S}(-p,k_1)\,\mathcal{S}(p,k_2) + \mathcal{S}(-p,k_2)\,\mathcal{S}(p,k_1)\Big] = \mathcal{U}^{(\mathrm{Q})}(z;k_1,k_2) + \mathcal{U}(z;k_1,k_2),\end{aligned} \tag{75}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{(\mathrm{Q})}(z;k_1,k_2) = &\int_p \mathcal{K}(p)\Big[\mathcal{R}(-p,k_1,k_2)\,\mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(-p)\,\mathcal{R}(p,k_1,k_2) + \\ &+ \mathcal{R}(-p,k_1)\,\mathcal{R}(p,k_2) + \mathcal{R}(-p,k_2)\,\mathcal{R}(p,k_1) + \mathcal{R}(-p,p,k_1,k_2)\Big].\end{aligned} \tag{76}$$

второе уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \Lambda}(z;k_1,k_2) + 2\int_p \mathcal{K}(p)\Big[&\mathcal{R}(-p,k_1,k_2)\,\mathcal{S}(p) + \mathcal{R}(-p)\,\mathcal{S}(p,k_1,k_2) + \mathcal{R}(-p,k_1)\,\mathcal{S}(p,k_2) + \\ &+ \mathcal{R}(-p,k_2)\,\mathcal{S}(p,k_1) + \frac{1}{2}\mathcal{S}(-p,p,k_1,k_2)\Big].\end{aligned} \tag{77}$$

δ-конфигурации φ

Рассмотрим постоянные конфигурации поля φ в координатном пространстве (δ-конфигурация в импульсном пространстве) $\varphi_\delta\left(p\right)=\varphi\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(p\right)$. Тогда:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\left[\varphi_\delta\right]\left(p_1,\dots,p_n\right)&\equiv\left.\frac{\delta^n\mathcal{S}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(p_1\right)\dots\delta\varphi\left(p_n\right)}\right|_{\varphi=\varphi_\delta}=\\&=\sum_{l=n}^{\infty}\frac{1}{(l-n)!}\varphi^{l-n}\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(p_1+\dots+p_n\right)\bar{\mathcal{S}}^{(l)}\underbrace{\left(p_1,\dots,p_n,0,\dots,0\right)}_{\text{всего } l \text{ аргументов}}.\end{aligned}\tag{78}$$

И, аналогично:

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}\left[\varphi_\delta\right]\left(p_1,\dots,p_{n-k}\right)=\\&=\sum_{l=n-k}^{\infty}\frac{1}{(l-(n-k))!}\varphi^{l-(n-k)}\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(p_1+\dots+p_{n-k}\right)\bar{\mathcal{S}}^{(l)}\underbrace{\left(p_1,\dots,p_{n-k},0,\dots,0\right)}_{\text{всего } l \text{ аргументов}}.\end{aligned}\tag{79}$$

Отсюда делаем вывод, что

$$\mathcal{S}\left[\varphi_\delta\right]\underbrace{\left(p_1,\dots,p_{n-k},p_{n-k+1}=0,\dots,p_n=0\right)}_{\text{всего } n \text{ аргументов}}=\frac{\partial^k}{\partial\varphi^k}\mathcal{S}\left[\varphi_\delta\right]\underbrace{\left(p_1,\dots,p_{n-k}\right)}_{n-k \text{ аргументов}}.\tag{80}$$

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\left[\varphi_\delta\right]\left(k_1,\dots,k_l\right)&=\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(k_1+\dots+k_l\right)\bar{\mathcal{S}}\left[\varphi_\delta\right]\left(k_1,\dots,k_l\right),\\\mathcal{R}\left[\varphi_\delta\right]\left(k_1,\dots,k_l\right)&=\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(k_1+\dots+k_l\right)\bar{\mathcal{R}}\left[\varphi_\delta\right]\left(k_1,\dots,k_l\right),\end{aligned}\tag{81}$$

получим тождества для функций, входящих в уравнения (76-77):

$$\mathcal{P}\left(p\right)=\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(p\right)\frac{\partial\bar{\mathcal{P}}}{\partial\varphi},\quad\mathcal{P}\left(0,k_1,k_2\right)=\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(k_1+k_2\right)\frac{\partial\bar{\mathcal{P}}\left(k_1,k_2\right)}{\partial\varphi},\tag{82}$$

где $\mathcal{P}$ — это $\mathcal{R}$ или $\mathcal{S}$. Таким образом, если мы найдём явный вид $\bar{\mathcal{S}}[\varphi_\delta]$ и $\bar{\mathcal{R}}[\varphi_\delta]$ на ненулевом значении конфигурации φ_δ, то мы найдём одновременно *все* коэффициенты разложения функционалов $\bar{\mathcal{S}}[\varphi]$ и $\bar{\mathcal{R}}[\varphi]$ в ФРТ по полю φ, а значит найдём выражение для волнового функционала $\Psi[\varphi]$.

Используя эти тождества, мы сможем свести трёхточечные функции Грина $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ к двухточечным, а одноточечные — к вакуумным значениям. Однако, четырёхточечные функции точно не сводятся к двухточечным. Для того, чтобы получить замкнутые уравнения, воспользуемся BMW-приближением [18, 19, 20] и приближённо запишем:

$$\begin{aligned}&\int_p\mathcal{K}\left(p\right)\mathcal{P}\left(-p,p,k_1,k_2\right)=\int_p\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(k_1+k_2\right)\mathcal{K}\left(p\right)\bar{\mathcal{P}}\left(-p,p,k_1,k_2\right)\xrightarrow{\textbf{BMW}}\\&\xrightarrow{\textbf{BMW}}\left(2\pi\right)^D\delta^{(D)}\left(k_1+k_2\right)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\bar{\mathcal{P}}\left(k_1,k_2\right)\int_p\mathcal{K}\left(p\right)+O\left(\dots\right).\end{aligned}\tag{83}$$

Наконец, введём δ-поле для Λ и рассмотрим трансляционно-инвариантную задачу, выделим δ-функции у всех $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$. Положим $k_1=-k_2=q$ и введём обозначение: $f\left(q;-q\right)\equiv f\left(q\right)$. Тогда с учётом (82) и (83), уравнения (76-77) переписываются в следующем виде (считаем $\mathcal{K}\left(p\right)=\mathcal{K}\left(-p\right)$):

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}\left(q\right)}{\partial\Lambda}+2\mathcal{K}\left(0\right)\left[\frac{\partial\bar{\mathcal{S}}}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}\left(q\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\mathcal{S}}\left(q\right)}{\partial\varphi}\right]+4\mathcal{K}\left(q\right)\bar{\mathcal{S}}\left(q\right)\bar{\mathcal{R}}\left(q\right)+\frac{\partial^2\bar{\mathcal{S}}\left(q\right)}{\partial\varphi^2}\int_p\mathcal{K}\left(p\right)=0,\tag{84}$$

$$\frac{\partial\bar{\mathcal{S}}\left(q\right)}{\partial\varLambda}+2\mathcal{K}\left(0\right)\frac{\partial\bar{\mathcal{S}}}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\mathcal{S}}\left(q\right)}{\partial\varphi}+2\mathcal{K}\left(p\right)\bar{\mathcal{S}}^{2}\left(q\right)=\bar{\mathcal{U}}\left(q\right)+\bar{\mathcal{U}}^{(\mathrm{Q})}\left(q\right),\tag{85}$$

где

$$\bar{\mathcal{U}}^{(\mathrm{Q})}\left(q\right)=2\mathcal{K}\left(0\right)\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\mathcal{R}}\left(q\right)}{\partial\varphi}+2\mathcal{K}\left(q\right)\bar{\mathcal{R}}^{2}\left(q\right)+\frac{\partial^{2}\bar{\mathcal{R}}\left(q\right)}{\partial\varphi^{2}}\int_{p}\mathcal{K}\left(p\right).\tag{86}$$

Полагая $\mathcal{K}\left(0\right)=0$ и делая замену $\Phi=\bar{\mathcal{R}}+i\bar{\mathcal{S}}$, $\Phi^{*}=\bar{\mathcal{R}}-i\bar{\mathcal{S}}$, получаем уравнение, эквивалентное системе (84-86):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varLambda}=I\cdot\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\varphi^{2}}+2\mathcal{K}\left(q\right)\Phi^{2}+\bar{\mathcal{U}}\left(q\right),\tag{87}$$

где мы ввели обозначение $I=\int_{p}\mathcal{K}\left(p\right)$.

Изменяя BMW-приближение, можно получить более точное и более удобное для дальнейших вычислений уравнение. Если теперь мы приближенно положим:

$$\int_{k}\mathcal{K}\left(k\right)\bar{\mathcal{P}}\left(-k,k,-p,p\right)\xrightarrow{\mathbf{BMW}_{+}}\int_{|k|<p}\mathcal{K}\left(k\right)\frac{\partial^{2}\bar{\mathcal{P}}}{\partial\varphi^{2}}\left(p\right)+\int_{|k|>p}\mathcal{K}\left(k\right)\frac{\partial^{2}\bar{\mathcal{P}}}{\partial\varphi^{2}}\left(k\right),\tag{88}$$

то мы придём к уравнению:

$$i\frac{\partial\Phi(p)}{\partial\varLambda}=\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\varphi^{2}}\int_{|k|<p}\mathcal{K}\left(k\right)+\int_{|k|>p}\mathcal{K}\left(k\right)\frac{\partial^{2}\Phi\left(k\right)}{\partial\varphi^{2}}+2\mathcal{K}\left(p\right)\Phi^{2}+\bar{\mathcal{U}}.\tag{89}$$

Дифференцируя по p и вводя обозначения $\Phi_{p}=w_{p}$, $\frac{\partial}{\partial p}\left(2\mathcal{K}\left(p\right)\Phi^{2}+\bar{\mathcal{U}}\right)=\frac{\partial W}{\partial p}$, получаем:

$$i\frac{\partial w}{\partial\varLambda}=\frac{\partial^{2}w}{\partial\varphi^{2}}\underbrace{\int_{|k|<p}\mathcal{K}\left(k\right)}_{D(p)}+\frac{\partial W}{\partial p}.\tag{90}$$

Заменой $T=\int\limits_{\varLambda_{0}}^{\varLambda}d\varLambda'\,D(\varLambda',p)+T_{0}(p)=\mathscr{D}\left(\varLambda,p\right)+T_{0}(p)$ уравнение сводится к неоднородному псевдолинейному с постоянным коэффициентом $a=\frac{1}{i}$:

$$\frac{\partial w(T,\varphi,p)}{\partial T}=a\frac{\partial^{2}w(T,\varphi,p)}{\partial\varphi^{2}}+a\underbrace{\frac{\partial W(T,\varphi,p)}{\partial p}\frac{1}{D(T,p)}}_{h(T,\varphi,p)}.\tag{91}$$

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\mathscr{E}(\varphi,T)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Ta}}\exp\left(-\frac{\varphi^{2}}{4Ta}\right),\tag{92}$$

Отсюда, при нулевом начальном условии $w\left(\varphi,T=T_{0}(p)\right)=\mathrm{Ic}(\varphi)\equiv0$:

$$w\left(T,\varphi\right)=\int\limits_{T_{0}}^{T}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,h\left(\phi,\tau\right)\mathscr{E}\left(\varphi-\phi,T-\tau\right)=\int\limits_{T_{0}}^{T}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\phi\,h\left(\tau,\phi\right)\frac{\exp\left[\frac{(\varphi-\phi)^{2}}{4i(T-\tau)}\right]}{2\sqrt{\pi i\left(T-\tau\right)}}.\tag{93}$$

Делая обратную замену $\tau = \int\limits_{\varLambda_0}^{\lambda} d\lambda' \, D(\lambda', p) + T_0(p) = \mathscr{D}(\lambda, p) + T_0\left(\varLambda_0\right)$, с учётом того, что $h\left(\tau\left(\lambda\right), \phi\right) = \frac{\partial W}{\partial p}\left(\lambda, \phi\right) \frac{1}{D(\lambda, p)}$, получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p}\left(\varLambda, \varphi, p\right) \equiv w\left(\varLambda, \varphi, p\right) = \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \frac{\partial W\left(\lambda, \phi, p\right)}{\partial p} \frac{\exp\left(\frac{(\varphi - \phi)^2}{4i[\mathscr{D}(\varLambda, p) - \mathscr{D}(\lambda, p)]}\right)}{2\sqrt{\pi i\left[\mathscr{D}(\varLambda, p) - \mathscr{D}(\lambda, p)\right]}}, \tag{94}$$

причём, $\mathscr{D}(\varLambda, p) - \mathscr{D}(\lambda, p) = \int\limits_{\lambda}^{\varLambda} d\varLambda' D(\varLambda', p) \equiv \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, p)$. Интегрируя по p, получаем выражение для Φ:

$$\Phi(\varLambda, \varphi, p) - \Phi(\varLambda, \varphi, p_0) = \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \int\limits_{p_0}^{p} dq \, \frac{\partial W\left(\lambda, \phi, q\right)}{\partial q} \frac{\exp\left(\frac{(\varphi - \phi)^2}{4i\varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q)}\right)}{2\sqrt{\pi i \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q)}}. \tag{95}$$

Уравнение (95) решается методом итераций. В предположении малости потенциала $\bar{\mathcal{U}} \to \epsilon \cdot \bar{\mathcal{U}}$, первой поправкой к $\Phi(\varLambda, \varphi, p_0)$ будет (здесь мы делаем замену $\chi = \phi - \varphi$):

$$\Phi^{(1)}(\varLambda, \varphi, p) = \Phi(\varLambda, \varphi, p_0) + \epsilon \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\chi \int\limits_{p_0}^{p} dq \, \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}\left(\lambda, \varphi + \chi, q\right)}{\partial q} \frac{\exp\left(\frac{\chi^2}{4i\varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q)}\right)}{2\sqrt{\pi i \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q)}}. \tag{96}$$

Представим производную $\partial\bar{\mathcal{U}}/\partial q$ в виде интеграла Фурье-Стилтьеса:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{U}}(\lambda, \varphi + \chi, q)}{\partial q} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\dot{F}_{\lambda, q}(x) e^{i(\varphi + \chi)x}, \tag{97}$$

где точка означает производную по q. Подставляя в выражение (96), получаем:

$$\Phi^{(1)}(\varLambda, \varphi, p) - \Phi^{(1)}(\varLambda, \varphi, p_0) = -i\epsilon \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{p_0}^{p} dq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\dot{F}_{\lambda, q}(x) e^{i\varphi x} e^{ix^2 \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q)}. \tag{98}$$

Тогда для $\bar{\mathcal{S}}$ и $\bar{\mathcal{R}}$ имеем:

$$\bar{\mathcal{S}}^{(1)}(\varLambda, \varphi, p_0) - \bar{\mathcal{S}}^{(1)}(\varLambda, \varphi, p) = \epsilon \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{p_0}^{p} dq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\dot{F}_{q, \lambda}(x) \cos\left[\varphi x + \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q) x^2\right], \tag{99}$$

$$\bar{\mathcal{R}}^{(1)}(\varLambda, \varphi, p) - \bar{\mathcal{R}}^{(1)}(\varLambda, \varphi, p_0) = \epsilon \int\limits_{\varLambda_0}^{\varLambda} d\lambda \int\limits_{p_0}^{p} dq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\dot{F}_{q, \lambda}(x) \sin\left[\varphi x + \varDelta\mathscr{D}(\varLambda, \lambda, q) x^2\right]. \tag{100}$$

В основном нас будет интересовать зависимость от φ, поэтому для упрощения дальнейших вычислений положим $\varLambda = +\infty$, $\varLambda_0 = 0$, $p = +\infty$ и $p_0 = 0$. Тогда разложим следующие выражения по функциям Эрмита $\psi_n(x)$:

$$\begin{aligned} d\dot{F}_{q, \lambda}(x) \cos\left[x \varDelta\mathscr{D}\right] &= dx \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n, \lambda, q} \psi_{2n}\left(\frac{x}{a_{2n, \lambda, q}}\right), \\ d\dot{F}_{q, \lambda}(x) \sin\left[x \varDelta\mathscr{D}\right] &= dx \sum_{n=0}^{\infty} s_{2n+1, \lambda, q} \psi_{2n+1}\left(\frac{x}{b_{2n+1, \lambda, q}}\right). \end{aligned} \tag{101}$$

Раскрывая косинус суммы, получаем для $\bar{\mathcal{S}}$ следующее выражение:

$$\bar{\mathcal{S}}^{(1)}(\varLambda=+\infty,\varphi,p=0)-\bar{\mathcal{S}}^{(1)}(\varLambda=+\infty,\varphi,p=+\infty)\equiv\bar{\mathcal{S}}_0^{(1)}-\bar{\mathcal{S}}^{(1)}=$$
$$=\epsilon\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_0^{+\infty}dq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_{2n,\lambda,q}\psi_{2n}(\frac{x}{a_{2n,\lambda,q}})\cos{(\varphi x)}+s_{2n+1,\lambda,q}\psi_{2n+1}(\frac{x}{b_{2n+1,\lambda,q}})\sin{(\varphi x)}\right]. \tag{102}$$

Поскольку функции Эрмита диагонализуют преобразование Фурье [21], то:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi_{2n}(\frac{x}{a_{2n,\lambda,q}})\cos{(\varphi x)}=(-i)^{2n}a_{2n,\lambda,q}\psi_{2n}(a_{2n,\lambda,q}\varphi), \tag{103}$$

а значит:

$$\bar{\mathcal{S}}_0^{(1)}-\bar{\mathcal{S}}^{(1)}=\epsilon\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_0^{+\infty}dq\sum_{n=0}^{+\infty}\left[c'_{2n,\lambda,q}\psi_{2n}(a_{2n,\lambda,q}\varphi)-s'_{2n+1,\lambda,q}\psi_{2n+1}(b_{2n+1,\lambda,q}\varphi)\right], \tag{104}$$

где $c'_{2n,\lambda,q}=(-i)^{2n}c_{2n,\lambda,q}a_{2n,\lambda,q}$ и $s'_{2n+1,\lambda,q}=(-i)^{2n+1}s_{2n+1,\lambda,q}b_{2n+1,\lambda,q}$ — новые коэффициенты ряда. Интегралы по q вычисляется в сепарабельном приближении:

$$\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_0^{+\infty}dq\,c'_{2n,\lambda,q}\psi_{2n}(a_{2n,\lambda,q}\varphi)=\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int_{q=0}^{q=+\infty}da_{2n,\lambda,q}\underbrace{\frac{c_{2n,\lambda,q}}{\partial\ln a_{2n,\lambda,q}/\partial q}}_{c''_{2n,\lambda}(a_{2n,\lambda,q})}\psi_{2n}(a_{2n,\lambda,q}\varphi)=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\frac{1}{\varphi}\int_{q=0}^{q=+\infty}dz\,c''_{2n,\lambda}\left(\frac{z}{\varphi}\right)\psi_{2n}(z)\underbrace{\equiv}_{\text{сепараб.}}\frac{1}{\varphi^{1+\eta^{2n}}}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\,c'''_{2n,\lambda}\int_{q=0}^{q=+\infty}dz\,z^{\eta_{2n}}\psi_{2n}(z)\equiv\mathscr{A}_{2n}. \tag{105}$$

Аналогично, $\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_0^{+\infty}dq\,s'_{2n+1,\lambda,q}\psi_{2n+1}(b_{2n+1,\lambda,q}\varphi)=\frac{1}{\varphi^{1+\eta_{2n+1}}}\mathscr{B}_{2n+1}$. Обозначим $-\mathscr{B}_{2n+1}$ как $\mathscr{A}_{2n+1}$, тогда:

$$\bar{\mathcal{S}}_0^{(1)}-\bar{\mathcal{S}}^{(1)}=\epsilon\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mathscr{A}_{2n}}{\varphi^{1+\eta_{2n}}}-\frac{\mathscr{B}_{2n+1}}{\varphi^{1+\eta_{2n+1}}}\right]=\frac{\epsilon}{\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{A}_n\varphi^{-\eta_n}. \tag{106}$$

Значения $\mathscr{A}_n$ и η_n зависят от конкретного вида потенциала $\bar{\mathcal{U}}$. Таким же образом вычисляется поправка к $\bar{\mathcal{R}}$:

$$\bar{\mathcal{R}}^{(1)}-\bar{\mathcal{R}}_0^{(1)}=\frac{\epsilon}{\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\mathscr{A}}_n\varphi^{-\tilde{\eta}_n}. \tag{107}$$

Отметим, что уже такая упрощённая модель интересна по следующей причине: полученные ряды могут суммироваться к некоторой функции поля φ, имеющей в пределе $\varphi\to\infty$ степенное поведение. Таким образом, данная модель может описывать критическое поведение некоторых физических систем.

5.2. ФРГ-потоковые уравнения: уравнение Вильсона-Полчински и функциональное уравнение теплопроводности

Перейдём теперь к рассмотрению ФРГ-потоковых уравнений. Как мы помним, для производящего функционала ампутированных связных функций Грина $\mathcal{G}_{\text{ac},\Lambda}[\varphi]$ верно следующее выражение:

$$e^{\mathcal{G}_{\text{ac},\Lambda}[\varphi]} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_{0,\Lambda}} \int D\varphi' e^{-S_0[\varphi']-S_{\text{int}}[\varphi'+\varphi]} = e^{\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}|G_{0,\Lambda}|\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^{-S_{\text{int}}[\varphi]}, \tag{108}$$

где $\mathcal{S}_\Lambda[\varphi] = e^{\mathcal{G}_{\text{ac},\Lambda}[\varphi]}$ — матрица рассеяния [3]. Дифференцируя по Λ, получаем:

$$\frac{\partial\, \mathcal{S}_\Lambda[\varphi]}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \int\!\!\int d^D x_1\, d^D x_2\, \frac{\partial G_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda}(x_1, x_2) \frac{\delta^2 \mathcal{S}_\Lambda[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}. \tag{109}$$

5.3. Уравнение на вторую вариационную производную $\mathcal{S}$-матрицы

Дважды варьируя (109) по φ, получим в трансляционно-инвариантном анзаце в импульсном представлении уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \Lambda}[\varphi](\Lambda, k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\partial G(\Lambda, p)}{\partial \Lambda} \mathcal{G}^{(4)}[\varphi](\Lambda; p, -p, k, -k), \tag{110}$$

где мы ввели обозначения

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta\varphi^2}[\varphi_\delta](\Lambda, k) \equiv \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda, k), \quad \frac{\delta^4 \mathcal{S}}{\delta\varphi^4}[\varphi_\delta](\Lambda, k, -k, p, -p) \equiv \mathcal{G}^{(4)}(\Lambda, k, -k, p, -p).$$

В полученном уравнении можно выбрать постоянные (в координатном пространстве) полевые конфигурации φ, воспользоваться BMW$_+$-приближением (88) и записать:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \Lambda}(\varphi, k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\partial G(\Lambda, p)}{\partial \Lambda} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \varphi^2}(\Lambda, \varphi, p)\theta(p-k) + \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(2)}}{\partial \varphi^2}(\varphi, \Lambda, k)\theta(k-p) \right]. \tag{111}$$

Дифференцируя по k и вводя обозначение $w(\Lambda, \varphi, k) \equiv \frac{\partial}{\partial k}\mathcal{G}(\Lambda, \varphi, k)$, получаем *однородное* уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial w(\Lambda, \varphi, k)}{\partial \Lambda} = a(\Lambda, k) \frac{\partial^2 w(\Lambda, \varphi, k)}{\partial \varphi^2}, \tag{112}$$

где коэффициент теплопроводности $a(\Lambda, k)$ определяется для регулятора Литима (60) следующим образом:

$$\begin{aligned} a(\Lambda, k) &= \frac{1}{2} \int_{|p|<|k|} \frac{\partial G(\Lambda, p)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int\limits_0^{+\infty} dp p^{D-1} \theta(k-p) \frac{\partial G(\Lambda)}{\partial \Lambda} \theta(\Lambda - p) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D D} \frac{\partial G(\Lambda)}{\partial \Lambda} p^D\Big|_{p=\min\{k,\Lambda\}} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D D} \frac{-2n}{\Lambda^{2n+1}} \left[k^D \theta(\Lambda - k) + \Lambda^D \theta(k - \Lambda) \right] < 0, \end{aligned} \tag{113}$$

при этом предполагается, что $\theta(0) = \frac{1}{2}$.

На первый взгляд, решение уравнения (112) плохо определено, так как коэффициент теплопроводности отрицательный, однако это не так. Дело в том, что начальное условие задано при $\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_0 \to +\infty$ уравнением (55) и нахождение решения производится “интегрированием назад”. Ниже мы показываем это явно и находим соответствующее решение.

Введём обозначение $C_D = \frac{1}{2D}\frac{\Omega_D}{(2\pi)^D}$. Диагональ $k = \mathit{\Lambda}$ разбивает область интегрирования уравнения (112) на две области с разными коэффициентами $a(\mathit{\Lambda}, k)$. Аналогично тому, как это делалось для уравнения Риккати (63), мы получим решение уравнения (112) в области $k < \mathit{\Lambda} \le \mathit{\Lambda}_0$ из начального условия при $\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_0$, а затем получим решение при $\mathit{\Lambda} < k \le \mathit{\Lambda}_0$ по непрерывности.

Итак введём естественный для данной задачи параметр ℓ — т.н. РГ-время [3].

$$\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_0 e^{-\ell}; \quad \ell = \ln\frac{\mathit{\Lambda}_0}{\mathit{\Lambda}}, \tag{114}$$

где $\mathit{\Lambda}_0$ — естественное обрезание теории. $\mathit{\Lambda}_0 \ne +\infty$, так как неполиномиальные теории, которые мы рассматриваем в данной главе, не являются перенормируемыми. Если $u(\varphi, \ell, k) = w(\varphi, \mathit{\Lambda}(\ell), k)$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u(\varphi, \ell, k)}{\partial \ell} = a(\ell, k)\frac{\partial^2 u(\varphi, \ell, k)}{\partial \varphi^2}, \tag{115}$$

где коэффициент теплопроводности $a(\ell, k)$ принимает следующие значения:

$$a(\mathit{\Lambda}(\ell), k) = \begin{cases} -\mathit{\Lambda} C_D \frac{\partial G(\mathit{\Lambda})}{\partial \mathit{\Lambda}} k^D\big|_{\mathit{\Lambda}=\mathit{\Lambda}(\ell)} \equiv \alpha_1(\ell, l), & 0 \le k < \mathit{\Lambda}(\ell) \le \mathit{\Lambda}_0 \Longleftrightarrow 0 \le \ell < \ln\frac{\mathit{\Lambda}_0}{k} \\ -\mathit{\Lambda} C_D \frac{\partial G(\mathit{\Lambda})}{\partial \mathit{\Lambda}} \mathit{\Lambda}^D\big|_{\mathit{\Lambda}=\mathit{\Lambda}(\ell)} \equiv \alpha_2(\ell, k), & 0 \le \mathit{\Lambda}(\ell) < k \le \mathit{\Lambda}_0 \Longleftrightarrow \ln\frac{\mathit{\Lambda}_0}{k} < \ell < +\infty. \end{cases} \tag{116}$$

Заметим, что $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ и $\ell = 0$ соответствует значению $\mathit{\Lambda} = \mathit{\Lambda}_0$, то есть именно при $\ell = 0$ заданы начальным условия (55), а значит решение хорошо определено.

Сделаем замену $t(\ell) = \int_0^\ell d\ell' \alpha_1(\ell', k) = \frac{C_D k^D}{\mathit{\Lambda}_0^{2n}}(e^{2n\ell} - 1)$, тогда решение при $0 \le \ell < \ln\frac{\mathit{\Lambda}_0}{k}$ с начальным условием $u(\varphi, \ell(t = 0) \equiv 0, k) = B_k(\varphi, k)$ имеет следующий вид:

$$u_1(\varphi, \ell_t, k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi B_k(\phi, k)\mathscr{E}(\varphi - \phi, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi B_k(\phi, k)\frac{\mathit{\Lambda}_0^n}{\sqrt{4\pi C_D k^D}}\frac{e^{-\frac{(\varphi-\phi)^2 \mathit{\Lambda}_0^{2n}}{4C_D k^D (e^{2n\ell}-1)}}}{\sqrt{e^{2n\ell} - 1}}. \tag{117}$$

Возвращаясь к $\mathit{\Lambda}$, получаем:

$$w_1(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi B_k(\phi, k)\frac{\beta_1}{\sqrt{\pi}}e^{-(\varphi-\phi)^2\beta_1^2}, \tag{118}$$

где мы ввели обозначение: $\beta_1 = \beta_1(\mathit{\Lambda}, k) = \frac{(\mathit{\Lambda}_0 \mathit{\Lambda})^n}{\sqrt{4C_D k^D (\mathit{\Lambda}_0^{2n} - \mathit{\Lambda}^{2n})}}$. Разложим теперь $B_k(\phi, k)$ в ряд Фурье по ϕ. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} w_1(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \sum_m B_{m,k}(k) e^{\frac{im\phi}{\phi_0}} \frac{\beta_1(\mathit{\Lambda}, k)}{\sqrt{\pi}} e^{-(\phi-\varphi)^2\beta_1^2(\mathit{\Lambda},k)} = \\ &= \sum_m B_{m,k}(k) e^{-\frac{1}{4}\frac{m^2}{\phi_0^2\beta_1^2(\mathit{\Lambda},k)} + \frac{im\varphi}{\phi_0}}. \end{aligned} \tag{119}$$

Теперь найдём по непрерывности $w_2(\varphi, \mathit{\Lambda}, k)$. Для этого сделаем замену:

$$t = \int_{\ln\frac{\mathit{\Lambda}_0}{k}}^{\ell} d\ell' \alpha_2(\ell', k) = \frac{2nC_D}{D - 2n}\left(k^{D-2n} - \mathit{\Lambda}^{D-2n}\right) \equiv \varkappa\left(k^{D-2n} - \mathit{\Lambda}^{D-2n}\right). \tag{120}$$

Тогда уравнение примет вид уравнения с постоянным коэффициентом теплопроводности, а для функции $w_2(\varphi, \mathit{\Lambda}, k)$ будет справедливо следующее выражение:

$$w_2(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \tilde{B}_k(\phi, k) \frac{e^{-\frac{(\varphi-\phi)^2}{4\varkappa\left(k^{D-2n}-\mathit{\Lambda}^{D-2n}\right)}}}{\sqrt{\pi\varkappa\left(k^{D-2n} - \mathit{\Lambda}^{D-2n}\right)}} \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \tilde{B}_k(\phi, k) \frac{\beta_2(\mathit{\Lambda}, k)}{\sqrt{\pi}} e^{-(\varphi-\phi)^2 \beta_2^2(\mathit{\Lambda},k)}, \tag{121}$$

где $\beta_2(\mathit{\Lambda}, k) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\varkappa(k^{D-2n}-\mathit{\Lambda}^{D-2n})}}$, а $\tilde{B}_k(\phi, k)$ — начальное условие, причём по условию склейки решений:

$$\tilde{B}_k(\phi, k) = w_1(\phi, \mathit{\Lambda}, k)\Big|_{\mathit{\Lambda}=k}. \tag{122}$$

Подставляя теперь решение в первой области, получаем:

$$\begin{aligned} w_2(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) &= \sum_m B_{m,k}(k) e^{-\frac{m^2}{\phi_0} \frac{C_D k^D (\mathit{\Lambda}_0^{2n} - k^{2n})}{(\mathit{\Lambda}_0 k)^n}} e^{-\frac{1}{4}\frac{m^2}{\beta_2^2 \phi_0^2} + \frac{im\varphi}{\phi_0}} = \\ &= \sum_m B_{m,k}(k) e^{\frac{im\varphi}{\phi_0}} e^{-\frac{m^2 C_D}{\phi_0^2} \frac{1}{D-2n}\left[D\frac{k^D}{k^{2n}} - (D-2n)\frac{k^D}{\mathit{\Lambda}_0^{2n}} - 2n\frac{\mathit{\Lambda}^D}{\mathit{\Lambda}^{2n}}\right]}. \end{aligned} \tag{123}$$

Предел $\mathit{\Lambda} \to 0$ теперь даст теорию без обрезания (физическую теорию). Итак, устремив $\mathit{\Lambda}$ к нулю, а $\mathit{\Lambda}_0$ к бесконечности и проинтегрировав ответ по k от 0 до ∞, получим:

$$\mathcal{G}(\varphi, \mathit{\Lambda} = 0, k \to +\infty) - \mathcal{G}(\varphi, \mathit{\Lambda} = 0, k = 0) = \sum_m \int\limits_0^{+\infty} dp B_{m,p}(p) e^{-\frac{m^2 C_D D p^{D-2n}}{\phi_0^2 (D-2n)}} e^{\frac{im\varphi}{\phi_0}}. \tag{124}$$

Предполагаем, что $B_p(\varphi, p)$ — чётная функция φ. Тогда в сумме останутся только косинусы. В частном случае $D = 4$, $n = 1$ имеем:

$$\mathcal{G}(\varphi, k \to +\infty) - \mathcal{G}(\varphi, k = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^{+\infty} dp B_{m,p}(p) \cos\left(\frac{m\varphi}{\phi_0}\right) e^{-2m^2 C_4 \left(\frac{p}{\phi_0}\right)^2}. \tag{125}$$

Таким образом, мы выразили решение уравнения через Фурье-компоненты начального условия. Определение этих начальных условий и нахождение теорий для которых начальное условие не будет тождественным нулём представляет собой нетривиальную задачу.

Итак, согласно нашему предположению, начальные условия на $\mathit{\Lambda}_0$ задаются функцией $B(\varphi, p)$ (в общем случае — функционалом):

$$B(\varphi, p) = \left(\frac{\delta}{\delta\varphi} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) \mathcal{G}(\varphi, p) \xrightarrow{\varphi=0;\ \mathit{\Lambda}=\mathit{\Lambda}_0} -\left(\frac{\delta}{\delta\varphi} \otimes \frac{\delta}{\delta\varphi}\right) S_{\text{int}}(p). \tag{126}$$

При этом, согласно определениям выше:

$$\begin{aligned} B(\varphi, p) - B(\varphi, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^p dk B_{m,k}(k) \cos\left(\frac{m\varphi}{\phi_0}\right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left[B_m(p) - B_m(0)\right]}_{-g_m(p)} \cos\left[\frac{m\varphi}{\phi_0}\right]. \end{aligned} \tag{127}$$

При некоторых $g_m(p)$ в этом выражении сумма вычисляется. Например:

$$g_m(p) = g_m e^{-\left(\frac{p_0}{p}\right)^2}. \tag{128}$$

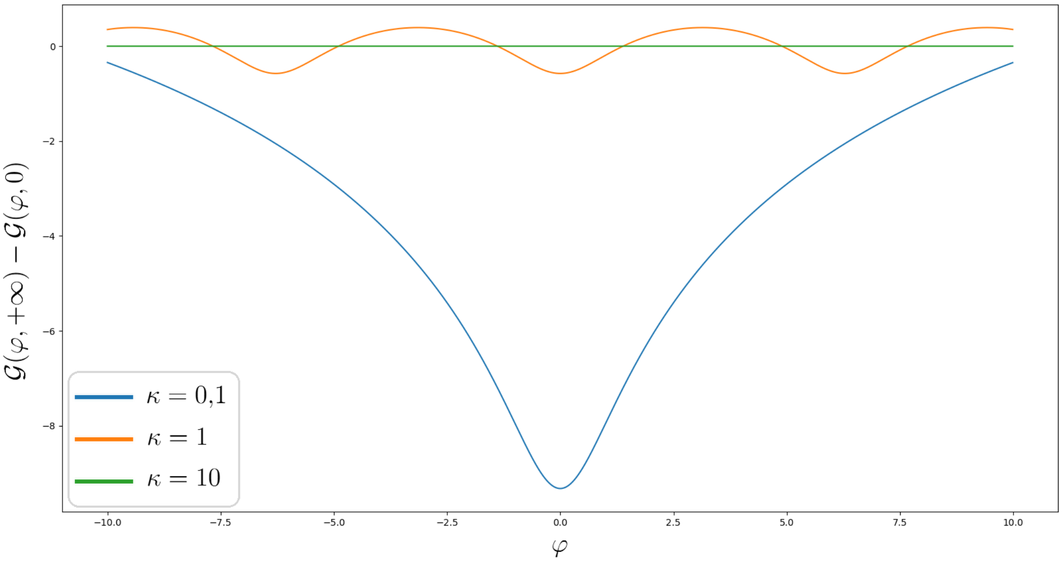


Рис. 2: Разность $\mathcal{G}(\varphi,+\infty)-\mathcal{G}(\varphi,0)$ от поля φ при $g = p_0 = 1$ при различных значениях κ (см. выражение 130) при $\kappa \cdot m \cdot g_m = g \cdot m^{-1/2}$.

В этом случае $g_{m,p} = -B_{m,p} = \frac{2}{p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^2 g_m(p)$, и тогда разность функций $\mathcal{G}$ примет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\varphi,+\infty)-\mathcal{G}(\varphi,0) &= \sum_{m=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{m\varphi}{\phi_0}\right)\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^3}(-2g_m)e^{-\frac{1}{t^2}-2C_4m^2\frac{p_0^2}{\phi_0^2}t^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{m\varphi}{\phi_0}\right)\left(-\sqrt{8C_4}g_m\frac{p_0 m}{\phi_0}\right)K_1\left(\sqrt{8C_4}\frac{p_0 m}{\phi_0}\right).\end{aligned} \tag{129}$$

Переопределив $p_0 \to \sqrt{8C_4}p_0$ и разложив модифицированную функцию Бесселя I-рода при малых $\kappa = \frac{p_0}{\phi_0}$, можно вычислить сумму. Например, при $\kappa \cdot m \cdot g_m = g \cdot m^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\varphi,+\infty)-\mathcal{G}(\varphi,0) &\simeq g\sqrt{\frac{\pi}{8\kappa}}\ln\left[\left(1-e^{-\kappa+i\frac{\varphi}{\phi_0}}\right)\left(1-e^{-\kappa-i\frac{\varphi}{\phi_0}}\right)\right] = \\ &= g\sqrt{\frac{\pi}{8\kappa}}\left[\ln 2-\kappa+\ln\left(\operatorname{ch}\kappa-\cos\frac{\varphi}{\phi_0}\right)\right].\end{aligned} \tag{130}$$

Таким образом, мы выразили решение уравнения на вторую вариационную производную функционала $\mathcal{S}$-матрицы на ненулевом поле через начальные условия, определяемые действием взаимодействия неполиномиальной теории.

Тем не менее, открытым остается вопрос о том, сохраняется ли структура решения в следующих порядках, т.е. для высших вариационных производных функционала. Этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе. Также интересно выразить полученные результаты через начальные условия, заданные теорией в координатном представлении. Это также будет сделано далее.

5.4. Уравнения на высшие вариационные производные $\mathcal{S}$-матрицы

Проварьировав обе части уравнения (109) по φ n раз, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\mathcal{G}^{(n)}[\varphi](\Lambda;x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}\int\!\!\int d^Dy_1d^Dy_2\frac{\partial G}{\partial\Lambda}(\Lambda;y_1,y_2)\mathcal{G}^{(n+2)}[\varphi](\Lambda;y_1,y_2;x_1,\ldots,x_n). \tag{131}$$

В трансляционно–инвариантном случае можно явно выделить закон сохранения импульса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial\Lambda}(\Lambda;p,p')&=\frac{\partial\bar{G}}{\partial\Lambda}(\Lambda;p,-p')(2\pi)^D\delta^D(p+p');\\ \mathcal{G}^{(n)}[\varphi](\Lambda;k_1,\ldots,k_n)&=\bar{\mathcal{G}}^{(n)}[\varphi](\Lambda;k_1,\ldots,k_n)(2\pi)^D\delta^{(D)}(\sum_i k_i);\\ \mathcal{G}^{(n+2)}[\varphi](\Lambda;p,-p;k_1,\ldots,k_n)&=\bar{\mathcal{G}}^{(n)}[\varphi](\Lambda;p,-p;k_1,\ldots,k_n)(2\pi)^D\delta^{(D)}(p-p+\sum_i k_i).\end{aligned} \tag{132}$$

Тогда уравнение (131) перепишется в импульсном пространстве в виде:

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\bar{\mathcal{G}}^{(n)}[\varphi](\Lambda;k_1,\ldots,k_n)=\frac{1}{2}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\partial\bar{G}}{\partial\Lambda}(\Lambda;p)\bar{\mathcal{G}}^{(n+2)}[\varphi](\Lambda;p,-p;k_1,\ldots,k_n). \tag{133}$$

Следуя выводу уравнения второго порядка выберем теперь постоянные полевые конфигурации (в координатном пространстве $\Longleftrightarrow$ δ-конфигурации в импульсном) поля φ. Чтобы в дальнейшем воспользоваться расширенной (на n–точечные функции) процедурой BMW$_+$-приближения, нужно рассматривать в дальнейшем функции, удовлетворяющие специальным кинематическим соотношениям: положим $n\to 2n$, а функции $\mathcal{G}^{(2n)}$ пусть будут зависеть от импульсов следующим образом:

$$\mathcal{G}^{(2n)}(\varphi;\Lambda;k_1,\ldots,k_{2n})\Rightarrow\mathcal{G}^{(2n)}(\varphi;\Lambda;k_1,-k_1,\ldots,k_n,-k_n), \tag{134}$$

причём, исходя из симметрии $\mathcal{G}^{(2n)}$ по перестановкам импульсов, без ограничения общности можно предполагать, что $|k_1|<|k_2|<\cdots<|k_n|$. Вставим в правую часть следующее разбиение единицы:

$$\mathbb{1}(|p|<|k_1|)+\mathbb{1}(|k_1|<|p|<|k_2|)+\cdots+\mathbb{1}(|k_{n-1}|<|p|<|k_n|)+\mathbb{1}(|k_n|<|p|)\equiv 1. \tag{135}$$

Тогда, первый шаг BMW$_{2n+}$ – приближения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\Lambda}\bar{\mathcal{G}}^{(2n)}(\varphi;\Lambda;k_1,-k_1,\ldots,k_n,-k_n)=\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\partial\bar{G}}{\partial\Lambda}(\Lambda,p)\Big[\bar{\mathcal{G}}^{(2n+2)}(\varphi;\Lambda;p=0,k_1,\ldots,k_n)\theta(|k_1|-|p|)+\ldots\\ &\ldots+\bar{\mathcal{G}}^{(2n+2)}(\varphi;\Lambda;p,0,k_2,\ldots,k_n)\theta(|p|-|k_{n-1}|)\theta(|k_n|-|p|)+\\ &+\bar{\mathcal{G}}^{(2n+2)}(\varphi;\Lambda;p,0,k_2,\ldots,k_n)\theta(|p|-|k_n|)\theta(|p|-|k_{n-1}|)\Big]=\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\partial\bar{G}}{\partial\Lambda}(\Lambda,p)\Big[\bar{\mathcal{G}}^{(2n+2)}(\varphi;\Lambda;p=0,k_1,\ldots,k_n)\theta(|k_1|-|p|)+\ldots\\ &\ldots+\bar{\mathcal{G}}^{(2n+2)}(\varphi;\Lambda;p,0,k_2,\ldots,k_n)\theta(|p|-|k_{n-1}|)\Big].\end{aligned} \tag{136}$$

Мы видим, что BMW_{2n+} сводится к $\mathrm{BMW}_{2(n-1)+}$. Ниже мы показываем это явно для $2n = 4$:

$$\frac{\partial}{\partial \varLambda}\bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; k_1, k_2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \varLambda}(\varLambda; p)\Big[\theta(|k_1| - |p|) + \theta(|p| - |k_1|)\theta(|k_2| - |p|) + \theta(|p| - |k_2|)\Big] \times \\ \times \bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; p, k_1, k_2) \xrightarrow{\mathbf{BMW}_{4+}} \tag{137}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{BMW}_{4+}} \frac{1}{2}\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \varLambda}(\varLambda; p)\Big[\theta(|k_1| - |p|)\bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; 0, k_1, k_2) + \\ + \theta(|p| - |k_1|)\theta(|k_2| - |p|)\bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; p, 0, k_2) + \theta(|p| - |k_2|)\theta(|p| - |k_1|)\bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; p, 0, k_2)\Big] = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \varLambda}(\varLambda; p)\Big[\theta(|k_1| - |p|)\bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; 0, k_1, k_2) + \theta(|p| - |k_1|)\bar{\mathcal{G}}^{(6)}(\varphi; \varLambda; p, 0, k_2)\Big]. \tag{138}$$

Поскольку $\bar{\mathcal{G}}^{(n)}$, вообще говоря, зависят от углов ϑ между импульсами, то в простейшем случае мы имеем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial \varLambda}\bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |k_1|, |k_2|, \vartheta_{k_1 k_2}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dp p^{D-1}}{(2\pi)^D}\frac{\partial \bar{G}(\varLambda; p)}{\partial \varLambda} \times \\ \times \Big[\theta(|k_1| - |p|)\int do_p \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |k_1|, |k_2|, \vartheta_{k_1 k_2}) + \theta(|p| - |k_1|)\int do_p \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |p|, |k_2|, \vartheta_{p k_2})\Big]. \tag{139}$$

Усредняя по $\vartheta_{k_1 k_2}$ $(\int do_{k_1 k_2}/\varOmega^{(k_1 k_2)}{}_D)$:

$$\frac{\partial}{\partial \varLambda}\left\langle \bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |k_1|, |k_2|)\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dp p^{D-1 \varOmega_D}}{(2\pi)^D}\frac{\partial \bar{G}(\varLambda; p)}{\partial \varLambda} \times \\ \times \Big[\theta(|k_1| - |p|)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left\langle \bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |k_1|, |k_2|)\right\rangle + \theta(|p| - |k_1|)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left\langle \bar{\mathcal{G}}^{(4)}(\varphi; \varLambda; |p|, |k_2|\right\rangle\Big]. \tag{140}$$

Дифференцируя по $|k_1|$, получаем окончательное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \varLambda}\frac{\partial}{\partial |k_1|}\mathcal{G}^{(4)}(\varphi; |k_1|, |k_2|) = \frac{\varOmega_D}{2}\int\limits_0^{|k_1|} \frac{dp\, p^{D-1}}{(2\pi)^D}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\frac{\partial}{\partial |k_1|}\mathcal{G}^{(4)}(\varphi; |k_1|, |k_2|). \tag{141}$$

Здесь и далее мы будем опускать символы $\bar{\ }$, $\langle \ldots \rangle$ и явную зависимость $\mathcal{G}$ от $\varLambda$. Мы видим, что данное уравнение имеет тот же вид, что и уравнение на двухточечную функцию (112). То же самое будет верно и при $2n > 4$, а значит решение уравнения n-го порядка не будет разрушать приближение $n + 1$ порядка, вид иерархии приближённых уравнений будет сохраняться. Таким образом, можно считать, что BMW_+-приближение является устойчивым методом решения.

5.5. Начальные условия для уравнений высших порядков

В данном параграфе мы изучим вопрос, как будут выглядеть полученные выше результаты, если исходная теория формулируется в координатном представлении. Будем рассматривать неполиномиальные теории вида:

$$e^{-S_{\mathrm{int}}[\varphi]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int d^D x_1 \dots d^D x_m A^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \mathcal{C}(L(\partial_1)\varphi(x_1)) \dots \mathcal{C}(L(\partial_m)\varphi(x_m)), \quad (142)$$

где в качестве $\mathcal{C}$ можно брать cos или ch, $A^{(m)}(x_1, \dots, x_m)$ — некоторые коэффициентные функции, а $L(\partial)$ — дифференциальный оператор, причём $L = L^T$ (условие симметричности[10]). Если обозначить $e^{S_{\mathrm{int}}[\varphi]} = \mathscr{B}[\varphi]$, то начальное условие для уравнения n-го порядка задается производной:

$$\bar{B}_p(\varphi, p) = \overline{\frac{\partial}{\partial |k_1|} \langle \delta^{2n} \mathscr{B}[\varphi] / \delta\varphi^{2n} \big|_{\varphi = \mathrm{Const}} \rangle}, \quad (143)$$

где, как обычно, угловые скобки означают усреднение по углам, а черта — отделение сингулярного множителя. Ниже мы вычислим граничное условие для уравнений второго и четвёртого порядков, а также разовьём некоторую диаграммную технику для работы в высших порядках.

5.5.1. Начальное условие для уравнения на двухточечную функцию

Итак, проварьировав (142) дважды, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathscr{B}[\varphi]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} \int d^D x_1 \dots d^D x_m A^{(m)}(x_1, \dots, x_m) L(\partial_1) \delta^{(D)}(x_1 - y_1) L(\partial_1) \delta^D(x_1 - y_2) \times \\ &\times \mathcal{C}'' \left(L(\partial_1)\varphi(x_1)\right) \mathcal{C} \left(L(\partial_2)\varphi(x_2)\right) \dots \mathcal{C} \left(L(\partial_m)\varphi(x_m)\right) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} &\int d^D x_1 \dots d^D x_m A^{(m)}(x_1, \dots, x_m) L(\partial_1) \delta^{(D)}(x_1 - y_1) L(\partial_2) \delta^D(x_2 - y_2) \times \\ \times \mathcal{C}' \left(L(\partial_1)\varphi(x_1)\right) &\mathcal{C}' \left(L(\partial_2)\varphi(x_2)\right) \mathcal{C} \left(L(\partial_3)\varphi(x_3)\right) \dots \mathcal{C} \left(L(\partial_m)\varphi(x_m)\right). \end{aligned} \quad (144)$$

Поскольку $L(\partial)\mathrm{Const} = L(0) \cdot \mathrm{Const} \equiv L_0 \cdot \mathrm{Const}$, то на постоянном поле мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathscr{B}[\varphi]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)} \bigg|_{\varphi = \mathrm{Const}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} \mathcal{C}''(L_0\varphi) [\mathcal{C}(L_0\varphi)]^{m-1} \cdot \mathrm{Int}_1(y_1, y_2) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} [\mathcal{C}'(L_0\varphi)]^2 [\mathcal{C}(L_0\varphi)]^{m-2} \cdot \mathrm{Int}_2(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (145)$$

где интегралы Int_1 и Int_2 равны:

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}_1(y_1, y_2) &\equiv \int d^D x_1 \dots d^D x_m A^{(m)}(x_1, \dots, x_m) L(\partial_1) \delta^{(D)}(x_1 - y_1) L(\partial_1) \delta^{(D)}(x_1 - y_2) = \\ &= \int \frac{d^D p_1 d^D p_2}{(2\pi)^{2D}} e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} A^{(m)}(p_1 + p_2, \{0\}) L(-ip_1) L(-ip_2), \end{aligned} \quad (146)$$

---

[10] То есть, фактически, $L = L(\partial^2)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}_2(y_1,y_2) &\equiv \int d^Dx_1\dots d^Dx_mA^{(m)}(x_1,\dots,x_m)L(\partial_1)\delta^{(D)}(x_1-y_1)L(\partial_2)\delta^{(D)}(x_2-y_2) = \\ &= \int \frac{d^Dp_1d^Dp_2}{(2\pi)^{2D}}e^{i(p_1y_1+p_2y_2)}A^{(m)}(p_1,p_2,\{0\})L(-ip_1)L(-ip_2).\end{aligned} \tag{147}$$

Символами $\{0\}$ мы обозначили тот факт, что во всех оставшихся позициях стоят нули. Пользуясь симметрией L, выделяя ЗСИ, получаем Фурье-представление интегралов:

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}_1(p_1,p_2) &= (2\pi)^D\delta^{(D)}(p_1+p_2)\overline{A}^{(m)}(\{0\})L^2(ip_1), \\ \mathrm{Int}_2(p_1,p_2) &= (2\pi)^D\delta^{(D)}(p_1+p_2)\overline{A}^{(m)}(p_1,-p_1,\{0\})L^2(ip_1).\end{aligned} \tag{148}$$

Переименуем $p_1 \mapsto p$, а также положим $L(0) = 1/\varphi_0$. Тогда начальное условие для уравнения в теории (142) примет вид:

$$\begin{aligned}\bar{B}_p(\varphi,p) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m!}\mathcal{C}''\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\mathcal{C}^{m-1}\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left[\bar{A}^{(m)}(\{0\})L^2(ip)\right] + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)}{m!}\left[\mathcal{C}'\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\right]^2\mathcal{C}^{m-2}\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)\frac{\partial}{\partial p}\left[\bar{A}^{(m)}(p,-p,\{0\})L^2(ip)\right].\end{aligned} \tag{149}$$

5.5.2. Начальное условие для уравнения на четырёхточечную функцию

Вычислим теперь начальное условие для уравнения на $\mathcal{G}^{(4)}$. Для краткости введём обозначения: $\hat{\delta}_{iy_j} \equiv L(\partial_i)\delta^{(D)}(x_i-y_j)$, $\int A_m(dx) \equiv \int d^Dx_1\dots d^Dx_mA^{(m)}(x_1,\dots,x_m)$, $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)$, и $\{\mathcal{C}\}$ — все оставшиеся $\mathcal{C}_i$ вплоть до $\mathcal{C}_m$. Тогда:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^4\mathscr{B}[\varphi]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)\delta\varphi(y_3)\delta\varphi(y_4)} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m!}\int A_m(dx)\hat{\delta}_{1y_1}\dots\hat{\delta}_{4y_4}\mathcal{C}_1''''\{\mathcal{C}\} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)}{m!}\int A_m(dx)\hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{1y_2}\hat{\delta}_{1y_3}\hat{\delta}_{2y_4}\mathcal{C}_1'''\mathcal{C}_2'\{\mathcal{C}\} + \sum_{k=1}^{3}(y_k \leftrightarrow y_4) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)}{m!}\int A_m(dx)\hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{1y_2}\hat{\delta}_{2y_2}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2''\{\mathcal{C}\} + \sum_{k=1}^{2}(y_k \leftrightarrow y_4) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)}{m!}\int A_m(dx)\Big\{\hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{1y_2}\hat{\delta}_{2y_3}\hat{\delta}_{3y_4}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\} + \hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{1y_3}\hat{\delta}_{2y_2}\hat{\delta}_{3y_4}\mathcal{C}_1'\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\} + \\ &+ \hat{\delta}_{1y_2}\hat{\delta}_{1y_3}\hat{\delta}_{2y_1}\hat{\delta}_{3y_4}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\} + \hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{1y_4}\hat{\delta}_{2y_2}\hat{\delta}_{3y_3}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\} + \\ &+ \hat{\delta}_{1y_2}\hat{\delta}_{1y_4}\hat{\delta}_{2y_1}\hat{\delta}_{3y_1}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\} + \hat{\delta}_{1y_3}\hat{\delta}_{1y_4}\hat{\delta}_{2y_2}\hat{\delta}_{3y_1}\mathcal{C}_1''\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\{\mathcal{C}\}\Big\} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m!}\int A_m(dx)\hat{\delta}_{1y_1}\hat{\delta}_{2y_2}\hat{\delta}_{3y_3}\hat{\delta}_{4y_4}\mathcal{C}_1'\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_3'\mathcal{C}_4'\{\mathcal{C}\}.\end{aligned} \tag{150}$$

Положим поле φ постоянным и, считая $L(0) = 1/\varphi_0$, перейдём в импульсное пространство:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\delta^4 \mathscr{B}}{\delta\varphi(y_1)\ldots\delta\varphi(y_4)}\right|_{\varphi=\mathrm{Const}}(\varphi; p_1, p_2, p_3, p_4) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} \mathcal{C}''''(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-1} A^{(m)}(p_1+p_2+p_3+p_4, \{0\}) \prod_{a=1}^{4} L(ip_a) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} \mathcal{C}'''(\varphi/\varphi_0)\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-2} \Big[(123|4) + (412|3) + (341|2) + (234|1)\Big] \prod_{a=1}^{4} L(ip_a) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} [\mathcal{C}''(\varphi/\varphi_0)]^2 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-2} \Big[(12|34) + (13|24) + (14|23)\Big] \prod_{a=1}^{4} L(ip_a) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)}{m!} \mathcal{C}''(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)]^2 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-3} \times \\
&\times \Big[(12|3|4) + (13|2|4) + (14|2|3) + (23|1|4) + (24|1|3) + (34|1|2)\Big] \prod_{a=1}^{4} L(ip_a) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m!} [\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)]^4 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-4} A^{(m)}(p_1, p_2, p_3, p_4, \{0\}) \prod_{a=1}^{4} L(ip_a).
\end{aligned}
\tag{151}
$$

В этом выражении мы использовали новые символы $(ijk|l)$, $(ij|kl)$ и $(ij|k|l)$. Так, символ $(ijkl) = A^{(m)}(p_i + p_j + p_k + p_l, \{0\})$, а все последующие получаются из него заменой соответствующего знака «+» на запятую, разделяющую аргументы. Выделим теперь ЗСИ, и наложим специальные кинематические условия:

$$
p_1 = -p_2 \equiv k_1, \quad p_3 = -p_4 \equiv k_2. \tag{152}
$$

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathscr{B}}(\varphi; k_1, k_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m!} \mathcal{C}''''(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-1} \bar{A}^{(m)}(\{0\}) L^2(ik_1) L^2(ik_2) + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} \mathcal{C}'''(\varphi/\varphi_0)\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-2} L^2(ik_1) L^2(ik_2) \times \\
&\times \big[2\bar{A}^{(m)}(k_1, -k_1, \{0\}) + 2\bar{A}^{(m)}(k_2, -k_2, \{0\})\big] + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)}{m!} [\mathcal{C}''(\varphi/\varphi_0)]^2 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-2} L^2(ik_1) L^2(ik_2) \times \\
&\times \big[\bar{A}^{(m)}(\{0\}) + \bar{A}^{(m)}(k_1 + k_2, -k_1 - k_2, \{0\}) + \bar{A}^{(m)}(k_1 - k_2, k_2 - k_1, \{0\})\big] + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)}{m!} \mathcal{C}''(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)]^2 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-3} L^2(ik_1) L^2(ik_2) \times \\
&\times \big[\bar{A}^{(m)}(k_2, -k_2, \{0\}) + \bar{A}^{(m)}(k_1, -k_1, \{0\}) + \bar{A}^{(m)}(k_1 + k_2, -k_1, -k_2, \{0\}) + \\
&+ \bar{A}^{(m)}(k_1 - k_2, -k_1, k_2, \{0\}) + \bar{A}^{(m)}(k_2 - k_1, k_1, -k_2, \{0\}) + \bar{A}^{(m)}(-k_1 - k_2, k_1, k_2, \{0\})\big] + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m!} [\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)]^4 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-4} \bar{A}^{(m)}(k_1, -k_1, k_2, -k_2, \{0\}) L^2(ik_1) L^2(ik_2).
\end{aligned}
\tag{153}
$$

Остается только усреднить по углам и продифференцировать по $|k_1|$, и мы получим начальное условие для уравнения на четырёхточечную функцию.

5.5.3. Начальное условие для уравнения на n-точечную функцию и диаграммная техника

Из (151) несложно увидеть то, как будет выглядеть соответствующее выражение в n-ом порядке. Общим множителем для всех m-ых слагаемых n-ой производной в импульсном представлении является $\prod\limits_{a=1}^{n} L(ip_a)$, далее берется сумма по всем различным разбиениям λ n в сумму натуральных $\lambda_1+\dots+\lambda_q$. Диаграмме Юнга каждого разбиения можно сопоставить свой набор слагаемых по следующим правилам:

1) Правильные аргументы $A^{(m)}$ получаются, если взять сумму $A^{(m)}(p_1+\dots+p_n,\{0\})$ и заменить знаки «+» на запятые так, чтобы ℓ-ый аргумент $A^{(m)}$ состоял из такого числа слагаемых, сколько содержится клеток в ℓ-ой строке диаграммы, причём последние $m-q$ аргументов — нули.

2) К полученному $A^{(m)}(\dots)$ нужно прибавить все $A^{(m)}$ с нетривиальными перестановками индексов $1\dots n$ (с учётом симметрии по отношению к перестановке аргументов функции $A^{(m)}$).

3) Зависимость от φ задается множителем $\mathcal{C}^{[\lambda_1]}(\varphi/\varphi_0)\dots\mathcal{C}^{[\lambda_q]}(\varphi/\varphi_0)\cdot[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-q}$, где знак ${}^{[\lambda_j]}$ означает λ_j-ую производную по аргументу.

4) Каждый вклад нужно домножить на комбинаторный фактор $\frac{1}{(m-q)!}$.

Например:

$$\ydiagram{4,3,1} = \frac{m(m-1)(m-2)}{m!}\mathcal{C}''''(\varphi/\varphi_0)\mathcal{C}'''(\varphi/\varphi_0)\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-3}\Big[(1234|567|8)+\mathrm{perm}\Big], \tag{154}$$

$$\begin{aligned}\ydiagram{4,4,3,3} &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m!}[\mathcal{C}''''(\varphi/\varphi_0)]^2[\mathcal{C}'''(\varphi/\varphi_0)]^2[\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-4}\times\\ &\times\Big[(\underbrace{\dots}_{4\,\text{шт}}|\underbrace{\dots}_{4\,\text{шт}}|\underbrace{\dots}_{3\,\text{шт}}|\underbrace{\dots}_{3\,\text{шт}})+\mathrm{perm}\Big].\end{aligned} \tag{155}$$

Таким образом для второго порядка:

$$\mathscr{B}^{(2)}(\varphi;p_1,p_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\ydiagram{2}+\ydiagram{1,1}\right\}^{(m)} L(ip_1)L(ip_2). \tag{156}$$

Аналогично, для четвертого порядка:

$$\mathscr{B}^{(4)}(\varphi;p_1,p_2,p_3,p_4) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\ydiagram{4}+\ydiagram{3,1}+\ydiagram{2,2}+\ydiagram{2,1,1}+\ydiagram{1,1,1,1}\right\}^{(m)}\prod_{a=1\dots4}L(ip_a). \tag{157}$$

Здесь верхний индекс (m) у закрывающей скобки обозначает зависимость всех диаграмм от значения m.

5.6. Решение уравнения второго порядка

Воспользуемся теперь результатами параграфа 5.3 и получим решение уравнения (112) с начальным условием (149). Итак, положим в (149) $\mathcal{C} \equiv \cos$, и, для простоты, $L(ik) \equiv L_0 = 1/\varphi_0$. Тогда, согласно (118) (в тех же обозначениях):

$$\begin{aligned} w_1(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial \bar{A}^{(m)}(k, -k, \{0\})}{\partial k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \frac{\beta_1(\mathit{\Lambda}, k)}{\sqrt{\pi}} e^{-(\phi-\varphi)^2 \beta_1(\mathit{\Lambda}, k)^2} \left[\cos^{m-2}\frac{\phi}{\varphi_0} - \cos^m \frac{\phi}{\varphi_0}\right] = \\ &= \frac{\bar{A}_k^{(2)}(k,-k)}{\varphi_0^2} + \frac{\bar{A}_k^{(3)}(k,-k,0)}{\varphi_0^2} e^{-\frac{1}{4\varphi_0^2\beta_1^2}} \cos\left(\varphi/\varphi_0\right) \times \\ &\times \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{-m}}{\varphi_0^2} \left[\frac{\bar{A}_k^{(m+2)}(k,-k,\{0\})}{m!} - \frac{\bar{A}_k^{(m)}(k,-k,\{0\})}{(m-2)!}\right] \sum_{\ell=0}^{m} C_m^\ell e^{\frac{1}{4}\frac{(2\ell-m)^2}{\varphi_0^2\beta_1^2(\mathit{\Lambda},k)} + i(2\ell+m)\frac{\varphi}{\varphi_0}}, \end{aligned} \tag{158}$$

где, как и ранее, мы обозначили производную по модулю k подстрочным индексом $_k$. Начальное условие для второй области $\tilde{B}_k(\phi, k) = w_1(\phi, \mathit{\Lambda}, k)\big|_{\mathit{\Lambda}=k}$, откуда, согласно (121):

$$\begin{aligned} w_2(\varphi, \mathit{\Lambda}, k) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\phi \tilde{B}_k(\phi, k) \frac{\beta_2(\mathit{\Lambda}, k)}{\sqrt{\pi}} e^{-(\phi-\varphi)^2\beta_2^2} = \\ &= \frac{\bar{A}_k^{(2)}(k,-k)}{\varphi_0^2} + \frac{\bar{A}_k^{(3)}(k,-k,0)}{\varphi_0^2} e^{-\frac{(2\ell-m)^2}{4\varphi_0^2}\left(\frac{1}{\beta_1^2(k,k)} + \frac{1}{\beta_2^2(k,\mathit{\Lambda})}\right)} \cos\frac{\varphi}{\varphi_0} + \\ &+ \frac{1}{\varphi_0^2} \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-m} \left[\frac{\bar{A}_k^{(m+2)}(k,-k,\{0\})}{m!} - \frac{\bar{A}_k^{(m)}(k,-k,\{0\})}{(m-2)!}\right] \sum_{\ell=0}^{m} C_m^\ell e^{-\frac{(2\ell-m)^2}{4\varphi_0^2}\left(\frac{1}{\beta_1^2(k,k)} + \frac{1}{\beta_2^2(k,\mathit{\Lambda})}\right)} e^{i(2\ell-m)\frac{\varphi}{\varphi_0}}. \end{aligned} \tag{159}$$

Как и ранее,

$$\frac{1}{\beta_1^2(k,k)} + \frac{1}{\beta_2^2(k,\mathit{\Lambda})} = \frac{4C_D}{D-2n}\left[D\frac{k^D}{k^{2n}} - (D-2n)\frac{k^D}{\mathit{\Lambda}_0^{2n}} - 2n\frac{\mathit{\Lambda}^D}{\mathit{\Lambda}^{2n}}\right] \equiv \beta. \tag{160}$$

Дополнительно $\beta \to 8C_4k^2$ при $D = 4$, $n = 1, \mathit{\Lambda}_0 \to +\infty$, $\mathit{\Lambda} \to 0$. Далее будем рассматривать анзац (128). В этом анзаце:

$$\bar{A}_k^{(m)}(k,-k,\{0\}) = -\frac{2g_m}{k}\left(\frac{p_m}{k}\right)^2 e^{-\left(\frac{p_m}{k}\right)^2}, \tag{161}$$

считая, что p_m не зависит от m и, переобозначая $p_0 = p_m\sqrt{8C_4}$, получаем (с точностью до аддитивной константы):

$$\begin{aligned} \varphi_0^2 \mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) &= \varphi_0^2 \int\limits_{0}^{+\infty} dk\, w_2(\varphi, \mathit{\Lambda} \to 0, k) = \\ &= \boxed{-g_3\varkappa K_1(\varkappa)\cos\left(\varphi/\varphi_0\right) + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{m} 2^{-m} C_m^\ell \left[-\frac{g_{m-2}}{m!} + \frac{g_m}{(m-2)!}\right] \varkappa|2\ell-m| K_1(\varkappa|2\ell-m|),} \end{aligned} \tag{162}$$

где $\varkappa = p_0/\varphi_0$, а K_1 — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Основная трудность дальнейших вычислений заключается в нахождении адекватной аппроксимации внутренней суммы. Задачу можно упростить, если рассматривать ряды только с чётными g_m. В этом случае имеем:

$$\varphi_0^2 \mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2m}}{2^{2m}} \sum_{r=-m}^{m} C_{2m}^{m+r} 2\varkappa|r| K_1(2\varkappa|r|) \exp(2ir\varphi/\varphi_0), \tag{163}$$

где $\alpha_m = \left(\frac{g_m}{(m-2)!} - \frac{g_{m+2}}{m!}\right)$.

Качественно оценим поведение ряда (163). Для этого удобно воспользоваться следующим представлением биномиального коэффициента:

$$C_{2m}^{m+r} = \frac{2^{2m-1}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dw \cos(2rw) \cos^{2m}(w). \tag{164}$$

Тогда:

$$\varphi_0^2 \mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2m}}{2^m} \left[C_{2m}^m + \frac{2^{2m-1}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dw \cos^{2m}(w) \sum_{r=1}^{m} \cos(2rw) 2\varkappa r K_1(2\varkappa r) 2\cos\left(\frac{2r\varphi}{\varphi_0}\right) \right]. \tag{165}$$

В силу того, что внешняя сумма набирается, в основном, при $m \gg 1$, для оценки можно заменить суммирование по $r = \overline{1, m}$ на интегрирование от нуля до бесконечности. Нулевое слагаемое C_{2m}^m мы при этом отбрасываем:

$$\begin{aligned} \varphi_0^2 \mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) &\simeq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2m}}{\pi} \int\limits_0^{\pi} dw \cos^{2m}(w) \int\limits_0^{+\infty} dr \cos(2rw) 2\varkappa r K_1(2\varkappa r) 2\cos\left(\frac{2r\varphi}{\varphi_0}\right) = \\ &= \frac{\varkappa^2}{4} \int\limits_0^{\pi} dw \left\{ \left[\varkappa^2 + (w - \varphi/\varphi_0)^2\right]^{-3/2} + \left[\varkappa^2 + (w + \varphi/\varphi_0)^2\right]^{-3/2} \right\} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{g_{2m}}{(2m-2)!} - \frac{g_{2m+2}}{(2m)!}\right] \cos^{2m}(w). \end{aligned} \tag{166}$$

Введём обозначение:

$$\left[\varkappa^2 + (w - \varphi/\varphi_0)^2\right]^{-3/2} + \left[\varkappa^2 + (w + \varphi/\varphi_0)^2\right]^{-3/2} = \mathcal{F}(w; \varkappa, \varphi/\varphi_0). \tag{167}$$

Тогда $\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi)$ будет задаваться интегралом от суммы $\sum_m \alpha_{2m} \cos^{2m}(w)$ с ядром $\mathcal{F}$. Рассмотрим теперь конкретные примеры g_{2m} и получим $\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi)$, а также явные выражения для начальных условий в соответствующих теориях.

Согласно нашим предположениям, первообразная граничного условия имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{B}(\varphi, p) &= \frac{1}{\varphi_0^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-2)!} [\mathcal{C}'(\varphi/\varphi_0)]^2 [\mathcal{C}(\varphi/\varphi_0)]^{m-2} g_m e^{-p_0^2/p^2} = \\ &= \frac{1}{\varphi_0^2} \sin^2(\varphi/\varphi_0) e^{-p_0^2/p^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_{2m+2}}{(2m)!} \cos^{2m+2}(\varphi/\varphi_0). \end{aligned} \tag{168}$$

Данное выражение будет анализироваться параллельно выражению для $\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi)$.

5.6.1. $g_{2m} = g_0$

В этом случае коэффициенты ряда (142) убывают факториально — как $\frac{1}{m!}$:

$$\bar{B}(\varphi, p) = \frac{g_0}{\varphi_0^2} \sin^2(\varphi/\varphi_0) \cos^2(\varphi/\varphi_0)\, \mathrm{ch}\left[\cos(\varphi/\varphi_0)\right] e^{-p_0^2/p^2}, \tag{169}$$

$$\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) \simeq -\frac{g_0 \varkappa^2}{4\varphi_0^2} \int\limits_0^\pi dw\, \mathcal{F}(w; \varkappa, \varphi/\varphi_0)\, \mathrm{ch}\left(\cos w\right) \sin^2(w). \tag{170}$$

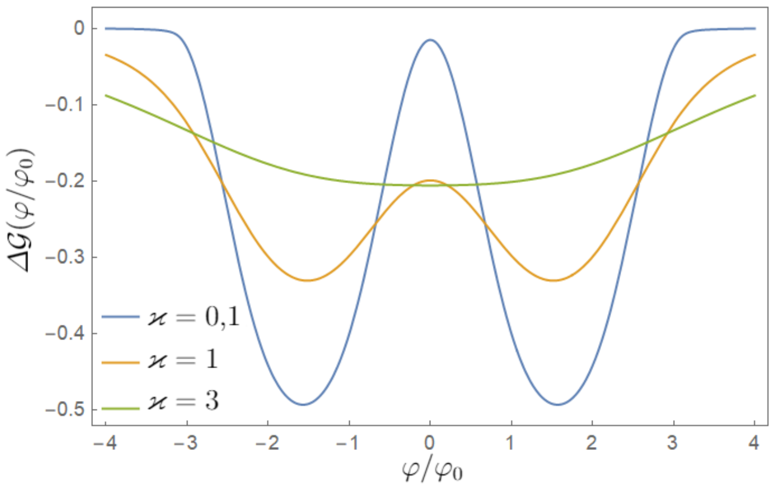


Рис. 3: График зависимости $\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi/\varphi_0)$ в теории с $g_{2m} = 1$, $g_{2m+1} = 0$ при различных значениях $\varkappa$.

5.6.2. $g_{2m} = g_0 \frac{(2m)!}{2^{2m}}$

В этом случае коэффициенты ряда (142) убывают экспоненциально — как $\frac{1}{2^m}$:

$$\bar{B}(\varphi, p) = \frac{g_0}{\varphi_0^2} \sin^2(\varphi/\varphi_0 \left\{ 8\cos^2(\varphi/\varphi_0) \frac{4 + 3\cos^2(\varphi/\varphi_0)}{(4 - \cos^2(\varphi/\varphi_0))^3} \right\} e^{-p_0^2/p^2}, \tag{171}$$

$$\mathit{\Delta}\mathcal{G}(\varphi) \simeq -\frac{2 g_0 \varkappa^2}{\varphi_0^2} \int\limits_0^\pi dw\, \mathcal{F}(w; \varkappa, \varphi/\varphi_0) \frac{3\cos^2(w)}{(\sin^2 w + 3)^3} \sin^2(w). \tag{172}$$

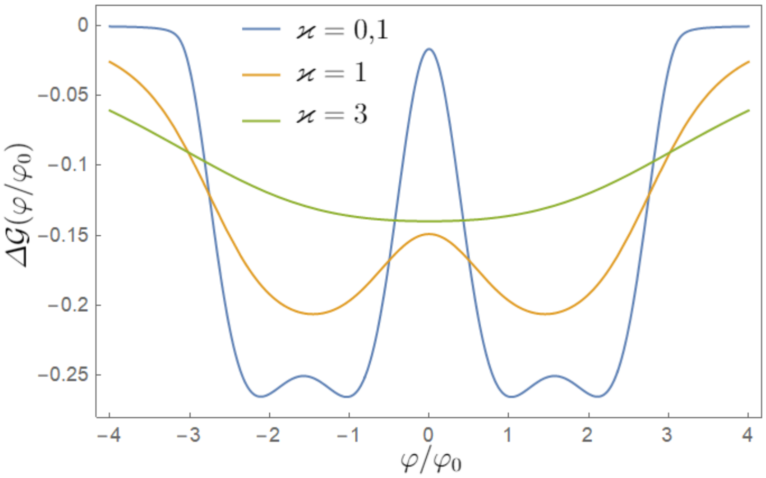


Рис. 4: График зависимости $\Delta\mathcal{G}(\varphi/\varphi_0)$ в теории с $g_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}}$, $g_{2m+1} = 0$ при различных значениях $\varkappa$.

5.6.3. $g_{2m} = g_0 \frac{(2m)!}{(2m)^2}$

В этом случае коэффициенты ряда (142) убывают квадратично — как $\frac{1}{m^2}$:

$$\bar{B}(\varphi, p) = \frac{g_0}{\varphi_0^2} \sin^2(\varphi/\varphi_0) \left\{ \mathrm{ctg}^2(\varphi/\varphi_0) + \ln[\sin \varphi/\varphi_0] \right\} e^{-p_0^2/p^2}, \tag{173}$$

$$\Delta\mathcal{G}(\varphi) \simeq -\frac{g_0 \varkappa^2}{8\varphi_0^2} \int\limits_0^{\pi} dw\, \mathcal{F}(w; \varkappa, \varphi/\varphi_0) \left[\mathrm{tg}^2(w) \ln\left(\sin^2 w\right) + 1 \right]. \tag{174}$$

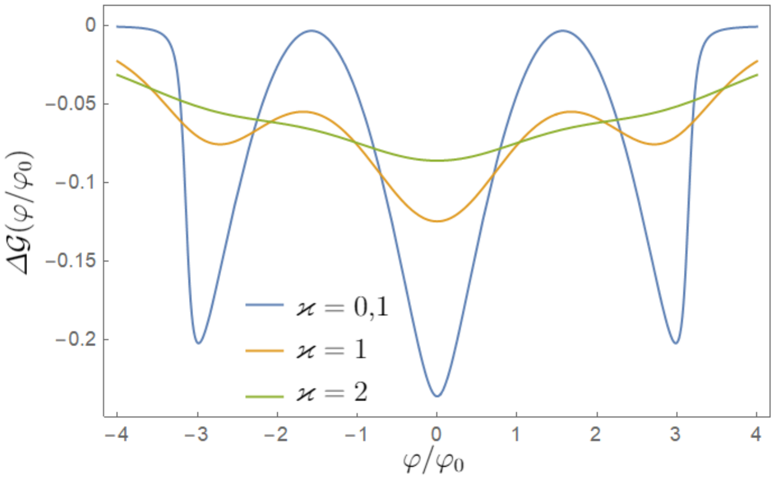


Рис. 5: График зависимости $\Delta\mathcal{G}(\varphi/\varphi_0)$ в теории с $g_{2m} = \frac{(2m)!}{(2m)^2}$, $g_{2m+1} = 0$ при различных значениях $\varkappa$.

Таким образом, мы получили приближённые выражения, неявно задающие зависимость $\mathcal{S}$-матрицы на постоянном поле от величины этого поля при различных значениях параметра $\varkappa$ в различных теориях с неполиномиальными взаимодействиями.

6. Заключение

В дипломной работе рассматривались функциональные уравнения Гамильтона-Якоби, Шрёдингера и Вильсона-Полчински. Для уравнения Гамильтона-Якоби были получены трансляционно-инвариантные решения первых уравнений иерархии функций Грина на δ- и постоянных полевых конфигурациях поля $\varLambda$. Было показано, что в физически интересном случае функционала Гамильтона, содержащего только нулевой и второй члены разложения в ФРТ по $\varLambda$ уравнение на двухточечную функцию Грина сводится к уравнению Риккати.

Иерархия функций Грина функционального уравнения Шрёдингера в рамках квазиклассического приближения была сведена к иерархиям функциональных уравнений Гамильтона-Якоби и непрерывности. На δ-конфигурациях $\varLambda$ были получены двухточечные трансляционно-инвариантные функции Грина и было показано, что поскольку уравнения на высшие функции Грина являются линейными, то их решения уравнений иерархии могут быть получены в любом порядке.

Для ФРГ-потокового уравнения Вильсона-Полчински было введено квазиклассическое приближение и в рамках этого приближения были получены двух- (65) и четырёхточечная (70) трансляционно-инвариантные ампутированные связные функции Грина для теории φ^4 в 3-мерном пространстве-времени.

Во второй части работы рассматривалось BMW-приближение (83). Была предложена его уточненная модификация — BMW$_+$-приближение (88). Это приближение было опробовано на функциональном уравнении Шрёдингера: с его помощью были найдены первые поправки по квантовому потенциалу к модулю (107) и фазе (106) квазиклассического комплекснозначного волнового функционала.

Разработанная процедура работы с BMW$_+$-приближением была приложена к ФРГ-потоковому уравнению. Однако, вместо нелинейного уравнения Вильсона-Полчински на $\mathcal{G}_{\text{ac}}$, удобнее работать с линейным уравнением на $\mathcal{S} = \exp(\mathcal{G}_{\text{ac}})$. BMW$_+$-приближение для уравнения, описывающего $\mathcal{S}$-матрицу, имеет вид уравнения теплопроводности. Было показано, что задача Коши для него может быть поставлена в правильных переменных несмотря на то, что в уравнении, записанном в терминах обрезания $\varLambda$, коэффициент теплопроводности оказывается отрицательным.

В рамках BMW$_+$-приближения решение уравнения на $\mathcal{S}$-матрицу было выражено в виде ряда (125) через начальное условие. Было предложено обобщение BMW$_+$-приближения для высших производных $\mathcal{S}$—матрицы (136). Было показано, что в рамках этих приближений уравнение на $\mathcal{S}$-матрицу имеет один и тот же вид.

Мы рассматривали достаточно широкий класс теорий с неполиномиальным взаимодействием, задаваемым функциональным рядом (142) по композитным полям $\mathcal{C}$. Для таких теорий было найдено граничное условие для BMW$_+$-приближенных уравнений на вторую и четвертую производную в специальной кинематике. Кроме того, была предложена специальная диаграммная техника позволяющая вычислять начальные условия для BMW$_+$-приближенных уравнений в любом наперед заданном порядке. Был предложен класс теорий (128), для которых ряд может быть просуммирован, и зависимость $\mathcal{S}$-матрицы от поля φ может быть приближенно выражена в виде интегралов (170, 172, 174).

Таким образом, BMW$_+$-приближение является мощным инструментом для работы с иерархиями уравнений в вариационных производных, особенно в случае неполиномиальных теорий. Дальнейшее последовательное улучшение точности результатов, полученных в рамках BMW$_+$-приближения, является предметом дальнейших исследований.

Список литературы

[1] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena: Fifth Edition, Oxford University Press, **2021**.

[2] Vasiliev, A.N. Functional methods in quantum field theory and statistical physics; **1998**.

[3] Vasiliev, A.N. The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics; Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA, **2004**.

[4] C. Grosche, F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals, Springer Tracts in Modern Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, **1998**.

[5] P. Kopietz, L. Bartosch, F. Schütz; Introduction to the Functional Renormalization Group; Lecture Notes in Physics; Springer: Verlag/Berlin/Heidelberg, Germany, **2010**.

[6] Cercignani, C., Gerasimenko, V., Petrina, D.Y. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations; Springer Netherlands, **1997**.

[7] M.G. Ivanov, A.E. Kalugin, A.A. Ogarkova and S.L. Ogarkov, On Functional Hamilton–Jacobi and Schrödinger Equations and Functional Renormalization Group, *Symmetry* **2020**, 12(10), 1657.

[8] Salopek, D.S.; Coordinate - free solutions for cosmological superspace. *Phys. Rev. D* **1997**, *56*, 2057-2064.

[9] Bogoliubov, N.N.; Shirkov, D.V. Introduction to the Theory of Quantized Fields; A Wiley-Intersciense Publication; John Wiley and Sons Inc.: New York, NY, USA, **1980**.

[10] Kiefer, C. The Semiclassical approximation to quantum gravity; *Lect. Notes Phys.* **1994**, *434*, 170-212.

[11] Weinberg, S. The Quantum Theory of Fields. Cambridge: Cambridge University Press. **1995**.

[12] Polchinski, J. Renormalization and Effective Lagrangians. *Nucl. Phys. B* **1984**, *231*. 269–295.

[13] G. Keller and C. Kopper; Perturbative renormalization of QED via flow equations *Phys. Rev. Lett. B* **1991**, *273*, 323-332.

[14] Rosten, O.J. Fundamentals of the Exact Renormalization Group. *Phys. Rep.* **2012**, *511*, 177–272.

[15] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J.M. Pawlowski, M. Tissier and N. Wschebor; The nonperturbative functional renormalization group and its applications. *Phys. Rep.* **2021**, In Press, Corrected Proof.

[16] Igarashi, Y.; Itoh, K.; Sonoda, H. Realization of Symmetry in the ERG Approach to Quantum Field Theory. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **2009**, *181*, 1–166.

[17] A. Wipf; Statistical Approach to Quantum Field Theory; Lecture Notes in Physics; Springer: Verlag/Berlin/Heidelberg, Germany, **2013**.

[18] J-. P. Blaizot, R. Mendéz-Galain and N. Wschebor; A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations *Phys. Lett. B* **2006**, *632*, 571-578.

[19] J-. P. Blaizot, R. Mendéz-Galain and N. Wschebor; Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n-point functions. I *Phys. Rev. E* **2006**, *74*, 051116.

[20] J.-P. Blaizot; Renormalization group flow equations with full momentum dependence. *Philos. Trans. R. Soc. A* **2011**, *369*, 2735-2758.

[21] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 2-е изд., испр. и доп.; РХД Москва - Ижевск, **2011**.

[22] V.A. Guskov, M.G. Ivanov and S.L. Ogarkov, A Note on Efimov Nonlocal and Nonpolynomial Quantum Scalar Field Theory, `arXiv:1711.08829v7 [hep-th]`, **2017**.

Приложение A: Интегральное тождество для функционалов

В приложении мы приводим вывод интегрального тождества для функционалов [22, 7]. Будем следовать схеме вывода ФРГ-потоковых уравнений [5]. Общая идея состоит в том, чтобы продифференциировать t-деформированный функционал по t, а затем переписать получившееся выражение в терминах производной функционала по аргументу.

Рассмотрим некоторый функционал $\mathcal{F}[\Lambda]$, такой что его смешанные вариационные производные равны, и сдвинем его аргумент на некоторую функцию Δ_t безразмерного аргумента t. Запишем это используя оператор сдвига и продифференцируем обе части получившегося выражения по t:

$$\mathcal{F}[\Lambda+\Delta_t] = e^{\left(\Delta_t\middle|\frac{\delta}{\delta\Lambda}\right)}\mathcal{F}[\Lambda], \quad \frac{\partial\mathcal{F}[\Lambda+\Delta_t]}{\partial t} = \left(\frac{\partial\Delta_t}{\partial t}\middle|\frac{\delta\mathcal{F}[\Lambda+\Delta_t]}{\delta\Lambda}\right). \tag{175}$$

Интегрируя (175) по t в пределах от 0 до 1 и выбирая $\Delta_t = t\cdot\Delta$ получим:

$$\mathcal{F}[\Lambda+\Delta]-\mathcal{F}[\Lambda] = \int\limits_0^1 dt\int d^Dz\,\Delta(z)\,\frac{\delta\mathcal{F}[\Lambda+t\Delta]}{\delta\Lambda(z)}. \tag{176}$$

Пользуясь тем, что $\frac{\delta\mathcal{F}[\Lambda+t\Delta]}{\delta(\Lambda+t\Delta)(z)} = \frac{\delta\mathcal{F}[\Lambda+t\Delta]}{\delta\Lambda(z)}$, получим тождество в окончательном виде:

$$\mathcal{F}[\Lambda+\Delta]-\mathcal{F}[\Lambda] = \int\limits_0^1 dt\int d^Dz\,\Delta(z)\,\mathcal{G}[\Lambda+t\Delta](z), \tag{177}$$

где мы ввели обозначение $\frac{\delta\mathcal{F}[\Lambda]}{\delta\Lambda(z)} = \mathcal{G}[\Lambda](z)$. Полученное тождество (177) позволяет восстановить функционал $\mathcal{F}[\Lambda]$ по его вариационной производной $\mathcal{G}[\Lambda]$. С его помощью можно обобщить выводы, полученные на постоянных и δ-конфигурациях поля Λ на более широкий класс полевых конфигураций.