Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

1/N поправки в возмущенной модели SYK

(бакалаврская работа)

Студент:
Клыков Андрей Алексеевич

Научный руководитель:
Горский Александр Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук.

Москва 2021

Аннотация

В рамках модели SYK как теории, описывающей поведение электронов в сверхпроводнике, исследованы поправки к основному состоянию в пределе сильной связи для обьединенной теории SYK и Хаббарда. Подробно рассматривается связь этой теории с обобщенной моделью Ричардсона. Построение начинается с разбора классической модели Ричардсона. Для сверхпроводника рассматривается случай четного количества фермионов и вещественной константы связи. Производится нормировка квантовых состояний и последовательное вычисление поправок по теории возмущений с помощью теоремы Вика и комбинаторных тождеств. В качестве промежуточных результатов приведено подробное вычисление первого и второго члена ряда теории возмущений. Эти результаты напрямую обобщаются для поправок всех порядков к основному состоянию возмущенной системы. Также кратко обсуждается дальнейшее развитие теории и постановка новых вопросов.

Содержание

1. Введение

Проблема описания сверхпроводящих систем всегда ставила в тупик исследователей. Чаще всего главной трудностью, которую необходимо преодолеть на пути к пониманию эффектов сверхпроводимости — это отсутствие аналитических и легко трактуемых решений для изучаемых моделей. В последнее время внимание сообщества обратилось к семейству точно решаемых SYK-моделей, описывающих поведение электронов в сверхпроводящей фазе, это привело к заметному прогрессу в исследовании коррелированных фаз с интригующими свойствами, такими как эффекты переноса в металлах и квантовый хаос [1, 2].

Аналогичным образом были построены точно-решаемые модели скоррелированных сверхпроводников - на данный момент существует два популярных подхода, заключащиеся в явном добавлении членов спаривания в конструкцию SYK или рассмотрении случайных электрон-фононных взаимодействий. Основываясь на этих идеях, в данной работе предлагается рассмотреть простую модель коррелированной сверхпроводимости с богатой феноменологией, в которой сверхпроводящие корреляции генерируются с помощью добавления к модели SYK члена Хаббарда и рассмотрения результирующей системы в пределе сильной связи. Особняком в данной задаче стоит вопрос рассмотрения возникающих квантовых поправок, их характера и вляиния на сдвиг основного энергетического уровня. Этот подход по сути является продолжением работы [3].

В завершении коротко опишем как устроена данная работа. В первом разделе формулируется теория SYK, ее основные особенности и даются главные определения. Далее теория рассматривается в разрезе применимости к эффектам сверхпроводимости: описывается недиагональный дальний порядок и возможные члены парного взаимодействия электронов. В режиме сильной связи исследуемую модель можно ассоциировать с обобщенной моделью Ричардсона, последовательному изложению описания возникшей связи посвящен третий раздел. Завершается данная работа рассмотрением квантовых поправок к обобщенной модели Ричардсона.

Итоговое обсуждение всех полученных результатов приведено в заключении работы.

2. SYK теория

2.1. Основные определения

В первой секции будет дано общее описание исследуемой теории, и введены основные понятия, которые выделяют эту теорию среди множества остальных тензорных моделей, вводная часть строится аналогично [4].

Модель SYK [5, 6] — это квантовомеханическая система $N \gg 1$ майорановских фермионов, где все фермионы взаимодействуют друг с другом посредством четырехфермионного взаимодействия особого вида:

$$I_{SYK} = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \chi_i(\tau) \dot{\chi}_i(\tau) - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} J_{ijkl} \chi_i(\tau) \chi_j(\tau) \chi_k(\tau) \chi_l(\tau) \right) \qquad \dot{\chi}_i = \frac{d\chi_i}{d\tau} \tag{1}$$

В формуле выше τ - евклидово (мниное) время, которое с помощью поворота Вика ($\tau = it$) связано с действительным (лоренцевым) временем t. Так как мы рассматриваем майорановские фермионы, то операторы χ_i эрмитовы: $\chi_i = \chi_i^\dagger$ и удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{\chi_i, \chi_j\} = \delta_{ij} \qquad i, j = 1 \dots N \tag{2}$$

Для данной системы константы связи J_{ijkl} являются случайными независимыми Гауссово-распределенными величинами с плотностью вероятности:

$$P(J_{ijkl}) = \exp\left(-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12 J^2} \right) \tag{3}$$

для каждой J_{ijkl}. Процедура вычисления математического ожидания для таких величин обычно называется усреднением по беспорядку. Приведем некоторые известные полезные тождества:

$$\overline{J_{ijkl}} = 0 \qquad \overline{J_{ijkl}^2} = \frac{3! J^2}{N^3} \tag{4}$$

Здесь J является константой с размерностью массы. Отметим также свойство, напоминающее теорему Вика о том, что четные моменты распределения разбиваются на сумму всех возможных произведений средних квадратов, например

$$\overline{J_{i_1i_2i_3i_4} J_{j_1j_2j_3j_4} J_{k_1k_2k_3k_4} J_{l_1l_2l_3l_4}} = \overline{J_{i_1i_2i_3i_4} J_{j_1j_2j_3j_4}}\; \overline{J_{k_1k_2k_3k_4} J_{l_1l_2l_3l_4}} + \overline{J_{i_1i_2i_3i_4} J_{k_1k_2k_3k_4}}\; \overline{J_{j_1j_2j_3j_4} J_{l_1l_2l_3l_4}} + \tag{5}$$

$$+ \overline{J_{i_1i_2i_3i_4} J_{l_1l_2l_3l_4}}\; \overline{J_{k_1k_2k_3k_4} J_{j_1j_2j_3j_4}} \tag{6}$$

Следствием коммутационных соотношений является антисимметричность константы связи:

$$J_{ijkl} = \mathrm{sgn}\sigma \; J_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)\sigma(l)} \qquad \sigma : i \longrightarrow \sigma(i) \qquad i = 1 \dots N \tag{7}$$

Очевидно, что количество независимых компонент тензора J_{ijkl} снизится до $\frac{N!}{4!(N-4)!}$. В итоге можно определить усредненное по беспорядку произведение для двух констант связи:

$$\overline{J_{i_1 i_2 i_3 i_4} J_{i_5 i_6 i_7 i_8}} = \frac{J^2}{4N^3} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\sigma \; \delta_{i_1 \sigma(i_5)} \delta_{i_2 \sigma(i_6)} \delta_{i_3 \sigma(i_7)} \delta_{i_4 \sigma(i_8)} \tag{8}$$

Этой информации нам хватит, чтобы продвинуться дальше.

2.2. Диаграмматика и эффективное действие

В этой подсекции производится краткое описание основных фактов, которые необходимы для полного понимания популярности этой теории в физике конденсированного состояния. Для подробного изложения стоит обратиться к работам [4-5]

В случае, когда представляет интерес вычисление квантовых поправок к корреляционным функциям или хаотическая природа теории, необходимо обратиться к диаграмной технике. Для случая большого количества частиц $N \gg 1$ основной вклад будут давать, так называемые, диаграммы в форме дыни [7].

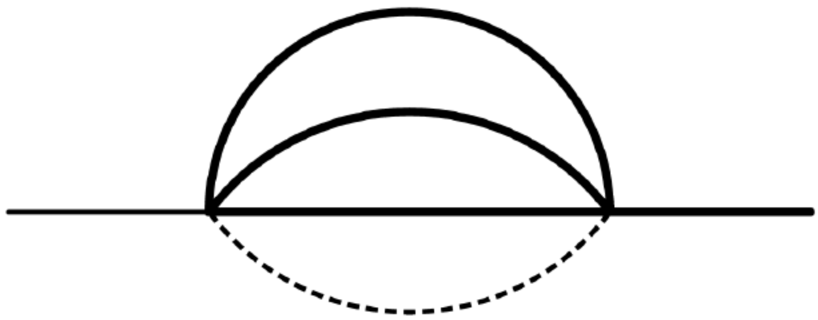

Рис. 1. Диаграмма в форме дыни

Суммирование всех диаграмм такого типа заложено в уравнении Швингера-Дайсона:

$$G^{-1}(\omega) = -i\omega - \Sigma(\omega) \tag{9}$$

Здесь $G(\omega)$ — это фурье-образ $G(\tau)$. Очень часто данное уравнение решается численно, но существует возможность получить приближенное аналитическое решение для случаев низких частот ($\omega \ll J$ или $J\tau \gg 1$) и сильной связи ($\beta J \gg 1$). При рассмотрении поправок $O(1/N)$ оказывается, теория описывается эффективным действием, которое зависит от билокальных полей $\Sigma(\tau_1, \tau_2)$ и $G(\tau_1, \tau_2)$, где Σ играет роль лагранжева множителя, а G имеет вид:

$$G(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_i(\tau_1)\chi_i(\tau_2) \tag{10}$$

Если произвести усреднение по беспорядку и проинтегрироваться по фермионам, то получим:

$$\overline{Z} = \int \mathcal{D}[G]\mathcal{D}[\Sigma] e^{-I_{eff}[G,\Sigma]} \tag{11}$$

$$\frac{I_{eff}}{N} = -\frac{1}{2}\log\det(-\delta(\tau-\tau')\partial_\tau - \Sigma(\tau,\tau')) + \frac{1}{2}\int d\tau d\tau' \left(\Sigma(\tau,\tau')G(\tau,\tau') - \frac{J^2}{4}G(\tau,\tau')^4\right) \tag{12}$$

Таким образом, теория полностью определена в пределе $N \gg 1$. В следующей секции мы сузим расмотрение на ту имплементацию теории, которая применяется в физике твердого тела.

3. Комплексная модель и недиагональный дальний порядок

3.1. SYK в применимости к эффектам сверхпроводимости

В физике конденсированного состояния вещества SYK хорошо описывает электроны в состоянии, отличном от ферми-жидкости. Следовательно, возникает вопрос можно ли как-то включить в эту конструкцию механизм сверхпроводимости.

Существует большое число модификацией, построенных на базе SYK, которые претендуют для описания явлений в физике твердого тела. Аналогично механизму БКШ можно добавить какой-либо потенциальный член притяжения, который описывает притяжение электронов посредством фононов [8], например модель Хаббарда:

$$H_{Hub} = -U \sum_{i}^{N} c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} - \mu \sum_{i,\sigma}^{N} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma} \tag{13}$$

или рассмотреть прыжки пар электронов между орбиталями:

$$H_{p-hop} = -\frac{U}{N} \sum_{ij}^{N} c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{j\uparrow} c_{j\downarrow} - \mu \sum_{i,\sigma}^{N} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma} \tag{14}$$

Здесь видно, что происходит аннигиляция пары на j-ой орбитали и рождение на орбитали i. Оба эти гамильтониана сохраняют число частиц и не меняются при действии оператора обращения времени. Состояния же характеризуются температурой T, числом фермионов N_f и безразмерным параметром U/J, который характеризует силу притяжения.

Для рассмотренных выше гамильтонианов также применим метод среднего поля, однако, на примере с моделью Хаббарда оказывается, что даже в пределе $N \gg 1$ этот метод плохо описывает желаемые явления [3]. Причиной неприменимости теории среднего поля является наличие, так называемой, псевдощели при $U < U_c$, где U_c - критическая сила притяжения. Если же рассмотреть случай $U > U_c$, то на графике $U(T)$ можно обнаружить "область сверхпроводимости". Эти результаты приводят нас к рассмотрению теории в двух пределах: в пределе большого и малого притяжения. Оказывается, что в пределе малого притяжения обьединенные модели SYK и Хаббарда можно ассоциировать с моделью Курамото [9, 10], а в противоположном случае — с обобщением модели Ричардсона [11]. В этом тексте мы сконцентрируемся на последней и в следующих секциях проведем более детальный обзор явлений, связанных с электронами при сильном притяжении.

3.2. Недиагональный дальний порядок

Стандартное определение сверхпроводимости подразумевает наличие аномального среднего значения:

$$\overline{\Delta}_i \propto \langle c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} \rangle \tag{15}$$

Очевидно, что для системы с конечными размерами эта величина обязана обратиться в ноль. Именно поэтому необходимо ввести новую величину, которая будет являться характеристикой порядка в системах с конечным числом частиц. Существует соответствующий концепт, носящий название недиагонального дальнего порядка (ODLRO), который хорошо известен из теории Бозе конденсата в оптических или магнитных ловушках [12].

Рассмотрим какую-либо статистическую систему и определим в ней одночастичную матрицу плотности

$$\rho = \langle \psi^\dagger(r) \psi(r') \rangle \tag{16}$$

наличие недиагонального дальнего порядка в этой системе эквивалетно утверждению

$$\lim_{|r-r'| \to \infty} \rho(r, r') = \langle \psi^\dagger(r) \rangle \langle \psi(r) \rangle \tag{17}$$

Ситуация с системой SYK описывается подобым образом, если определить бозонный оператор рождения как

$$b^\dagger_i = c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} \tag{18}$$

Уже с его помощью можно ввести редуцированную одночастичную матрицу плотности:

$$\rho_{ij} = \langle b^\dagger_i b_j \rangle \qquad \rho \propto \overline{\Delta}_i \Delta_j \tag{19}$$

Определенная таким образом ρ_{ij} — это $N \times N$ положительно-определенная матрица, ее след дает полное количество локальных пар, которое меньше или равно $N_f/2$. При дальнейшем детальном рассмотрении этого обьекта можно обнаружить, что в пределе $N \to \infty$ имеется фазовый переход между фазами с конечной и нулевой плотностью сверхпроводящего конденсата [3].

3.3. Модель SYK для электронов в твердом теле

Наконец, после обоснования мотивации для рассмотрения сверхпроводимости с помощью указанных моделей перейдем к количественному описанию. Рассмотрим 0D модель, состоящую из $N \gg 1$ частиц, каждую орбиталь может занимать 2 комплексных фермиона со спином 1/2. В духе оригинальной модели SYK мы предполагаем, что все орбитали полностью вырождены с энергией на орбиталь равной нулю. Фермионы также взимодействуют с помощью четырехфермионного взаимодействия с вещественной, не зависящей от спина, константы связи:

$$H_{\mathrm{SYK}} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl\sigma\sigma'}^{N} J_{ijkl} \left(c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma'}^{\dagger} c_{k\sigma'} c_{l\sigma} + c_{l\sigma}^{\dagger} c_{k\sigma'}^{\dagger} c_{j\sigma'} c_{i\sigma} \right) \tag{20}$$

Еще раз упомянем, что чистый SYK гамильтониан не приводит к возникновению недиагонального дальнего порядка [3]. Для воспроизведения механизма спаривания добавим член взаимодействия Хаббарда:

$$H_{\mathrm{Hub}} = -U \sum_{i}^{N} c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow}^{\dagger} c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} - \mu \sum_{i,\sigma}^{N} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma} \tag{21}$$

В отсутствие SYK основное состояние модели Хаббарда представляет собой локализованные пары и не поддерживает недиагональный дальний порядок. Энергия, которая приходится на одну пару фермионов, очевидно, равна $-U$, вырождение равняется количеству размещений заданного числа пар $N_f/2$ по N орбиталям. Возбужденные состояния образуются при разрыве пары и образовании одиночных электронов на орбитали с нулевой энергией. Детальный анализ [3] показывает, что с помощью SYK и модели Хаббарда можно построить систему, которая поддерживает недиагональный дальний порядок.

4. Построение обобщенной модели Ричардсона

4.1. Модель Ричардсона

Эта секция посвящена более детальному обзору обобщенной и обычной модели Ричардсона. Обобщенная модель Ричардсона естественным образом возникает при рассмотрении обьединненой модели SYK и Хаббарда.

Модель Ричардсона [11] является БКШ-подобной моделью сверхпроводимости с двукратно вырожденными уровнями энергии. Предполагается, что часть уровней заполнена куперовскими парами, при этом уровни с одиночными фермионами запрещены, энергия, приходящаяся на одну пару $\varepsilon_j/2$ гамильтониан модели:

$$H_R = \frac{1}{2}\sum_{j,\sigma}^{N} \varepsilon_j c_{j\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} - G\sum_{jk} c_{j\downarrow}^{\dagger} c_{k\uparrow}^{\dagger} c_{\uparrow\sigma} c_{k\downarrow} \tag{22}$$

Здесь $c_j^{\dagger}$ - оператор рождения фермионов и G - константа связи, обеспечивающая притяжения фермионов. После преобразования гамильтониана с использованием бозонных операторов, введенных в (18):

$$H_R = \sum_{j} \varepsilon_j b_j^{\dagger} b_j - G\sum_{jk} b_j^{\dagger} b_k \tag{23}$$

Приведем коммутационные соотношения в этом представлении:

$$[b_j^{\dagger}, b_k] = \delta_{jk}(2N_j - 1) \qquad N_j = b_j^{\dagger} b_j \tag{24}$$

Собственные состояния гамильтониана строятся с помощью операторов $B^{\dagger}$,

$$|M\rangle = \prod B_i^{\dagger}\,|0\rangle \qquad B_i^{\dagger} = \sum_{j}^{N} \frac{b^{\dagger}}{\varepsilon_j - E_i} \qquad G^{-1} = -\sum_{j}^{N} \frac{2}{\varepsilon_j - E_i} + \sum_{j}^{N} \frac{1}{E_j - E_i} \tag{25}$$

Спектр получается с помощью уравнения Бете-анзаца, где энергия является суммой энергий

$$E(M) = \sum_{i}^{M} E_i \tag{26}$$

На этом моменте можно закончить рассмотрение классической системы Ричардсона и перейти к механизму возникновения обобщенной модели.

4.2. Возникновение обобщенной модели

Численный анализ модели Хаббард + SYK проведен в [3]. Его результаты показывают, что низкоэнергетическая часть спектра отделена от остальных уровней щелью шириной $\sim U$, а количество многочастичных состояний в точности $\binom{N_f/2}{N}$, здесь N_f - количество фермионов, а N - число орбиталей. Из этих результатов можно сделать вывод, что низкоэнергетическая часть спектра описывается в терминах бозонов. В отсутсвии члена SYK все состояния локализованы, но его добавление приводит к формированию спектра с перечисленными ранее особенностями.

Чтобы формализовать наши рассуждения будем рассматривать состояние с $N_f/2$ бозонами, которые занимают N орбиталей. Действуя гамильтонианом SYK на данное состояние можно получить ненулевой результат только в случае, если для J_{ijkl} орбитали k и l заняты, в то время i, j пусты или наоборот. В итоге мы получим состояние $N_f/2-2$ парами и четырьмя одиночными фермионами на орбиталях i, j, k, l, это состояние отделено на $2U$ от низкоэнергетического бозонного сектора. С точки зрения эффективной бозонной теории это состоние является виртуальным. Чтобы вернуться в изначальное состояние мы должны повторить действие гамильтонианом, но оно также может привести к перепрыгиванию двух бозонов с орбиталей k, l на орбитали i, j. Таким образом, описанный механизм имеет реализацию в виде эффективного бозонного гамильтониана:

$$H_b = -\frac{6}{2U}\sum_{ijkl} J_{ijkl}^2\left(b^\dagger b_j^\dagger b_k b_l + b_l^\dagger b_k^\dagger b_j b_i\right) \tag{27}$$

При построении также возникает еще один член вида

$$V = \sum_{jk} M_{jk} b_j^\dagger b_k \qquad M_{jk} \propto -\sum_{il}^{N} J_{ijkl} J_{ljki}/U \tag{28}$$

Простая оценка показывает, что этим членом можно пренебречь при $N \gg 1$, но в следующем разделе мы покажем, что справедливо более общее утверждение: поправки по теории возмущений к нашей системе с таким возмущением обращаются в ноль во всех порядках. Возвращаясь к гамильтониану (27), можно сказать, что он представляет собой бозонную версию модели SYK [17], ее особенностью явлется то, что мы имеем дело с вещественными матричными элементами J_{ijkl}. В следующих подсекциях мы детально обсудим свойства этой теории. Очень часто в сообществе возникают разногласия, связанные с именованием интегрируемых моделей.

Во избежания путаницы, еще раз обозначим, что обобщенной моделью Ричардсона мы будем называть следующий гамильтониан, полученный из гамильтониана (27):

$$H_{gR} = -\frac{W}{N^3}\sum_{ijkl}^{N} b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l \qquad W = \frac{3J^2}{32U} \tag{29}$$

4.3. Спектр модели и ее свойства

Предметом этой подсекции будет более подробное рассмотрение обобщенной модели Ричардсона [3], полученной ранее. Построение все также ведется с помощью квантовой многочастичной механики. Для начала введем операторы

$$B_0 = \sum_{i}^{N} b_i \qquad N_b = \sum_{i}^{N} b_i^\dagger b_i \tag{30}$$

Также будем использовать коммутационные соотношения для наших бозонов (они обусловлены тем, что бозоны образованы с помощью пар электронов)

$$\{b_i^\dagger, b_i\} = 1 \qquad [b_i^\dagger, b_j] = 0 \tag{31}$$

чтобы получить коммутационные соотношения для операторов теории

$$[N_b, B_0^\dagger] = B_0^\dagger \qquad [N_b, B_0] = -B_0 \qquad [B_0^\dagger, B_0] = 2N_b - N \tag{32}$$

Эти коммутаторы напоминают нам алгебру $su(2)$, если ввести переобозначение

$$L_+ = B_0^\dagger \qquad L_- = B_0 \qquad L_z = N_b - N/2 \qquad B_0^\dagger B_0 = L^2 - L_z^2 + L_z \tag{33}$$

Перепишем гамильтониан нашей обощенной модели в терминах операторов N_b и B_0:

$$H_{gR} = -\frac{W}{N^3} \sum_{ijkl}^{N} b_i^\dagger b_j^\dagger b_k b_l = -\frac{W}{N^3} \Big(B_0^\dagger B_0^\dagger B_0 B_0 - 4B_0^\dagger N_b B_0 + 2N_b(N_b - 1) \Big) \tag{34}$$

Наблюдения, сделанные выше, могут помочь нам решить обычную модель Ричардсона и на ее основе получить решение обобщенной системы. Рассмотрим гамильтониан модели Ричардсона, переписанный в терминах операторов B_0:

$$H_R = -\frac{W}{N} B_0^\dagger B_0 \tag{35}$$

Выделим случай $N_b = N/2$ и соответственно $L_z = 0$. Спектр наполовину заполненной модели Ричардсона

$$E_R = -\frac{W}{N} L(L+1) \qquad L = 0, 1, \ldots, N/2 \tag{36}$$

Путем построения аналогичного процесса получим спектр обобщенной модели Ричардсона

$$E_{gR}(L) = -\frac{W}{N^3} \left(L(L+1) - (N-1) \right)^2 + \text{const} \tag{37}$$

Вакуум соответствует $L = N/2$, а вырождение возбужденных уровней:

$$D(L) = \binom{N/2 - L}{N} - \binom{N/2 - L - 1}{N} \qquad \sum_{L=0}^{N/2-1} D(L) + 1 = \binom{N/2}{N} \tag{38}$$

После рассмотрения особенностей, возникающих при построении задачи, мы можем перейти к рассмотрению упомянутых ранее поправок.

5. Рассмотрение квантовых поправок к обобщенной модели Ричардсона

5.1. Поправки первого и второго порядка, обобщение

В этой секции произведем вычисление поправок для рассматриваемой нами модели. Еще раз приведем вид самой поправки:

$$V = \sum_{jk} M_{jk} b_j^\dagger b_k \qquad M_{jk} \propto -\sum_{il}^{N} J_{ijkl} J_{ljki}/U \tag{39}$$

Мы будем пользоваться стандартной стационарной теорией возмущений, известной из университетского курса квантовой механики. Поправка первого порядка к основному состоянию будет иметь вид:

$$E_{GS}^{(1)} = \langle GS| V |GS\rangle \tag{40}$$

Перепишем данное выражение в терминах потенциала и основного состояния системы.

$$E_{GS}^{(1)} = \sum_{jk} M_{jk} \langle 0| (B_0)^{N/2} b_j^\dagger b_k (B_0^\dagger)^{N/2} |0\rangle = \sum_{jk} M_{jk} \langle 0| \left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^{N/2} b_j^\dagger b_k \left(\sum_{l=1}^{N} b_l^\dagger\right)^{N/2} |0\rangle \tag{41}$$

В системе четное количество фермионов, значит N — четное число, перепишем степень сумммы операторов рождения и уничтожения в виде произведения, а суммирование вынесем за матричный элемент.

$$E_{GS}^{(1)} = \sum_{jk} M_{jk} \sum_{i_1 \dots i_N}^{N} \langle 0| b_{i_1} \dots b_{i_{N/2}} b_k b_j^\dagger b_{i_{N/2+1}}^\dagger \dots b_{i_N}^\dagger |0\rangle \tag{42}$$

Если внимательно посмотреть на формулу выше, то видно, что все оставшиеся вычисления сводятся к формуле Вика, с помощью которой и некоторых комбинаторных тождеств получаем:

$$E_{GS}^{(1)} \propto \sum_{a \in \{i_{N/2+1} \dots i_N\}} \sum_{b \in \{i_1 + \dots i_{N/2}\}} \left(\sum_{ab} M_{ab}\right) N^{N/2-1} \cdot (2(N/2-1)-1)!! \tag{43}$$

Для полноты ответа произведем нормировку с учетом соотношения $\sum_{i_1 i_2}^{N} \delta_{i_1 i_2} = N$:

$$\langle GS|GS\rangle = \langle 0| (B_0)^{N/2} (B_0^\dagger)^{N/2} |0\rangle = \langle 0| \left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^{N/2} \left(\sum_{l=1}^{N} b_l^\dagger\right)^{N/2} |0\rangle \tag{44}$$

Расчеты здесь производятся аналогично получению первой поправки, т. е. сведение к теореме вика с последующим избавлением от сумм.

$$\langle GS|GS\rangle = \sum_{i_1 \ldots i_N}^{N} \langle 0|\, b_{i_1} \ldots b_{i_{N/2}} b^\dagger_{i_{N/2+1}} \ldots b^\dagger_{i_N} \,|0\rangle = N^{N/2} \cdot (2N/2-1)!! \tag{45}$$

После нормировки поправка 1-го порядка принимает вид:

$$E^{(1)}_{GS} \propto \frac{1}{N(N-1)} \sum_{a \in \{i_{N/2+1} \ldots i_N\}} \sum_{b \in \{i_1 \ldots i_{N/2}\}} \left(\sum_{ab} M_{ab} \right) = \frac{N^2}{4} \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{ab} M_{ab} \right) \tag{46}$$

В силу антисимметричности матрицы M_{ij} мы видим, что поправка обращается в ноль

$$\sum_{ab} M_{ab} = 0 \tag{47}$$

Перейдем к рассмотрению следующей поправки, для этого опять запишем известную из квантовой механики формулу для поправки второго порядка:

$$E^{(2)}_{GS} = \sum_n \frac{\langle GS|\, V \,|n\rangle \langle n|\, V \,|GS\rangle}{E_n - E_{GS}} \tag{48}$$

Мы можем переписать это общее выражение в терминах L с помощью определения возбужденного состояния:

$$|L\rangle = B_0^{N/2-L} \,|GS\rangle \qquad n = N/2 - L \tag{49}$$

Следуя общей нотации переобозначим квантовое число n за L и не забудем, что при переходе к L необходимо учесть вырождение возбужденных уровней с помощью множителя $D(L)$:

$$E^{(2)}_{GS} = \sum_{L=0}^{N/2-1} D(L) \frac{\left| \sum_{jk} M_{jk} \langle GS|\, b^\dagger_j b_k \,|L\rangle \right|^2}{E(L) - E(N/2)} \tag{50}$$

Приведем подробное вычисление для матричного элемента в числителе, по уже отработанной ранее схеме вычислений сведем матричный элемент к теореме Вика, чтобы воспользоваться комбинаторными тождествами

$$\sum_{jk} M_{jk} \langle GS|\, b^\dagger_j b_k \,|L\rangle = \sum_{jk} M_{jk} \sum_{i_1 \ldots i_{N+N/2-L}}^{N} \langle 0|\, b_{i_1} \ldots b_{i_{N/2}} b_k b_{i_{N+1}} \ldots b_{i_{N+N/2-L}} b^\dagger_j b^\dagger_{i_{N/2+1}} \ldots b^\dagger_{i_N} \,|0\rangle \tag{51}$$

Теперь еще раз внимательно посмотрим на выражение в формуле (51).

Операторов уничтожения — $N/2 + 1 + N/2 - L = N + 1 - L$

Операторов рождения — $N/2 + 1$ Из количества операторов рождения и уничтожения делаем вывод, что поправка зануляется.

Дальнейшая аналогия легко напрашивается сама собой, так как во всех порядках теории возмущений присутствуют матричные элементы подобного вида. Последующее рассмотрение с использованием метода математической индукции дает нам то, что для поправки любого порядка количество операторов рождения и операторов уничтожения не будет совпадать. Таким образом, можно заключить, что возмущения, описанные формулами (39) не будут давать вклад в энергию основного состояния.

$$E_{GS}^{(n)} = 0 \qquad\qquad n = 1, 2 \ldots \tag{52}$$

Мы получили основной результат этой работы.

6. Заключение

В данной работе был дан обзор для основных явлений, связанных с SYK сверхпроводимостью. Следуя исследованиям [3], мы обнаружили, что спиновая версия модели SYK с дополнительными взаимодействиями может демонстрировать недиагональный дальний порядок и сверхпроводимость. Предыдущие исследования были сосредоточены на трактовке данной теории с помощью среднего поля в случае больших N. Исследуемый класс теорий подразумевает неустойчивость основного состояния электронного газа в веществе при сколь угодно слабом притяжении. Это действительно так для модели, реализующей прыжки электронов, кратко рассмотренной здесь. Однако, для теории с другим взаимодействием из данной работы главный эффект заключается в том, что добавление члена Хаббарда к модели SYK, приводит к качественно другому сценарию сверхпроводящего перехода. В этом случае физика продиктована квантовыми флуктуациями локальных фаз. В частности, это приводит к образованию псевдощели при малых U. Данные особенности также описываются квантовой версией знаменитой модели Курамото, кратко упомянутой здесь. С другой стороны, при сильном притяжении вид взаимодействия имеет решающее значение, что отображается на связи модели Ричардсона с нашей системой. Опираясь на эти рассуждения рассматриваются поправки для обобщенной модели Ричардсона в случае сильной связи. Оказывается, что во всех порядках теории возмущений эти поправки не дают вклад, что подтверждает сделанные ранее рассмотрения.

В завершение работы перечислим некоторые нерешенные задачи, которые могут являться продолжением данного исследования. Первый открытый вопрос — это рассмотрение температурных эффектов и как они влияют на систему с данной поправкой. Как другой путь развития, можно рассмотреть несколько отличные модели, например, взять модель SYK не на полном графе, где все частицы взаимодействуют между всеми, а с какой-то заданной матрицей смежности, и посмотреть как будет себя вести такая система с данным возбуждением.

Список литературы

[1] Antal Jevicki, Kenta Suzuki, Bi-Local Holography in the SYK Model: Perturbations JHEP 11 046, **2016**

[2] Xue-Yang Song, Chao-Ming Jian, Leon Balents, A strongly correlated metal built from Sachdev-Ye-Kitaev models, Physical Review Letters, Volume 119, Issue 21, 216601, **2017**

[3] Hanteng Wang, A. L. Chudnovskiy, Alexander Gorsky, and Alex Kamenev, SYK Superconductivity: Quantum Kuramoto and Generalized Richardson Models; Phys. Rev. Research 2, 033025 **2020**.

[4] Dmitrii A. Trunin, Pedagogical introduction to SYK model and 2D Dilaton Gravity; Phys. Usp. 64 (3) **2020**.

[5] Juan Maldacena and Douglas Stanford, Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model; Phys. Rev. D 94, 106002 **2016**

[6] Subir Sachdev and Jinwu Ye, Gapless spin-fluid ground state in a random quantum Heisenberg magnet; Phys. Rev. Lett. 70, 3339 **1993**

[7] Valentin Bonzom, Victor Nador, Adrian Tanasa, Diagrammatic proof of the large N melonic dominance in the SYK model; Letters in Mathematical Physics volume 109, 2611–2624 **2019**.

[8] Ilya Esterlis and Jörg Schmalian, Cooper pairing of incoherent electrons: an electron-phonon version of the Sachdev-Ye-Kitaev model; Phys. Rev. B 100, 115132, **2019**.

[9] Yoshiki Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators; p. 420, Chap. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. **1975**.

[10] H. Daido, Quasientrainment and Slow Relaxation in a Population of Oscillators with Random and Frustrated Interactions, Phys. Rev. Lett. 68, 1073 **1992**.

[11] R.W. Richardson, A restricted class of exact eigenstates of the pairing-force Hamiltonian; Phys. Lett. 3, 277 **1963**.

[12] Anthony J. Leggett, Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts; Rev. Mod. Phys. 73, 307 **2001**.

[13] Wenbo Fu and Subir Sachdev, Numerical study of fermion and boson models with infinite-range random interactions; Phys. Rev. B 94, 035135 **2016**.

[14] Aavishkar A. Patel, Michael J. Lawler, and Eun-Ah Kim, Coherent Superconductivity with a Large Gap Ratio from Incoherent Metals; Phys. Rev. Lett. 121, 187001 **2018**, 31, 1-24.

[15] J. Dukelsky, S. Pittel, and G. Sierra, Colloquium: Exactly solvable Richardson-Gaudin models for many-body quantum systems; J. Dukelsky, S. Pittel, and G. Sierra Rev. Mod. Phys. 76, 643 **2004**.

[16] A. Milekhin, G. Tarnopolsky, A. Kamenev, and I. Klebanov, (unpublished).

[17] C. L. Baldwin and B. Swingle, Quenched vs Annealed: Glassiness from SK to SYK; Phys. Rev. X 10, 031026 **2020**.