Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

О скалярных произведениях векторов Бете для XYZ спиновой цепочки

(бакалаврская работа)

Студент:
Клыпа Роман Сергеевич

Научный руководитель:
Зотов Андрей Владимирович,
д-р физ.-мат. наук.

Москва 2021

Аннотация

Были изучены свойства on-shell и off-shell Бете векторов для иррационального параметра анизотропии в 8-вершинной неоднородной модели. Мы получили систему уравнений для скалярных произведений, доказали ее совместимость и решили в терминах определителей известных матриц и произвольной функции. Также была доказана ортогональность on-shell Бете векторов для несовпадающих наборов спектральных параметров.

Содержание

1 Введение

Изучение низкоразмерных сильнокореллированных систем является важных и интересным. Среди многочисленных физических низкоразмерных моделей особую роль играет 8-вершинная, которая тесно связана и в каком-то смысле эквивалентна полностью анизотропному XYZ Гейзенберговскому магнетику ([5]). Название «вершинная модель» используется для описания решеточных моделей, в которых микросостояния представлены присваиванием стрелок каждому ребру (линии, соединяющей ближайшие соседние вершины) решетки ([3]). Такие модели могут быть построены для любой решетки, однако наибольшим вниманием пользуются таковые для квадратных. Самой общей моделью такого типа является 16-вершинная, содержащая все возможные варианты направления стрелок, относящихся к одной вершине. Эта модель эквивалентна модели Изинга с 2-, 3- и 4-х спиновым взаимодействием и внешним полем. Учитывая ice rule - правило, разрешающее лишь конфигурации с одинаковым количеством стрелок, входящих и выходящих от вершины - мы получаем 6-вершинную модель. В данной работе рассматривается модель, в которой вместо ice rule применяется правило, оставляющее лишь те вершины, число выходящих и входящих стрелок в которые четное.

Задачи с такими решетками обычно решаются с помощью метода трансфер матрицы. Точнее, строится $2^N \times 2^N$ матрица с матричными элементами между двумя последовательными строками вертикальных стрелок решетки. Для двух заданных конфигураций вертикальных стрелок всегда есть два способа разместить промежуточный ряд горизонтальных. Итак, матричный элемент трансфер матрицы дается разностью энергий между двумя возможными конфигурациями горизонтальных стрелок. Спектральная задача 8-вершинной модели была решена Р. Бакстером с помощью метода Q-оператора, последующие изучения происходили в различных направлениях. Применение квантового метода обратной задачи рассеяния к XYZ Гейзенберговой цепочке ([8]) повлекло за собой обобщение алгебраического анзаца Бете, так как в исходной формулировке применить его было невозможно. Обобщенный Бете анзац позволяет найти спектр и построить собственные вектора трансфер матрицы. Встает вопрос о его применении к подсчету корреляционных функций.

В этой работе мы будем пользоваться способом, предложенным в [6] и развитым в [1]. Мы получим систему линейных уравнений, решениями которой являются скалярные произведения Бете векторов. Основным результатом работы является установление факта ортогональности on-shell Бете векторов в случае эллиптического параметра анизотропии $Q\eta = 2P_1 + P_2\tau$. Эта работа организована следующим образом: в разделе 2 мы представляем основные объекты 8-вершинной модели - R-матрицу (в эллиптической параметризации), L-оператор, матрицу квантовой монодромии и трансфер матрицу. Затем мы изучаем действие R-матрицы на некоторые специальным образом параметризованные вектора из $\mathbb{C}^2$ и вводим вакуумные вектора для калибровочно-преобразованного L-оператора. Раздел 3 поясняет, как обобщенный анзац Бете работает для построения собственных векторов трансфер матрицы. Сначала мы получаем коммутационные соотношения между элементами калибровочно-преобразованной матрицы квантовой монодромии а затем используем их для построения собственных векторов, практически так же, как и в [1]. Основное содержание работы находится в разделе 4, где мы получаем однородную систему линейных уравнений для скалярных произведений векторов Бете, доказываем ее разрешимость и решаем в терминах определителей. Также мы доказываем, что из полученных результатов следует ортогональность on-shell Бете векторов.

2 Неоднородная 8-вершинная модель

Стоит подчеркнуть, что неоднородная модель рассматривается лишь из соображений общности. Все последующие формулы допускают гладкий переход к однородному пределу.

2.1 R-матрица

Матрица больцмановых весов R-матрицы в 8-вершинной модели имеет естественную эллиптическую параметризацию. Для ее записи используются тета-функции Якоби:

$$\begin{aligned}\theta_1(u|\tau) &= -i\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{(k+\frac{1}{2})^2}e^{\pi i(2k+1)u},\\ \theta_2(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{(k+\frac{1}{2})^2}e^{\pi i(2k+1)u},\\ \theta_3(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{k^2}e^{2\pi iku},\\ \theta_4(u|\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k q^{k^2}e^{2\pi iku},\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$ и $q = e^{\pi i\tau}$. Для дальнейшего полезными являются следующие свойства квазипериодичности тета-функций при сдвиге на τ:

$$\begin{aligned}\theta_1(u+\tau|2\tau) &= i\lambda\theta_4(u|2\tau),\\ \theta_4(u+\tau|2\tau) &= i\lambda\theta_1(u|2\tau),\\ \theta_2(u+\tau|2\tau) &= \lambda\theta_3(u|2\tau),\\ \theta_3(u+\tau|2\tau) &= \lambda\theta_2(u|2\tau),\end{aligned} \tag{2.2}$$

и при сдвиге на 1:

$$\begin{aligned}\theta_1(u+1|2\tau) &= -\theta_1(u|2\tau),\\ \theta_2(u+1|2\tau) &= -\theta_2(u|2\tau),\\ \theta_3(u+1|2\tau) &= \theta_3(u|2\tau),\\ \theta_4(u+1|2\tau) &= \theta_4(u|2\tau).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda = e^{-i\pi u}e^{-i\pi\frac{\tau}{2}}$. Для $\theta_i(u|\tau) = \theta_i(u)$:

$$\begin{aligned}\theta_1(u+1) &= -\theta_1(u)\\ \theta_2(u+1) &= -\theta_2(u)\\ \theta_3(u+1) &= \theta_3(u)\\ \theta_4(u+1) &= \theta_4(u)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(u+\tau) &= \lambda^2\theta_1(u)\\ \theta_2(u+\tau) &= \lambda^2\theta_2(u)\\ \theta_3(u+\tau) &= \lambda^2\theta_3(u)\\ \theta_4(u+\tau) &= \lambda^2\theta_4(u)\end{aligned} \tag{2.5}$$

С помощью матриц Паули R-матрицу Бакстера для симметричной 8-вершинной модели можно записать в виде

$$R(u) = R(u;\eta,\tau) = \sum_{a=0}^{3} W_a(u)\sigma_a \otimes \sigma_a, \tag{2.6}$$

где

$$W_a(u) = W_a(u;\eta,\tau) = \theta_1(\eta|\tau)\frac{\theta_{5-a}\left(u+\frac{\eta}{2}|\tau\right)}{\theta_{5-a}\left(\frac{\eta}{2}|\tau\right)}. \tag{2.7}$$

В матричной форме мы имеем:

$$\begin{aligned} R(u) = &\begin{pmatrix} W_0(u)+W_3(u) & 0 & 0 & W_1(u)-W_2(u) \\ 0 & W_0(u)-W_3(u) & W_1(u)+W_2(u) & 0 \\ 0 & W_1(u)+W_2(u) & W_0(u)-W_3(u) & 0 \\ W_1(u)-W_2(u) & 0 & 0 & W_0(u)+W_3(u) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{8v}(u) & 0 & 0 & d^{8v}(u) \\ 0 & b^{8v}(u) & c^{8v}(u) & 0 \\ 0 & c^{8v}(u) & b^{8v}(u) & 0 \\ d^{8v}(u) & 0 & 0 & a^{8v}(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned} a^{8v}(u) &= \frac{2\theta_4(\eta|2\tau)\theta_1(u+\eta|2\tau)\theta_4(u|\tau)}{\theta_2(0|\tau)\theta_4(0|2\tau)}, \\ b^{8v}(u) &= \frac{2\theta_4(\eta|2\tau)\theta_4(u+\eta|2\tau)\theta_1(u|\tau)}{\theta_2(0|\tau)\theta_4(0|2\tau)}, \\ c^{8v}(u) &= \frac{2\theta_1(\eta|2\tau)\theta_4(u+\eta|2\tau)\theta_4(u|\tau)}{\theta_2(0|\tau)\theta_4(0|2\tau)}, \\ d^{8v}(u) &= \frac{2\theta_1(\eta|2\tau)\theta_1(u+\eta|2\tau)\theta_1(u|\tau)}{\theta_2(0|\tau)\theta_4(0|2\tau)}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

Легко увидеть, что

$$\begin{aligned} R_{12}(u+1) &= -\sigma_3^{(1)}R_{12}(u)\sigma_3^{(1)}, \\ R_{12}(u+\tau) &= -e^{-\pi i(2u+\eta+\tau)}\sigma_1^{(1)}R_{12}(u)\sigma_1^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Можно показать, что эта R-матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}(u_1-u_2)R_{13}(u_1)R_{23}(u_2) = R_{23}(u_2)R_{13}(u_1)R_{12}(u_1-u_2), \tag{2.11}$$

и коммутирует с $\sigma_a \otimes \sigma_a$:

$$\sigma_a \otimes \sigma_a R(u) = R(u)\sigma_a \otimes \sigma_a. \tag{2.12}$$

Нам также понадобятся следующие свойства R-матрицы:

$$\begin{aligned} R_{12}(-u;-\eta,\tau) &= -R_{12}(u;\eta,\tau), \\ R_{12}^{t_1 t_2}(u) &= R_{12}(u), \\ R_{12}(u-\eta;\eta,\tau) &= e^{\pi i(2u-\eta+\tau)}R_{12}^{t_1}(u+\tau+1;-\eta,\tau), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где t_i обозначается транспозицию в i-ом пространстве. R-матрица также может быть представлена в форме L-оператора

$$L(u) = \begin{pmatrix} W_0(u)\sigma_0+W_3(u)\sigma_3 & W_1(u)\sigma_1 - iW_2(u)\sigma_2 \\ W_1(u)\sigma_1+iW_2(u)\sigma_2 & W_0(u)\sigma_0-W_3(u)\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

который является 2×2 матрицей, чьи матричные элементы действуют в пространстве $\mathbb{C}^2$. Уравнение Янга-Бакстера для R является $RLL = LLR$ соотношением для L:

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u-v), \tag{2.15}$$

где $L_1(u) = L(u) \otimes 1$, $L_2(v) = 1 \otimes L(v)$. Квантовой матрицей монодромии для неоднородной 8-вершинной модели является

$$\mathcal{T}(u) = L_1(u-\xi_1)L_2(u-\xi_2)...L_N(u-\xi_N) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где комплексные числа ξ_i - параметры неоднородности. Согласно уравнениям 2.10 квантовая матрица монодромии удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(u+1) &= \sigma_3 \mathcal{T}(u) \sigma_3 = \begin{pmatrix} A(u) & -B(u) \\ -C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{T}(u+\tau) &= e^{-\pi i c(u)} \sigma_1 \mathcal{T}(u) \sigma_1 = \begin{pmatrix} D(u) & C(u) \\ B(u) & A(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где

$$c(u) = N(2u + \eta + \tau) - 2\sum_{k=1}^{N} \xi_k. \tag{2.18}$$

Из 2.15 и 2.16 следует, что квантовая матрица монодромии удовлетворяет RTT = TTR соотношению:

$$R_{12}(u-v)\mathcal{T}_1(u)\mathcal{T}_2(v) = \mathcal{T}_2(v)\mathcal{T}_1(u)R_{12}(u-v) \tag{2.19}$$

Из этого соотношения следует что трансфер матрица

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(u) &= \mathrm{tr}_0\left(R_{01}(u-\xi_1)R_{02}(u-\xi_2)...R_{0N}(u-\xi_N)\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(L_1(u-\xi_1)L_2(u-\xi_2)...L_N(u-\xi_N)\right) = \mathrm{tr}\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u) \end{aligned} \tag{2.20}$$

коммутирует при любых значениях спектрального параметра u. Для решения модели нас интересуют собственные вектора и собственные значения трансфер матрицы. Однородная 8-вершинная модель (когда все ξ_i равны 0) имеет близкое отношение к XYZ цепочке со спином $\frac{1}{2}$. Связь проявляется следующим образом: гамильтониан H^{XYZ} XYZ цепочки содержится в коммутирующем семействе операторов $\mathrm{T}(u)$:

$$\partial_u \log \mathrm{T}(u)\big|_{u=0} = \frac{\theta_1'(0|\tau)}{2\theta_1(\eta|\tau)} H^{XYZ} + J_0 N \mathbf{1}, \tag{2.21}$$

где $J_0 = \frac{1}{2}\theta_1'(\eta|\tau)/\theta_1(\eta|\tau)$. Гамильтониан XYZ цепочки дается выражением

$$H^{XYZ} = \sum_{j=1}^{N} \left(J_1 \sigma_1^{(j)} \sigma_1^{(j+1)} + J_2 \sigma_2^{(j)} \sigma_2^{(j+1)} + J_3 \sigma_3^{(j)} \sigma_3^{(j+1)} \right)$$

с константами

$$J_1 = \frac{\theta_4(\eta|\tau)}{\theta_4(0|\tau)} \qquad J_2 = \frac{\theta_3(\eta|\tau)}{\theta_3(0|\tau)} \qquad J_3 = \frac{\theta_2(\eta|\tau)}{\theta_2(0|\tau)}$$

Трансфер матрица однородной 8-вершинной модели является генерирующей функцией сохраняющихся величин XYZ цепочки со спином $\frac{1}{2}$.

2.2 Сплетающиеся вектора

L-оператор в 8-вершинной модели не имеет вакуумного вектора, поэтому применить метод алгебраического Бете анзаца невозможно. Вместо этого необходимо применить так называемый обобщенный Бете анзац. Ключевым моментом в нем является действие R-матрицы на некоторые специальные вектора. Рассмотрим семейство векторов

$$|\phi(s)\rangle = \begin{pmatrix} \theta_1(s|2\tau) \\ \theta_4(s|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

где s - некий комплексный параметр. Они называются сплетающимися векторами. Ковектор, ортогональный к $|\phi(s)\rangle$:

$$\langle\phi^{\perp}(s)|\begin{pmatrix}\theta_4(s|2\tau) & \theta_1(s|2\tau)\end{pmatrix} = ie^{-\pi i(s+\frac{\tau}{2}}\langle\phi(s+\tau+1)|\,, \tag{2.23}$$

и скалярное произведение $\langle\phi^{\perp}(t)|\phi(s)\rangle$:

$$\begin{gathered}\langle\phi^{\perp}(t)|\phi(s)\rangle = \theta_1\left(\frac{1}{2}(t-s)|\tau\right)\theta_2\left(\frac{1}{2}(t+s)|\tau\right) = \\ = 2\frac{\theta_1\left(\frac{1}{2}(t-s)|2\tau\right)\theta_4\left(\frac{1}{2}(t-s)|2\tau\right)\theta_2\left(\frac{1}{2}(t+s)|2\tau\right)\theta_3\left(\frac{1}{2}(t+s)|2\tau\right)}{\theta_1(0|2\tau)\theta_3(0|2\tau)}\end{gathered} \tag{2.24}$$

Используя свойства тета-функций, можно доказать следующие соотношения для сплетающихся векторов:

$$R(u)\,|\phi(s+\eta)\rangle\otimes|\phi(s-u)\rangle = \theta_1(u+\eta|\tau)\,|\phi(s)\rangle\otimes|\phi(s-u+\eta)\rangle\,, \tag{2.25}$$

или, выделяя пространства, которым принадлежат вектора:

$$R_{12}(u)\,|\phi(s+\eta)\rangle_1\otimes|\phi(s-u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\,|\phi(s)\rangle_1\otimes|\phi(s-u+\eta)\rangle_2\,. \tag{2.26}$$

Ситуация, когда в результате действия R-матрицы образовывается лишь один член с тензорным произведением, исключительна. Это свойство было названо Бакстером как "прохождение пары векторов через вершину"и играет важную роль в решении 8-вершинной модели. Приведем другие полезные версии соотношения 2.26. Меняя $u\to -u$, $\eta\to-\eta$, мы получаем:

$$R_{12}(u)\,|\phi(s-\eta)\rangle_1\otimes|\phi(s+u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\,|\phi(s)\rangle_1\otimes|\phi(s+u-\eta)\rangle_2\,. \tag{2.27}$$

Сдвигая $s\to s+\tau+1$ и транспонируя в двух пространствах:

$$\langle\phi^{\perp}(s+\eta)|_1\,\langle\phi^{\perp}(s-u)|_2\,R_{12}(u) = \theta_1(u+\eta|\tau)\,\langle\phi^{\perp}(s)|_1\,\langle\phi^{\perp}(s-u+\eta)|_2\,. \tag{2.28}$$

Сдвигая $u\to u-\xi$ и $s\to s+u$ в 2.26 и беря скалярное произведение от обоих частей:

$$\langle\phi^{\perp}(s+u)|_1\,R_{12}(u-\xi)\,|\phi(s+u+\eta)\rangle_1\,|\phi(s+\xi)\rangle_2 = 0 \tag{2.29}$$

Для скалярного произведения ковектора с 2.26:

$$\langle\phi^{\perp}(t)|_1\,R_{12}(u-\xi)\,|\phi(s+\eta)\rangle_1\,|\phi(s-u)\rangle_2 = \theta_1(u+\eta|\tau)\,\langle\phi^{\perp}(t)|\phi(s)\rangle\,|\phi(s-u+\eta)\rangle_2 \tag{2.30}$$

или, с дополнительным сдвигом $u\to u-\xi$:

$$\frac{\langle\phi^{\perp}(t-u)|_1\,R_{12}(u-\xi)\,|\phi(s+\eta)\rangle_1\,|\phi(s+u+\eta)\rangle_1}{\langle\phi^{\perp}(t-u)|\phi(s+u)\rangle}\,|\phi(s+\xi)\rangle_2 = \theta_1(u-\xi+\eta|\tau)\,|\phi(s+\xi+\eta)\rangle_2\,. \tag{2.31}$$

Сдвигая аргументы в 2.26 и меняя $\eta\to-\eta$, используя свойство 2.13 и транспонируя в первом пространстве, мы получаем следующее важное равенство:

$$\langle\phi^{\perp}(s)|_1\,R_{12}(u)\,|\phi(s-u)\rangle_2 = \theta_1(u|\tau)\,\langle\phi^{\perp}(s+\eta)|_1\,|\phi(s-u-\eta)\rangle_2 \tag{2.32}$$

или, что то же самое, но с дополнительным параметром сдвига:

$$\langle\phi^{\perp}(s+u)|_1\,R_{12}(u-\xi)\,|\phi(s+\xi)\rangle_2 = \theta_1(u-\xi|\tau)\,\langle\phi^{\perp}(s+u+\eta)|_1\,|\phi(s+\xi-\eta)\rangle_2\,. \tag{2.33}$$

Взяв скалярное произведение, это равенство можно записать в следующей форме:

$$\frac{\langle \phi^{\perp}(s+u)|_1 \, R_{12}(u-\xi) \, |\phi(t-u+\eta)\rangle_1}{\langle \phi^{\perp}(s+u+\eta)|\phi(t-u+\eta)\rangle} \, |\phi(s+\xi)\rangle_2 = \theta_1(u-\xi|\tau) \, |\phi(s+\xi-\eta)\rangle_2 \tag{2.34}$$

Таким же образом можно получить более общее равенство для сплетающихся векторов:

$$\begin{gathered} R_{12}(u) \, |\phi(s+\eta)\rangle_1 \, |\phi(t-u)\rangle_2 = \\ = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)-u|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)|\tau)} \, |\phi(t)\rangle_1 \, |\phi(s+u+\eta)\rangle_2 + \\ + \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)+\eta|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)|\tau)} \, |\phi(s)\rangle_1 \, |\phi(t-u-\eta)\rangle_2 \end{gathered} \tag{2.35}$$

Это дает нам правило действия R-матрицы на тензорное произведение двух случайных векторов. При t=s оно совпадает с 2.26. Также, подставляя $u \to -u, \eta \to -\eta$, мы получим

$$\begin{gathered} R_{12}(u) \, |\phi(s-\eta)\rangle_1 \, |\phi(t+u)\rangle_2 = \\ = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)+u|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)|\tau)} \, |\phi(t)\rangle_1 \, |\phi(s-u-\eta)\rangle_2 + \\ + \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)-\eta|\tau)}{\theta_2(\frac{1}{2}(s+t)|\tau)} \, |\phi(s)\rangle_1 \, |\phi(t+u+\eta)\rangle_2 \end{gathered} \tag{2.36}$$

Уравнения 2.26, 2.27 и 2.35,2.36 могут быть объединены в "сплетающиеся соотношения". Рассмотрим вектора

$$\begin{aligned} |\phi_k^{k+1}(u)\rangle &= |\phi(s-u+k\eta+\frac{\eta}{2})\rangle \, , \\ |\phi_{k+1}^{k}(u)\rangle &= |\phi(s+u+k\eta+\frac{\eta}{2})\rangle \, . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Теперь вышеупомянутые уравнения можно записать в виде

$$R_{12}(u-v) \, |\phi_k^{k'}(u)\rangle_1 \, |\phi_k^{k''}(u)\rangle_2 = \sum_l |\phi_l^{k''}(u)\rangle_1 \, |\phi_k^{l}(u)\rangle_2 \, W\begin{pmatrix} k & k' \\ l & k'' \end{pmatrix}(u-v), \tag{2.38}$$

где $W\begin{pmatrix} k & k' \\ l & k'' \end{pmatrix}(u) = 0$, за исключением случая, когда $|k-k'| = |k'-k''| = |l-k''| = |l-k| = 1$. Ненулевые веса:

$$\begin{gathered} W\begin{pmatrix} k & k\pm1 \\ k\pm1 & k\pm2 \end{pmatrix}(u) = \theta_1(u+\eta|\tau) \\ W\begin{pmatrix} k & k\pm1 \\ k\pm1 & k \end{pmatrix}(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(s+k\eta\mp u|\tau)}{\theta_2(s+k\eta|\tau)} \\ W\begin{pmatrix} k & k\pm1 \\ k\mp1 & k \end{pmatrix}(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(s+(k\pm1)\eta|\tau)}{\theta_2(s+k\eta|\tau)} \end{gathered} \tag{2.39}$$

Похожее сплетающееся соотношение, полученное из транспозицией в обоих пространствах, выполняется для соответствующих ковекторов.

2.3 Вакуумные вектора

Рассмотрим калибровочное преобразование L-оператора:

$$L'_k(u,\xi_k) = M^{-1}_{k+l-1}(u) L_k(u-\xi_k) M_{k+l}(u) = \begin{pmatrix} a'_k(u) & b'_k(u) \\ c'_k(u) & d'_k(u) \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

где $l \in \mathbb{Z}$ - целочисленный параметр. Матрица $M_k(u)$:

$$M_k(u) = \begin{pmatrix} \theta_1(s_k + u|2\tau) & \gamma_k \theta_1(t_k - u|2\tau) \\ \theta_4(s_k + u|2\tau) & \gamma_k \theta_4(t_k - u|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

где $s_k = s + k\eta, t = t + k\eta$, $s, t \in \mathbb{C}$ - произвольные параметры и

$$\gamma_k = \frac{1}{\theta_2(\tau_k|2\tau)\theta_3(\tau_k|2\tau)} \qquad \tau_k = \frac{1}{2}(s_k + t_k). \tag{2.42}$$

Стоит отметить, что столбцами этой матрицы являются сплетающиеся вектора. Обратной матрицей является

$$M_k^{-1}(u) = \frac{1}{\det M_k(u)} \begin{pmatrix} \gamma_k \theta_4(t_k - u|2\tau) & -\gamma_k \theta_1(t_k - u|2\tau) \\ -\theta_4(s_k + u|2\tau) & \theta_1(s_k + u|2\tau) \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

где

$$\begin{aligned} \det M_k(u) &= -\gamma_k \langle \phi^{\perp}(t_k - u)|\phi(s_k + u)\rangle = \\ &= \gamma_k \theta_1(\frac{1}{2}(s - t) + u|\tau)\theta_2(\tau_k|\tau) = \\ &= 2\frac{\theta_1(\frac{1}{2}(s - t) + u|\tau)\theta_4(\frac{1}{2}(s - t) + u|\tau)}{\theta_2(0|2\tau)\theta_3(0|2\tau)} = \mu(u). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Заметим, что $\mu(u)$ не зависит от k. У калибровочно преобразованного L-оператора есть локальный вакуумный вектор, не зависящий от u:

$$|\omega_k^l\rangle = \begin{pmatrix} \theta_1(s_{k+l-1} + \xi_k|2\tau) \\ \theta_4(s_{k+l-1} + \xi_k|2\tau) \end{pmatrix} = |\phi(s_{k+l-1} + \xi_k)\rangle_k \in V_k, \tag{2.45}$$

который уничтожается левым нижним элементом $c_k'(u)$:

$$c_k'(u)\,|\omega_k^l\rangle = 0. \tag{2.46}$$

Это следует непосредственно из уравнения 2.29. В свою очередь, уравнения 2.31 и 2.34 определяют действие операторов $a_k'(u)$ и $d_k'(u)$ на вакуумный вектор:

$$\begin{aligned} a_k'(u)\,|\omega_k^l\rangle &= \theta_1(u - \xi_k + \eta|\tau)\,|\omega_k^{l+1}\rangle\,, \\ d_k'(u)\,|\omega_k^l\rangle &= \theta_1(u - \xi_k|\tau)\,|\omega_k^{l-1}\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

В отличие от 6-вершинной модели, вакуумный вектор не является собственным для этих операторов, однако преобразуется простым образом. Калибровочно-преобразованной трансфер матрицей является

$$\begin{aligned} \mathcal{T}'(u) &= L_1'(u - \xi_1)L_2'(u - \xi_2)...L_N'(u - \xi_N) = \\ &= M_l^{-1}(u)\mathcal{T}(u)M_{N+l}(u) = \begin{pmatrix} A^l(u) & B^l(u) \\ C^l(u) & D^l(u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Глобальный вакуумный вектор определяется как

$$|\Omega^l\rangle = |\omega_1^l\rangle \otimes |\omega_2^l\rangle \otimes ... \otimes |\omega_N^l\rangle\,. \tag{2.49}$$

Согласно 2.46 и 2.47, операторы $A^l(u)$, $D^l(u)$ и $C^l(u)$ действуют на глобальный вакуумный вектор следующим образом:

$$\begin{aligned} C^l(u)\,|\Omega^l\rangle &= 0, \\ A^l(u)\,|\Omega^l\rangle &= \prod_{i=1}^{N} \theta_1(u - \xi_i + \eta|\tau)\,|\Omega^{l+1}\rangle\,, \\ D^l(u)\,|\Omega^l\rangle &= \prod_{i=1}^{N} \theta_1(u - \xi_i|\tau)\,|\Omega^{l-1}\rangle\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Те же формулы 2.26 и 2.27 позволяют нам проверить, что локальный дуальный вакуумный вектор

$$\langle \bar{\omega}_k^l | = \langle \phi^{\perp}(t_{k+l} - \xi_k | \tag{2.51}$$

удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{gathered}
\langle \bar{\omega}_k^l |\, b_k' = 0, \\
\langle \bar{\omega}_k^l |\, a_k' = \gamma_{k+l-1}\gamma_{k+l}^{-1}\theta_1(u - \xi_k + \eta|\tau)\, \langle \bar{\omega}_k^{l-1} |\,, \\
\langle \bar{\omega}_k^l |\, d_k' = \gamma_{k+l}\gamma_{k+l-1}^{-1}\theta_1(u - \xi_k|\tau)\, \langle \bar{\omega}_k^{l+1} |\,.
\end{gathered} \tag{2.52}$$

Глобальный дуальный (левый) вакуумный вектор определяется как тензорное произведение локальных:

$$\langle \bar{\Omega}^l | = \langle \bar{\omega}_1^l | \otimes \langle \bar{\omega}_2^l | \otimes \ldots \otimes \langle \bar{\omega}_N^l |\,. \tag{2.53}$$

Операторы $A^l(u)$, $D^l(u)$, $B^l(u)$ действуют на левый вектор так:

$$\begin{gathered}
\langle \bar{\Omega}^l |\, B^l(u) = 0, \\
\langle \bar{\Omega}^l |\, A^l(u) = \gamma_l \gamma_{l+N}^{-1} \prod_{i=1}^{N} \theta_1(u - \xi_i + \eta|\tau)\, \langle \bar{\Omega}^{l-1} |\,, \\
\langle \bar{\Omega}^l |\, D^l(u) = \gamma_{l+N} \gamma_l^{-1} \prod_{i=1}^{N} \theta_1(u - \xi_i|\tau)\, \langle \bar{\Omega}^{l+1} |\,.
\end{gathered} \tag{2.54}$$

Эти формулы в дальнейшем будут использованы в обобщенном анзаце Бете.

3 Обобщенный алгебраический Бете анзац

В этом разделе мы построим off-shell и on-shell Бете вектора и опишем их свойства.

3.1 Перестановочные соотношения

Рассмотрим обобщенную (калибровочно-преобразованную) матрицу монодромии

$$\mathcal{T}_{k,l}(u) = M_k^{-1}(u)\mathcal{T}(u)M_l(u) = \begin{pmatrix} A^{k,l}(u) & B^{k,l}(u) \\ C^{k,l}(u) & D^{k,l}(u) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Заметим, что в этих обозначениях $\mathcal{T}'(u) = \mathcal{T}_{l,l+N}(u)$. Коэффициенты преобразованной матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
A^{k,l}(u) &= \frac{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) |\, \mathcal{T}(u)\, | \phi(s_l + u) \rangle}{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) | \phi(s_k + u) \rangle}, \\
B^{k,l}(u) &= \gamma_l \frac{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) |\, \mathcal{T}(u)\, | \phi(t_l + u) \rangle}{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) | \phi(s_k + u) \rangle}, \\
C^{k,l}(u) &= -\frac{1}{\gamma_k} \frac{\langle \phi^{\perp}(s_k + u) |\, \mathcal{T}(u)\, | \phi(s_l + u) \rangle}{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) | \phi(s_k + u) \rangle}, \\
D^{k,l}(u) &= -\frac{\gamma_l}{\gamma_k} \frac{\langle \phi^{\perp}(s_k + u) |\, \mathcal{T}(u)\, | \phi(t_l - u) \rangle}{\langle \phi^{\perp}(t_k - u) | \phi(s_k + u) \rangle}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из уравнений 2.17 следует, что обобщенная матрица монодромии обладает слдующими квазипериодическими свойствами:

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_{k,l}(u+1)=\mathcal{T}_{k,l}(u)\\ \mathcal{T}_{k,l}(u+\tau)=e^{-\pi i c(u)}\begin{pmatrix}e^{\pi i s_k} & 0\\ 0 & -e^{-\pi i t_k}\end{pmatrix}\mathcal{T}_{k,l}(u)\begin{pmatrix}e^{-\pi i s_l} & 0\\ 0 & -e^{\pi i t_l}\end{pmatrix}=\\ =e^{-\pi i c(u)}\begin{pmatrix}e^{\pi i(s_k-s_l)}A^{k,l}(u) & -e^{\pi i(s_k+t_l)}B^{k,l}(u)\\ -e^{-\pi i(s_l+t_k)}C^{k,l}(u) & e^{\pi i(t_l-t_k)}D^{k,l}(u)\end{pmatrix}\end{gathered}\tag{3.3}$$

где $c(u)$ определено в 2.18. Для последующих вычислений удобно ввести временные обозначения для векторов и ковекторов:

$$\begin{aligned}X^l(u)&=|\phi(s_l+u)\rangle\,, & Y^l(u)&=|\phi(t_l-u)\rangle\,,\\ \tilde{X}^k(u)&=\langle\phi^\perp(s_k+u)|\,, & \tilde{Y}^k(u)&=|\phi^\perp(t_k-u)\rangle\,,\end{aligned}\tag{3.4}$$

тогда

$$\begin{aligned}A^{k,l}(u)&=-\frac{\gamma_k}{\mu(u)}\tilde{Y}^k(u)\mathcal{T}(u)X^l(u),\\ B^{k,l}(u)&=-\frac{\gamma_k\gamma_l}{\mu(u)}\tilde{Y}^k(u)\mathcal{T}(u)Y^l(u),\\ C^{k,l}(u)&=\frac{1}{\mu(u)}\tilde{X}^k(u)\mathcal{T}(u)X^l(u),\\ D^{k,l}(u)&=\frac{\gamma_l}{\mu(u)}\tilde{X}^k(u)\mathcal{T}(u)Y^l(u).\end{aligned}\tag{3.5}$$

В данных обозначениях уравнения 2.26, 2.27, 2.35 и 2.36 выглядят следующим образом:

$$R_{12}(u-v)X_1^{l+1}(u)X_2^l(v)=\theta_1(u-v+\eta|\tau)X_1^l(u)X_2^{l+1}(v),\tag{3.6}$$

$$R_{12}(u-v)Y_1^{l-1}(u)Y_2^l(v)=\theta_1(u-v+\eta|\tau)Y_1^l(u)Y_2^{l-1}(v),\tag{3.7}$$

$$R_{12}(u-v)Y_1^{l+1}(u)X_2^l(v)=f_l^+(u-v)Y_1^l(u)X_2^{l-1}(v)+g_l(v-u)X_1^l(u)Y_2^{l+1}(v),\tag{3.8}$$

$$R_{12}(u-v)X_1^k(u)Y_2^{k-1}(v)=f_k^-(u-v)X_1^{k+1}(u)Y_2^k(v)+g_k(u-v)Y_1^{k-1}(u)X_2^k(v),\tag{3.9}$$

$$R_{12}(u-v)Y_1^l(u)X_2^{l+1}(v)=f_l^+(u-v)Y_1^{l-1}(u)X_2^l(v)+g_l(v-u)X_1^{l+1}(u)Y_2^l(v),\tag{3.10}$$

$$R_{12}(u-v)X_1^{k-1}(u)Y_2^k(v)=f_k^-(u-v)X_1^k(u)Y_2^{k+1}(v)+g_k(u-v)Y_1^k(u)X_2^{k-1}(v),\tag{3.11}$$

где

$$f_k^\pm(u)=\frac{\theta_1(u|\tau)\theta_2(\tau_{k\pm1}|\tau)}{\theta_2(\tau_k|\tau)},\qquad g_k(u)=\frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\tau_k+u|\tau)}{\theta_2(\tau_k|\tau)}.\tag{3.12}$$

Похожие соотношения выполняются и для ковекторов, они получаются транспозицией в соотвествующих векторных пространствах. Умножая обе части $RTT=TTR$ соотношения на вектора $Y_1^{l-1}(u)Y_2^l(v)$ справа и $\tilde{X}_1^{k-1}(u)\tilde{Y}_2^k(v)$ слева, получаем перестановочное соотношение:

$$B_{k+1,l}(u)B_{k,l+1}(v)=B_{k+1,l}(v)B_{k,l+1}(u).\tag{3.13}$$

Похожим образом получаем соотношение

$$C_{k,l+1}(u)C_{k+1,l}(v)=C_{k,l+1}(v)C_{k+1,l}(u).\tag{3.14}$$

Коммутационные соотношения A и B операторов получаются домножением обеих частей на векторы $Y_1^{l+1}(u)X_2^l(v)$ справа и $\tilde{Y}_1^{k-1}(u)\tilde{Y}_2^k(v)$ слева с использованием транспонированной версии 3.7 и 3.8:

$$\theta_1(u-v+\eta|\tau)B_{k,l+1}(u)A_{k-1,l}(v)=\theta_1(u-v|\tau)A_{k,l-1}(v)B_{k-1,l}(u)+g_l(v-u)B_{k,l+1}(v)A_{k-1,l}(u).\tag{3.15}$$

Другие коммутационные соотношения могут быть получены таким же способом. Умножая обе стороны на векторы $Y_1^l(u)Y_2^{l+1}(v)$ справа и на $\tilde{X}_1^k(u)\tilde{Y}_2^{k-1}(v)$ слева и используя транспонированную версию 3.9:

$$\theta_1(u-v+\eta|\tau)B_{k-1,l}(v)D_{k,l+1}(u) = \theta_1(u-v|\tau)D_{k+1,l}(u)B_{k,l+1}(v) + g_k(u-v)B_{k-1,l}(u)A_{k,l+1}(v) \tag{3.16}$$

Домножая обе стороны $RTT = TTR$ соотношения на векторы $X_1^{l+1}(u)X_2^l(v)$ справа и на $\tilde{X}_1^{k-1}(u)\tilde{Y}_2^k(v)$ слева и используя транспонированную версию 3.11:

$$\theta_1(u-v+\eta|\tau)A_{k,l+1}(v)C_{k-1,l}(u) = \frac{\gamma_k^2}{\gamma_{k+1}\gamma_{k-1}}\theta_1(u-v|\tau)C_{k,l+1}(u)A_{k+1,l}(v) + g_k(u-v)A_{k,l+1}(u)C_{k-1,l}(v) \tag{3.17}$$

И наконец, умножая обе стороны $RTT = TTR$ соотношения на векторы $Y_1^l(u)X_2^{l+1}(v)$ справа и на $\tilde{X}_1^{k+1}(u)\tilde{X}_2^k(v)$ слева и используя 3.10:

$$\theta_1(u-v+\eta|\tau)D_{k,l}(u)C_{k+1,l+1}(v) = \frac{\gamma_l^2}{\gamma_{l+1}\gamma_{l-1}}\theta_1(u-v|\tau)C_{k,l}(v)D_{k+1,l-1}(u) + g_l(v-u)D_{k,l}(v)C_{k+1,l+1}(u) \tag{3.18}$$

Это основные операторные перестановочные соотношения, используемые в процессе обобщенного Бете анзаца.

3.2 Правые собственные вектора

Рассмотрим вектор

$$|\Psi^l(u_1,...,u_n)\rangle = B_{l-1,l+1}(u_1)B_{l-2,l+2}(u_2)...B_{l-n,l+n}(u_n)\,|\Omega^{l-n}\rangle \tag{3.19}$$

Будем считать, что n фиксировано и равно N/2. Из коммутационных соотношений 3.13 следует, что вектор 3.19 является симметричной функцией параметров $u_1,...,u_n$. Мы собираемся подействовать на этот вектор трансфер матрицей $\mathrm{T}(u) = A_{l,l} + D_{l,l}$. Для этого соотношения 3.15 и 3.16 стоит переписать в более удобном виде для перестановки операторов A и D с B:

$$\begin{gathered} A_{k,l}(u)B_{k-1,l+1}(v) = \alpha(u-v)B_{k,l+2}(v)A_{k-1,l+1}(u)+ \\ +\beta_{l+1}(u-v)B_{k,l+2}(u)A_{k-1,l+1}(v), \\ D_{k,l}(u)B_{k-1,l+1}(v) = \alpha(v-u)B_{k-2,l}(v)D_{k-1,l-1}(u)- \\ -\beta_{k-1}(u-v)B_{k-2,l}(u)D_{k-1,l+1}(v), \end{gathered} \tag{3.20}$$

где

$$\alpha(u) = \frac{\theta_1(u-\eta|\tau)}{\theta_1(u|\tau)}, \qquad \beta_k(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)\theta_2(\tau_k+u|\tau)}{\theta_1(u|\tau)\theta_2(\tau_k|\tau)}. \tag{3.21}$$

Действие операторов $A_{l,l}, D_{l,l}$ на вектор 3.19 может быть найдено с помощью аргументов стандартного Бете анзаца, с использованием перестановочных соотношений 3.20 и свойства 2.50. Результатом будет:

$$\begin{gathered} A_{l,l}\,|\Psi^l(u_1,...,u_n)\rangle = T_A(u)\,|\Psi^{l+1}(u_1,...,u_n)\rangle + \\ +\sum_{j=1}^n \Lambda_{A,j}^l(u)\,|\Psi^{l+1}(u_1,...,u_{j-1},u,u_{j+1},...,u_n)\rangle\,, \\ D_{l,l}\,|\Psi^l(u_1,...,u_n)\rangle = T_D(u)\,|\Psi^{l-1}(u_1,...,u_n)\rangle + \\ +\sum_{j=1}^n \Lambda_{D,j}^l(u)\,|\Psi^{l-1}(u_1,...,u_{j-1},u,u_{j+1},...,u_n)\rangle\,, \end{gathered} \tag{3.22}$$

где

$$\begin{gathered}
T_A(u)=\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)},\\
T_D(u)=\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)},\\
\Lambda^l_{A,j}(u)=\frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\Phi\left(u-u_j,\tau_{l+1}+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u_j-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(u_j-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k|\tau)},\\
\Lambda^l_{D,j}(u)=-\frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\Phi\left(u-u_j,\tau_{l-1}+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u_j-\xi_i|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(u_j-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k|\tau)}.
\end{gathered}\tag{3.23}$$

В последних двух формулах представлена функция

$$\Phi(u,v)=\frac{\theta_1'(0|\tau)\theta_1(u+v|\tau)}{\theta_1(u|\tau)\theta_1(v|\tau)},\tag{3.24}$$

которая имеет простой полюс в $u=0$ с вычетом 1. Рассмотрим теперь Фурье преобразование вектора $|\Psi^l\rangle$:

$$|\Psi_\nu(u_1,...,u_n)\rangle=\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-il\pi\eta\nu}\,|\Psi^l(u_1,...,u_n)\rangle\,.\tag{3.25}$$

Для произвольных параметров u_j такие вектора называются off-shell Бете векторами. Действие трансфер матрицы $\mathrm{T}(u)=A_{l,l}+D_{l,l}$ на такой вектор дается

$$\begin{gathered}
\mathrm{T}(u)\,|\Psi_\nu(u_1,...,u_n)\rangle=T_\nu(u)\,|\Psi_\nu(u_1,...,u_n)\rangle+\\
+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n}e^{-il\pi\eta\nu}\left(e^{i\pi\eta\nu}\Lambda^{l-1}_{A,j}(u)+e^{-i\pi\eta\nu}\Lambda^{l+1}_{D,j}(u)\right)|\Psi^l(u_1,...,u_{j-1},u,u_{j+1},...,u_n)\rangle\,,
\end{gathered}\tag{3.26}$$

где

$$\begin{gathered}
T_\nu(u)=e^{i\pi\eta\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)}+\\
+e^{-i\pi\eta\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u-u_k|\tau)}.
\end{gathered}\tag{3.27}$$

Заметим, что 3.26 можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\mathrm{T}(u)\,|\Psi_\nu(u_1,...,u_n)\rangle=T_\nu(u)\,|\Psi_\nu(u_1,...,u_n)\rangle-\\
-\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n}e^{-il\pi\eta\nu}\Phi\left(u-u_j,\tau_l+\frac{1}{2}\right)\left(\operatorname*{res}_{u=u_j}T_\nu(u)\right)|\Psi^l(u_1,...,u_{j-1},u,u_{j+1},...,u_n)\rangle\,.
\end{gathered}\tag{3.28}$$

Становится видно, что правая часть регулярна при $u=u_j$, как и должно быть. Собственное значение трансфер матрицы должно быть регулярной функцией от u_j. Условия $\operatorname*{res}_{u=u_j}T_\nu(u)=0$ одновременно являются условиями исчезновения «нежелательных членов» в 3.28. Эти условия имеют форму уравнений Бете:

$$e^{2i\pi\eta\nu}\prod_{i=1}^{N}\frac{\theta_1(u_j-\xi_i+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-\xi_i|\tau)}=\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(u_j-u_k+\eta|\tau)}{\theta_1(u_j-u_k-\eta|\tau)}.\tag{3.29}$$

Если уравнения Бете удовлетворены, то вектор $|\Psi_\nu\rangle = |\Psi_\nu(u_1, ..., u_n)\rangle$ является собственным вектором трансфер матрицы, при условии что ряд сходится и не равен нулю. Такие векторы называются on-shell Бете векторами. Заметим, что $|\Psi^l\rangle$ (а значит и $|\Psi_\nu\rangle$) - целая функция u_j. Действительно, возможный полюс может появиться только в $u_j = (t-s)/2$, когда $\mu(u)$ в знаменателе выражения для $B_{l-j,l+j}(u_j)$ зануляется. В этом случае матрица $M_k(u_j)$ становится вырожденной и

$$\operatorname*{res}_{u_j=(t-s)/2} B_{l-j,l+j}(u_j) \propto \operatorname*{res}_{u_j=(t-s)/2} C_{l-j,l+j}(u_j). \tag{3.30}$$

Используя то, что Бете вектор является симметричной функцией параметров u_j, передвигаем u_j вправо по цепочке B-операторов, где получается

$$\operatorname*{res}_{u_j=(t-s)/2} B_{l-j,l+j}(u_j)\,|\Omega^{l-n}\rangle = \operatorname*{res}_{u_j=(t-s)/2} C_{l-j,l+j}(u_j)\,|\Omega^{l-n}\rangle = 0. \tag{3.31}$$

Следственно, $\operatorname*{res}_{u_j=(t-s)/2} |\Psi^l(u_1, ..., u_n)\rangle = 0$, а значит Бете вектор - регулярная функция каждого из u_j. Далее рассмотрим квазипериодические свойства Бете векторов при сдвигах $u_j \to u_j + 1$ и $u_j \to u_j + \tau$. Используя 3.3:

$$\begin{gathered} B_{l-j,l+j}(u+1) = B_{l-j,l+j}(u), \\ B_{l-j,l+j}(u+\tau) = -e^{\pi i(s+t)+2\pi i l\eta - \pi i c(u)} B_{l-j,l+j}(u). \end{gathered} \tag{3.32}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} |\Psi_\nu(u_1, ..., u_{j-1}, u_j+1, u_{j+1}, ..., u_n)\rangle = |\Psi_\nu(u_1, ..., u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, ..., u_n)\rangle\,, \\ |\Psi_\nu(u_1, ..., u_{j-1}, u_j+\tau, u_{j+1}, ..., u_n)\rangle = -e^{\pi i(s+t)-\pi i c(u)}\,|\Psi_{\nu-2}(u_1, ..., u_{j-1}, u_j+1, u_{j+1}, ..., u_n)\rangle\,. \end{gathered} \tag{3.33}$$

3.3 Левые собственные вектора

Для построения левых собственных векторов трансфер матрицы необходимо переопределить операторы $A_{k,l}, B_{k,l}, C_{k,l}, D_{k,l}$ следующим образом:

$$\bar{A}_{k,l} = \gamma_k^{-1}\gamma_l A_{k,l} \qquad \bar{B}_{k,l} = \gamma_k^{-1}\gamma_l^{-1} B_{k,l} \qquad \bar{C}_{k,l} = \gamma_k\gamma_l C_{k,l} \qquad \bar{D}_{k,l} = \gamma_k\gamma_l^{-1} D_{k,l} \tag{3.34}$$

Эти операторы действуют на левый вакуумный вектор так:

$$\begin{gathered} \langle\bar{\Omega}^l|\,\bar{A}_{l,l+N}(u) = \prod_{i=1}^N \theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\,\langle\bar{\Omega}^{l-1}|\,, \\ \langle\bar{\Omega}^l|\,\bar{D}_{l,l+N}(u) = \prod_{i=1}^N \theta_1(u-\xi_i|\tau)\,\langle\bar{\Omega}^{l+1}|\,. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Новые операторы являются матричными элементами калибровочно-преобразованной квантовой матрицы монодромии $\bar{\mathcal{T}}(u) = \bar{M}_k^{-1}(u)\mathcal{T}(u)\bar{M}_l(u)$ с

$$\bar{M}_k(u) = \begin{pmatrix} \gamma_k\theta_1(s_k+u|2\tau) & \theta_1(t_k-u|2\tau) \\ \gamma_k\theta_4(s_k+u|2\tau) & \theta_4(t_k-u|2\tau) \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Рассмотрим дуальный вектор

$$\langle\Psi^l(v_1, ..., v_n)| = \langle\Omega|^{l-n}\,\bar{C}_{l-n,l+n}(v_n)...\bar{C}_{l-2,l+2}(v_2)\bar{C}_{l-1,l+1}(v_1). \tag{3.37}$$

Из коммутационных соотношений 3.14 следует, что этот вектор симметричен по параметрам $v_1, ..., v_n$. Мы подействуем на него слева трансфер матрицей $\mathrm{T}(u) = \bar{A}_{l,l} + \bar{D}_{l,l}$, для этого перепишем уравнения 3.17 и 3.18 в более подходящей форме:

$$\begin{gathered}\bar{C}_{k-1,l+1}(v)\bar{A}_{k,l}(u) = \alpha(u-v)\bar{A}_{k-1,l+1}(u)\bar{C}_{k-2,l}(v)- \\ -\beta k-1(v-u)\bar{A}_{k-1,l+1}(v)\bar{C}_{k-2,l}(u), \\ \bar{C}_{k-1,l+1}(v)\bar{D}_{k,l}(u) = \alpha(v-u)\bar{D}_{k-1,l+1}(u)\bar{C}_{k,l+2}(v)+ \\ +\beta l+1(v-u)\bar{D}_{k-1,l+1}(v)\bar{C}_{k,l+2}(u),\end{gathered} \tag{3.38}$$

с функциями $\alpha(u)$ и $\beta_k(u)$ из 3.21. Рассмотрим Фурье преобразование дуального вектора $\langle\Psi^l|$:

$$\langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)| = \sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{il\pi\eta\nu}\langle\Psi^l(v_1,...,v_n)|\,. \tag{3.39}$$

Аналогично правому собственному вектору, действие трансфер матрицы на дуальный off-shell вектор имеет вид

$$\begin{gathered}\langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)|\,\mathrm{T}(u) = \bar{T}_\nu(u)\langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)| + \\ +\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n} e^{il\pi\eta\nu}\left(e^{i\pi\eta\nu}\bar{\Lambda}^{l+1}_{A,j}(u) + e^{-i\pi\eta\nu}\bar{\Lambda}^{l-1}_{D,j}(u)\right)\langle\Psi^l(u_1,...,u_{j-1},u,u_{j+1},...,u_n)|\,,\end{gathered} \tag{3.40}$$

где

$$\begin{gathered}\bar{T}_\nu(u) = e^{i\pi\eta\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(u-v_k-\eta|\tau)}{\theta_1(u-v_k|\tau)}+ \\ +e^{-i\pi\eta\nu}\prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i|\tau)\prod_{k=1}^{n}\frac{\theta_1(v_k-u-\eta|\tau)}{\theta_1(v_k-u|\tau)} = T_\nu(u), \\ \bar{\Lambda}^l_{A,j}(u) = -\frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\Phi\left(v_j-u,\tau_{l-1}+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(v_j-\xi_i+\eta|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(v_j-v_k-\eta|\tau)}{\theta_1(v_j-v_k|\tau)}, \\ \bar{\Lambda}^l_{D,j}(u) = \frac{\theta_1(\eta|\tau)}{\theta_1'(0|\tau)}\Phi\left(v_j-u,\tau_{l+1}+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{N}\theta_1(v_j-\xi_i|\tau)\prod_{k=1,\neq j}^{n}\frac{\theta_1(v_k-v_j-\eta|\tau)}{\theta_1(v_k-v_j|\tau)}.\end{gathered} \tag{3.41}$$

Это можно переписать в другой форме:

$$\begin{gathered}\langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)|\,\mathrm{T}(u) = T_\nu(u)\langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)| + \\ +\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{n} e^{il\pi\eta\nu}\Phi\left(v_j-u,\tau_l+\frac{1}{2}\right)\left(\operatorname*{res}_{u=v_j}T_\nu(u)\right)\langle\Psi_\nu(v_1,...v_{j-1},v,v_{j+1},...,v_n)|\,.\end{gathered} \tag{3.42}$$

И снова, условия $\operatorname*{res}_{u=v_j}T_\nu(u) = 0$ для всех j приводят к исчезновению «нежелательных членов» и эквивалентны уравнениям Бете для параметров v_j. Аналитические свойства левых Бете векторов одинаковы таковым для правых. Вектора являются регулярными функциями параметров v_j. Используя 3.3:

$$\begin{gathered}\bar{C}_{l-j,l+j}(u+1) = \bar{C}_{l-j,l+j}(u), \\ \bar{C}_{l-j,l+j}(u+\tau) = -e^{-\pi i(s+t)-2\pi il\eta-\pi ic(u)}\bar{C}_{l-j,l+j}(u).\end{gathered} \tag{3.43}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\langle\Psi_\nu(v_1,...v_{j-1},v_j+1,v_{j+1},...,v_n)| = \langle\Psi_\nu(v_1,...,v_n)|\,, \\ \langle\Psi_\nu(v_1,...v_{j-1},v_j+\tau,v_{j+1},...,v_n)| = -e^{-\pi i(s+t)-\pi ic(v_j)}\langle\Psi_{\nu-2}(v_1,...,v_n)|\,.\end{gathered} \tag{3.44}$$

3.4 Зависимость векторов от s,t

Рассмотрим зависимость от s,t для случая двух вершин (N=2) вакуумных векторов:

$$\begin{aligned} |\Omega^l\rangle\,(s+2\tau,t+2\tau) &= e^{-4\pi i\tau}e^{-4\pi is}e^{-4\pi il\eta}e^{-2\pi i\eta}e^{-2\pi i(\xi_1+\xi_2)}\,|\Omega^l\rangle\,(s,t), \\ \langle\bar{\Omega}^{l-1}|\,(s+2\tau,t+2\tau) &= e^{-4\pi i\tau}e^{-4\pi it}e^{-4\pi il\eta}e^{-2\pi i\eta}e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2)}\,\langle\bar{\Omega}^{l-1}|\,(s,t), \end{aligned} \tag{3.45}$$

и операторов $B_{l-1,l+1}$, $\bar{C}_{l-1,l+1}$:

$$\begin{aligned} B_{l-1,l+1}(s+2\tau,t+2\tau) &= e^{4\pi i\tau}e^{4\pi iu}e^{4\pi is}e^{4\pi il\eta}B_{l-1,l+1}(s,t), \\ \bar{C}_{l-1,l+1}(s+2\tau,t+2\tau) &= e^{4\pi i\tau}e^{-4\pi iu}e^{4\pi it}e^{4\pi il\eta}\bar{C}_{l-1,l+1}(s,t). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Отсюда для векторов 3.19 и 3.37 получаются соотношения

$$\begin{aligned} |\Psi^l(s+2\tau,t+2\tau)\rangle &= e^{4\pi iu}e^{-2\pi i\eta}e^{-2\pi i(\xi_1+\xi_2)}\,|\Psi^l(s,t)\rangle\,, \\ \langle\Psi^l(s+2\tau,t+2\tau)| &= e^{-4\pi iu}e^{-2\pi i\eta}e^{2\pi i(\xi_1+\xi_2)}\,\langle\Psi^l(s,t)|\,, \end{aligned} \tag{3.47}$$

и, как следствие, для on-shell Бете векторов выполняется:

$$\begin{aligned} |\Psi^\nu(s+2\tau,t+2\tau)\rangle &= e^{4\pi iu}e^{-2\pi i(\eta+\xi_1+\xi_2)}\,|\Psi^\nu(s,t)\rangle\,, \\ \langle\Psi^\nu(s+2\tau,t+2\tau)| &= e^{-4\pi iu}e^{-2\pi i(\eta-\xi_1-\xi_2)}\,\langle\Psi^\nu(s,t)|\,. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Можно естественным образом обобщить эти выражения для случая N вершин:

$$\begin{aligned} |\Psi^\nu(s+2\tau,t+2\tau)\rangle &= e^{4\pi i\sum_i u_i}e^{-2\pi i(n\eta+\sum_i\xi_i)}\,|\Psi^\nu(s,t)\rangle\,, \\ \langle\Psi^\nu(s+2\tau,t+2\tau)| &= e^{-4\pi i\sum_i u_i}e^{-2\pi i(n\eta-\sum_i\xi_i)}\,\langle\Psi^\nu(s,t)|\,. \end{aligned} \tag{3.49}$$

И для сдвига более общего вида:

$$\begin{aligned} |\Psi^\nu(s+2k\tau,t+2k\tau)\rangle &= \left(e^{4\pi i\sum_i u_i}e^{-2\pi i(n\eta+\sum_i\xi_i)}\right)^k|\Psi^\nu(s,t)\rangle\,, \\ \langle\Psi^\nu(s+2k\tau,t+2k\tau)| &= \left(e^{-4\pi i\sum_i u_i}e^{-2\pi i(n\eta-\sum_i\xi_i)}\right)^k\langle\Psi^\nu(s,t)|\,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Эти соотношения являются ключевыми при рассмотрении случая $Q\eta = 2P_1 + P_2\tau$.

3.5 Случай иррационального η

Для дальнейших вычислений очень полезным является тождество для корней Бете 8-вершинной модели, называемое sum rule. Оно было получено в [1] и заключается в следующем:

$$\sum_i u_i = \frac{1}{2}\sum_i \xi_i - \frac{1}{2}n\eta + \frac{1}{2}(n+\nu_1+\nu\tau), \tag{3.51}$$

где u_i - корни Бете, $\nu_1 = 0,1$, ν принимает целочисленные значения. Используя sum rule и 3.47:

$$\begin{aligned} e^{2\pi iQ\eta\nu}\,\langle\Psi^{l+2Q}(s,t)| = e^{2\pi iQ\eta\nu}\,\langle\Psi^l(s+2Q\eta,t+2Q\eta)| = \\ = e^{2\pi iQ\eta\nu}\,\langle\Psi^l(s+4P_1+2P_2\tau,t+4P_1+2P_2\tau)| = e^{2\pi iQ\eta\nu}e^{-4\pi iP_2\sum_i u_i}e^{-2\pi P_2 i(n\eta-\sum_i\xi_i)}\,\langle\Psi^l(s,t)| = \\ = e^{-2\pi inP_2}e^{-2\pi i\nu_1P_2}e^{2\pi i\nu(Q\eta-P_2\tau)}\,\langle\Psi^l(s,t)| = e^{2\pi i\nu(2P_1)}\,\langle\Psi^l(s,t)| = \langle\Psi^l(s,t)|\,. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Отсюда следует, что левый собственный вектор для $Q\eta = 2P_1 + P_2\tau$ будет иметь вид

$$\langle\Psi^\nu| = \sum_{l\in\mathbb{Z}_{2Q}} e^{\pi il\eta\nu}\,\langle\Psi^l(s,t)|\,. \tag{3.53}$$

Аналогично в случае правого собственного вектора мы приходим к выражению

$$e^{-2\pi i Q\eta\nu}\left|\Psi^{l+2Q}(s,t)\right\rangle = e^{-4\pi i\eta n P_2}\left|\Psi^{l}(s,t)\right\rangle . \tag{3.54}$$

Это означает, что правый собственный вектор будет выглядеть следующим образом:

$$\left|\Psi^{\nu}\right\rangle = \mathcal{N}\sum_{l\in\mathbb{Z}_{2Q}} e^{\pi i l\eta\nu}\left|\Psi^{l}(s,t)\right\rangle , \tag{3.55}$$

где $\mathcal{N} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-4\pi i\eta n P_2 k}$. Стоит отметить, что $\mathcal{N}$ не зависит от ν.

4 Скалярные произведения Бете векторов

В этом разделе мы получим систему линейных уравнений для скалярных произведений on-shell и off-shell Бете векторов.

4.1 Обозначения

Далее мы будем обозначать $\bar{u} = \{u_1, ..., u_{n+1}\}$, $\bar{v} = \{v_1, ..., v_{n+1}\}$, $\bar{w} = \{w_1, ..., w_{n+1}\}$. Мы также положим $\bar{u}_j = \bar{u}/u_j$, $\bar{v}_j = \bar{v}/v_j$ и так далее. Введем функции

$$g(u,v) = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_1(u-v)}, \qquad f(u,v) = \frac{\theta_1(u-v+\eta)}{\theta_1(u-v)}, \qquad h(u,v) = \frac{\theta_1(u-v+\eta)}{\theta_1()\eta)}. \tag{4.1}$$

Здесь и далее $\theta_1(u) = \theta_1(u|\tau)$. Заметим, что

$$g(u,v) = -g(v,u), \qquad f(u,v) = g(u,v)h(u,v), \qquad h(u,u) = 1. \tag{4.2}$$

Чтобы сделать выражения более компактными, используем упрощающие обозначения для произведений этих функций:

$$f(u,\bar{v}) = \prod_{j=1}^{n} f(u,v_j), \qquad h(\bar{w},u_k) = \prod_{j=1}^{n+1} h(w_j,u_k), \qquad g(u_k,\bar{u}_k) = \prod_{j=1,\neq k}^{n+1} g(u_k,u_j), \tag{4.3}$$

и так далее. Функции $a(u)$, $d(u)$ определим как

$$a(u) = \prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i+\eta), \qquad d(u) = \prod_{i=1}^{N}\theta_1(u-\xi_i). \tag{4.4}$$

Также удобно будет положить $V = \sum_{i=1}^{n+1} v_i$, $V_k = \sum_{i=1,\neq k}^{n+1} v_i$ и так далее.

4.2 Система линейных уравнений для скалярных произведений

Перейдем к выводу системы уравнений для скалярных произведений. Используя определения 4.1 и соглашения 4.3, перепишем уравнение для действия оператора $\mathrm{T}(u) = A_{l,l}+D_{l,l}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\left\langle\Psi^{l}(\bar{v}_k)\right|\mathrm{T}(v_j) = \sum_{k=1}^{n+1}\Bigg[& a(v_k)\frac{f(\bar{v}_k,v_k)}{h(v_j,v_k)}\frac{\theta_1(v_k-v_j+\tau_{l-1}+\frac{1}{2})}{\theta_1(\tau_{l-1}+\frac{1}{2})}\left\langle\Psi^{l-1}(\bar{v}_k)\right| + \\ &+d(v_k)\frac{f(v_k,\bar{v}_k)}{h(v_k,v_j)}\frac{\theta_1(v_k-v_j+\tau_{l+1}+\frac{1}{2})}{\theta_1(\tau_{l+1}+\frac{1}{2})}\left\langle\Psi^{l+1}(\bar{v}_k)\right|\Bigg].\end{aligned} \tag{4.5}$$

Положим $\bar{X}_k^l = \langle \Psi^l(\bar{v}_k)|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle$, где $|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle$ - on-shell Бете вектор:

$$\mathrm{T}(v_j)\,|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle = T_\nu(v_j,\bar{u})\,|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle\,. \tag{4.6}$$

Это означает, что параметры $\bar{u}$ удовлетворяют уравнениям Бете. Собственное значение равняется

$$T_\nu(v_j,\bar{u}) = e^{i\pi\eta\nu}a(v_j)f(\bar{u},v_j) + e^{-i\pi\eta\nu}d(v_j)f(v_j,\bar{u}). \tag{4.7}$$

Умножая 4.5 слева на $|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle$ и используя 4.6, мы получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+1}\left[a(v_k)f(\bar{v}_k,v_k)\frac{\theta_1(v_k-v_j+x_{l-1})}{h(v_j,v_k)\theta_1(x_{l-1})}\bar{X}_k^{l-1}+\right.\\ \left.+d(v_k)f(v_k,\bar{v}_k)\frac{\theta_1(v_k-v_j+x_{l+1})}{h(v_k,v_j)\theta_1(x_{l+1})}\bar{X}_k^{l+1}-\delta_{jk}T_\nu(v_j,\bar{u})\bar{X}_k^l\right]=0.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Коэффициенты системы 4.8 квазипериодичны по l с периодом 2Q и множителем $e^{-4\pi i P_2(v_k-v_j)}$:

$$\begin{gathered}\frac{\theta_1(v_k-v_j+x+l\eta+2Q\eta)}{\theta_1(x+l\eta+2Q\eta)} = \frac{\theta_1(v_k-v_j+x+l\eta+2P_2\tau)}{\theta_1(x+l\eta+2P_2\tau)} =\\ = e^{-4\pi i P_2(v_k-v_j)}\frac{\theta_1(v_k-v_j+x+l\eta)}{\theta_1(x+l\eta)}.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Переменные $\bar{X}_k^l = \langle \Psi^l(\bar{v}_k)|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle$ - квазипериодичны по l с периодом 2Q:

$$\bar{X}_k^{l+2Q} = e^{-4\pi i P_2 V_k}e^{-2\pi i n\eta P_2}e^{2\pi i P_2\sum_i \xi_i}\bar{X}_k^l. \tag{4.10}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{\theta_1(v_k-v_j+x+l\eta+2Q\eta)}{\theta_1(x+l\eta+2Q\eta)}\bar{X}_k^{l+2Q} =\\ = e^{-4\pi i P_2 V_j}e^{-2\pi i n\eta P_2}e^{2\pi i P_2\sum_i\xi_i}\frac{\theta_1(v_k-v_j+x+l\eta)}{\theta_1(x+l\eta)}\bar{X}_k^l.\end{gathered} \tag{4.11}$$

Член $\delta_{jk}T_\nu(v_j,\bar{u})\bar{X}_k^l$ при сдвиге на 2Q дает такой же множитель $e^{-4\pi i P_2 V_j}e^{-2\pi i n\eta P_2}e^{2\pi i P_2\sum_i\xi_i}$, так как этот множитель не зависит от k, его можно сократить, и мы получаем, что система уравнений периодична по l с периодом 2Q, а значит количество уравнений равняется 2Q(n+1) для 2Q(n+1) переменных. В следующем разделе мы покажем, что у системы существуют нетривиальные решения.

4.3 Преобразование системы и разрешимость

Поскольку полученная система уравнений однородна, ее решения (если существуют) неоднозначны. То есть, если X_k^l является решением системы, то и $\phi(\bar{v},\bar{u})X_k^l$ тоже, где $\phi(\bar{v},\bar{u})$ - произвольная функция параметров $\bar{v}$ и $\bar{u}$. Чтобы минимизировать возможные неоднозначности, мы приведем систему к новому виду и покажем, что решения новой системы определены с точностью до зависимости от функции параметров $\bar{u}$. Также мы покажем, что ранг системы меньше, чем $(n+1)Q$, а значит, она имеет нетривиальные решения. Рассмотрим $(n+1)\times(n+1)$ матрицу W^l с коэффициентами

$$W_{jk}^l = g(v_k,\omega_j)\frac{g(v_k,\bar{v}_k)}{g(v_k,\bar{\omega})}\theta_1(v_k-\omega_j-S+\tau_l+\frac{1}{2}), \tag{4.12}$$

где $\bar{w}=\{w_1,...,w_{n+1}\}$ - попарно различные случайные комплексные числа и

$$S=\sum_{i=1}^{n+1}(v_i-\omega_i). \tag{4.13}$$

Матрица W^l есть ни что иное, как эллиптическая матрица Коши, умноженная справа на диагональную матрицу. Определитель эллиптической матрицы Коши дается выражением

$$\det_{1\le i,j\le n+1}\Phi(v_i-\omega_j,\lambda)=\frac{(\theta_1'(0))\theta_1\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n+1}(v_i-\omega_j)\right)}{\theta_1(\lambda)}\frac{\prod_{p<q}\theta_1(v_p-v_q)\theta_1(\omega_q-\omega_p)}{\prod_{r,s}\theta_1(v_r-\omega_s)}, \quad (4.14)$$

где Φ - функция 3.24. Из этой формулы видно, что $\det W^l\neq 0$, если все v_j и w_j попарно различны и $\tau_l+\frac{1}{2}\neq 0$, $S-\tau_l+\frac{1}{2}\neq 0$ по модулю 1 и τ. Умножая систему слева на W^l мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{n+1}[a(v_k)\frac{f(\bar v_k,v_k)}{\theta_1(x_{l-1})}E^-_{jk}\bar X_k^{l-1}+d(v_k)\frac{f(v_k,\bar v_k)}{\theta_1(x_{l+1})}E^+_{jk}\bar X_k^{l+1}-W^l_{jk}T_\nu(v_k,\bar u)\bar X^l_k]=0, \quad (4.15)$$

где

$$E^\pm_{jk}=\sum_m\frac{g(v_m,\bar v_m)}{g(v_m,\bar\omega_j)}\frac{\theta_1(v_k-v_m+x_{l\pm1})\theta_1(\pm\eta)}{\theta_1(v_k-v_m\pm\eta)}\theta_1(v_m-\omega_j-S+x_l). \quad (4.16)$$

Новая система эквивалента предыдущей, пока W^l невырождена. Сумму можно посчитать, используя вспомогательный контурный интеграл. Пусть

$$I^-=\frac{\theta_1(\eta)\theta_1'(0)}{2\pi i}\oint\frac{\theta_1(v_k-z+x_{l-1})}{\theta_1(z-v_k+\eta)}\frac{\theta_1(z-\omega_j-S+x_l)}{\theta_1(z-\omega_j)}\prod_{p=1}^{n+1}\frac{\theta_1(z-\omega_p)}{\theta_1(z-v_p)}, \quad (4.17)$$

где интегрирование идет по границе фундаментального параллелограмма. Тогда $I^-=0$ вследствие периодичности интегрируемого выражения. С другой стороны, этот интеграл может быть посчитан как сумма вычетов внутри контура. Легко заметить, что сумма вычетов в точках $z=v_m$ дает непосредственно E^-_{jk}. Еще один вклад привносит полюс в $z-v_k+\eta=0$. В итоге мы получаем

$$E^-_{jk}=\theta_1(x_l)\theta_1(v_k-\omega_j-S+x_{l-1})\frac{h(\bar\omega_j,v_k)}{h(\bar v,v_k)}. \quad (4.18)$$

Аналогично

$$E^+_{jk}=\theta_1(x_l)\theta_1(v_k-\omega_j-S+x_{l+1})\frac{h(v_k,\bar\omega_j)}{h(v_k,\bar v)}. \quad (4.19)$$

Теперь система имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+1}[a(v_k)\frac{h(\bar\omega_j,v_k)}{h(\bar v,v_k)}f(\bar v_k,v_k)\frac{\theta_1(v_k-\omega_j-S+x_{l-1})}{\theta_1(x_{l-1})}\bar X_k^{l-1}+\\ +d(v_k)\frac{h(v_k,\bar\omega_j)}{h(v_k,\bar v)}f(v_k,\bar v_k)\frac{\theta_1(v_k-\omega_j-S+x_{l+1})}{\theta_1(x_{l+1})}\bar X_k^{l+1}-\\ -\frac{g(v_k,\bar v_k)}{g(v_k,\bar\omega_j)}\frac{\theta_1(v_k-\omega_j-S+x_l)}{\theta_1(x_l)}(e^{i\pi\eta\nu}a(v_k)f(\bar u,v_k)+e^{-i\pi\eta\nu}d(v_k)f(v_k,\bar u))\bar X^l_k]=0.\end{gathered} \quad (4.20)$$

Новая система уравнений содержит набор случайных комплексных параметров $\bar\omega$. Положим $\bar\omega_{n+1}=\bar u$ и рассмотрим систему для $j=n+1$:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+1}[(-1)^n a(v_k)h(\bar u,v_k)\left(\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_{l-1})}{\theta_1(x_{l-1})}\bar X_k^{l-1}-e^{i\pi\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar X_k^l\right)+\\ +d(v_k)h(v_k,\bar u)\left(\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_{l+1})}{\theta_1(x_{l+1})}\bar X_k^{l+1}-e^{-i\pi\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar X_k^l\right)]g(v_k,\bar v_k)=0.\end{gathered} \quad (4.21)$$

Покажем, что эти уравнения линейно зависимы. Поскольку вследствие sum rule мы имеем

$$\begin{gathered}
e^{i\pi(l+2Q)\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_{l+2Q})}{\theta_1(x_{l+2Q})}\bar{X}_k^{l+2Q}= \\
=e^{i\pi l\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar{X}_k^l(e^{-2\pi i(v_k+U-V)})^{2P_2}e^{2\pi iQ\eta\nu}(e^{-2\pi in\eta}e^{-4\pi iV_k}e^{2\pi i\Xi})^{P_2}= \\
=(e^{-4\pi iU}e^{2\pi i\tau\nu}e^{-2\pi in\eta}e^{2\pi i\Xi})^{P_2}e^{i\pi l\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar{X}_k^l=e^{i\pi l\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k+U-V+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar{X}_k^l,
\end{gathered} \tag{4.22}$$

то, домножив систему для $j=n+1$ на $e^{i\pi l\eta\nu}$ и просуммировав по $\mathbb{Z}_{2Q}$, можно заметить, что левая часть пропадает. Это означает, что система имеет нетривиальные решения. Теперь перейдем к оставшейся части системы для $j<n+1$, полагая $\bar{\omega}_{n+1}=\bar{u}$, $\omega_{n+1}=\omega$:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n+1}g(v_k,\bar{v}_k)\left[A_k\left(\frac{h(\omega,v_k)}{h(u_j,v_k)}\frac{\theta_1(v_k-V+U_j+\omega+x_{l-1})}{\theta_1(x_{l-1})}\bar{X}_k^{l-1}-e^{i\pi\eta\nu}\frac{g(u_j,v_k)}{g(\omega,v_k)}\frac{\theta_1(v_k-V+U_j+\omega+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar{X}_k^l\right)\right. \\
\left.+D_k\left(\frac{h(v_k,\omega)}{h(v_k,u_j)}\frac{\theta_1(v_k-V+U_j+\omega+x_{l+1})}{\theta_1(x_{l+1})}\bar{X}_k^{l+1}-e^{-i\pi\eta\nu}\frac{g(v_k,u_j)}{g(v_k,\omega)}\frac{\theta_1(v_k-V+U_j+\omega+x_l)}{\theta_1(x_l)}\bar{X}_k^l\right)\right]=0,
\end{gathered} \tag{4.23}$$

где $A_k=(-1)^n a(v_k)h(\bar{u},v_k)$, $D_k=d(v_k)h(v_k,\bar{u})$. Положим $\omega=V-l\eta-\omega_0$, а $\omega_0=V_{n+1}+x$, домножим на $e^{i\pi l\mu\eta}$ и просуммируем, тогда мы получим следующую систему:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{n+1}g(v_k,\bar{v}_k)\left[A_k\left(\frac{\theta_1(v_k-u_j+r-\eta)}{\theta_1(v_k-u_j-\eta)}e^{i\pi\mu\eta}-e^{i\pi\nu\eta}\frac{\theta_1(v_k-u_j+r)}{\theta_1(v_k-u_j)}\right)+\right. \\
\left.+D_k\left(\frac{\theta_1(v_k-u_j+r+\eta)}{\theta_1(v_k-u_j+\eta)}e^{-i\pi\mu\eta}-e^{-i\pi\nu\eta}\frac{\theta_1(v_k-u_j+r)}{\theta_1(v_k-u_j)}\right)\right]\bar{Y}_k^{(\mu)}=0,
\end{gathered} \tag{4.24}$$

где

$$\bar{Y}_k^{(\mu)}=\sum_{l\in\mathbb{Z}_{2Q}}\frac{\theta_1(v_k-v_{n+1}+x+l\eta)}{\theta_1(x+l\eta)}e^{i\pi l\mu\eta}\bar{X}_k^l. \tag{4.25}$$

Здесь $r=U-V_{n+1}$, где V_{n+1} - корни Бете. Такое требование следует из условия периодичности, позволяющего перейти от системы с X к системе с Y:

$$\begin{gathered}
\frac{\theta_1(v_k-v_{n+1}+x+(l+2Q)\eta)}{\theta_1(x+(l+2Q)\eta)}e^{i\pi(l+2Q)\mu\eta}\bar{X}_k^{l+2Q}= \\
=e^{-2\pi i(2V_{n+1}-\tau\mu+n\eta-\Xi)P_2}\frac{\theta_1(v_k-v_{n+1}+x+l\eta)}{\theta_1(x+l\eta)}e^{i\pi l\mu\eta}\bar{X}_k^l\to \\
\to e^{-2\pi i(2V_{n+1}-\tau\mu+n\eta-\Xi)P_2}=1.
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Здесь $\Xi=\sum_{i=1}^N\xi_i$. Стоит обратить внимание, что $\bar{Y}_{n+1}^{(\mu)}=\langle\Psi_\mu(\bar{v})|\Psi_\nu(\bar{u})\rangle$, где $\bar{u}$ и $\bar{v}$ - различные корни Бете. Мы можем представить систему в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)G_k\bar{Y}_k^{(\mu)}=0, \tag{4.27}$$

где

$$G_k=\frac{g(v_k,\bar{v}_k)}{g(v_k,\bar{u})}, \tag{4.28}$$

а матрица $T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)$ равна

$$T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)=\Phi(v_k-u_i,r)\left(T_\nu(v_k,\bar{u})-T_\mu(v_k,\bar{u}_i\cup(u_i-r))\right). \tag{4.29}$$

Здесь мы использовали функцию Φ, определенную в 3.24. Другим удобным представлением матрицы $T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)$ является

$$T_{ik}^{(\nu\mu)}(r) = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(r)}\left[a(v_k)f(\bar{u},v_k)\left(e^{i\pi\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k-u_i+r)}{\theta_1(v_k-u_i)} - e^{i\pi\eta\mu}\frac{\theta_1(v_k-u_i+r-\eta)}{\theta_1(v_k-u_i-\eta)}\right)\right.$$
$$\left. +d(v_k)f(v_k,\bar{u})\left(e^{-i\pi\eta\nu}\frac{\theta_1(v_k-u_i+r)}{\theta_1(v_k-u_i)} - e^{-i\pi\eta\mu}\frac{\theta_1(v_k-u_i+r+\eta)}{\theta_1(v_k-u_i+\eta)}\right)\right]. \tag{4.30}$$

Заметим, что

$$T_{ik}^{(\nu\nu)}(0) = \frac{\partial T_\nu(v_k,\bar{u})}{\partial u_i}. \tag{4.31}$$

Покажем, что оставшиеся уравнения 4.21 изначальной системы следуют из 4.27. Действительно, делая Фурье преобразование системы 4.21, мы получаем уравнения

$$\sum_{k=1}^{n+1}(T_\nu(v_k)-T_\mu(v_k))G_k\bar{Y}_k^{(\mu)}(r=0)=0. \tag{4.32}$$

Система 4.27 должна выполняться для любого значения r, включая $r=0$ (в этом случае система вырождена, но предел решения при $r\to 0$ все еще является решением). В то же время

$$\lim_{r\to 0}\left(\theta_1(r)T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)\right) = T_\nu(v_k)-T_\mu(v_k). \tag{4.33}$$

Отсюда видно, что уравнения 4.32 удовлетворяются решениями системы 4.27.

4.4 Решение системы

Фиксируя некий $k\in\{1,...,n+1\}$ и записывая систему как

$$\sum_{j=1,\neq k}^{n+1} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)G_j\bar{Y}_j^{(\mu)} = -T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)G_k\bar{Y}_k^{(\mu)}, \tag{4.34}$$

мы можем использовать правило Крамера, чтобы записать решение в форме

$$G_m\bar{Y}_m^{(\mu)} = (-1)^{k-m}G_k\bar{Y}_k^{(\mu)}\frac{\det\limits_{j\neq m} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)}{\det\limits_{j\neq k} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)}. \tag{4.35}$$

Несложно проверить, что

$$\frac{G_k}{G_m} = (-1)^{k-m}\frac{W_n(\bar{v}_k,\bar{u})}{W_n(\bar{v}_m,\bar{u})}, \tag{4.36}$$

где

$$W_n(\bar{v}_m,\bar{u}) = \frac{\prod\limits_{a<b,\neq k}\theta_1(v_a-v_b)\prod\limits_{a'>b',\neq k}\theta_1(u_{a'}-u_{b'})}{\prod\limits_{p=1,\neq k}^{n+1}\prod\limits_{p'=1}^{n}\theta_1(v_p-u_{p'})}. \tag{4.37}$$

Тогда из 4.35 следует, что

$$\bar{Y}_k^{(\mu)}\frac{W_n(\bar{v}_k,\bar{u})}{\det\limits_{j\neq k} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)} = \bar{Y}_m^{(\mu)}\frac{W_n(\bar{v}_m,\bar{u})}{\det\limits_{j\neq m} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)} \tag{4.38}$$

для любых $k, m = 1, ..., n+1$. Левая часть не зависит от v_k, а правая не зависит от v_m. Поскольку это верно для любых k,m, обе части на самом деле не зависят от переменных $\bar{v}$ и мы заключаем что

$$\bar{Y}_k^{(\mu)} = \phi^{(\nu,\mu)}(\bar{u}, r) \frac{\det_{j\neq k} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)}{W_n(\bar{v}_k, \bar{u})}, \tag{4.39}$$

где $\phi^{(\nu,\mu)}(\bar{u}, r)$ некоторая симметричная функция переменных $\bar{u}$, а также функция μ, ν и s, t. Это решение системы 4.24.

4.5 Ортогональность on-shell Бете векторов

Покажем, что для on-shell векторов с несовпадающими $\bar{v} = \{v_1, ..., v_n\}$ и $\bar{u} = \{u_1, ..., u_n\}$ скалярное произведение $\langle \Psi_\mu(\bar{v}) | \Psi_\nu(\bar{u}) \rangle$ равняется нулю. Мы должны продемонстрировать, что матрица $T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)$ $(k \leq n+1)$ становится вырожденной, если параметры $\bar{v}$ удовлетворяют уравнениям Бете, которые мы запишем в форме

$$e^{2i\pi\eta\mu} \frac{a(v_j)}{d(v_j)} = (-1)^{n-1} \frac{h(v_j, \bar{v})}{h(\bar{v}, v_j)}. \tag{4.40}$$

Мы собираемся показать, что строки матрицы $T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)$ линейно зависимы. Положим

$$x_j = \frac{g(u_j, \bar{u}_j)}{g(u_j, \bar{v})}. \tag{4.41}$$

Заметим, что если $\bar{v}$ и $\bar{u}$ не совпадает, то существует хотя бы один ненулевой x_j. Рассмотрим линейную комбинацию

$$X = \sum_i x_i T_{ik}^{(\nu\mu)}(r) = a(v_k) f(\bar{u}, v_k) E^+ + d(v_k) f(v_k, \bar{u}) E^-, \tag{4.42}$$

где

$$E^\pm = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(r)} \sum_i x_i \left(e^{\pm i\pi\mu\eta} \frac{\theta_1(v_k - u_i + r \mp \eta)}{\theta_1(v_k - u_i \mp \eta)} - e^{\pm i\pi\nu\eta} \frac{\theta_1(v_k - u_i + r)}{\theta_1(v_k - u_i)} \right). \tag{4.43}$$

Чтобы посчитать $E^\pm$, рассмотрим вспомогательный контурный интеграл

$$I^\pm = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_1(r)} \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(e^{\pm i\pi\mu\eta} \frac{\theta_1(v_k - z + r \mp \eta)}{\theta_1(v_k - z \mp \eta)} - e^{\pm i\pi\nu\eta} \frac{\theta_1(v_k - z + r)}{\theta_1(v_k - z)} \right) \prod_{a=1}^n \frac{\theta_1(z - v_a)}{\theta_1(z - u_a)}. \tag{4.44}$$

Интеграл берется по границе фундаментального параллелограмма. Поскольку $r = U - V$, легко увидеть что интегрируемое выражение периодично с периодами $1, \tau$. Следственно, $I^\pm = 0$. С другой стороны, интеграл может быть посчитан как сумма вычетов внутри фундаментального параллелограмма. Сумма вычетов в полюсах $z = u_j$ дает $E^\pm / \theta_1'(0)$. Еще один вклад вносит простой полюс в $z = v_k \mp \eta$. В итоге мы приходим к

$$E^\pm = -e^{\pm i\pi\mu\eta} \theta_1'(0) \prod_{a=1}^n \frac{\theta_1(v_k - v_a \mp \eta)}{\theta_1(v_k - u_a \mp \eta)} \tag{4.45}$$

или

$$E^+ = -e^{i\pi\mu\eta} \theta_1'(0) \frac{h(\bar{v}, v_k)}{h(\bar{u}, v_k)}, \qquad E^+ = -e^{-i\pi\mu\eta} \theta_1'(0) \frac{h(v_k, \bar{v})}{h(v_k, \bar{u})}. \tag{4.46}$$

Подставляя это в 4.42, мы получаем

$$X = -\theta_1'(0) g(\bar{u}, v_k) (a(v_k) h(\bar{v}, v_k) e^{i\pi\mu\eta} - (-1)^{n-1} d(v_k) h(v_k, \bar{v}) e^{-i\pi\mu\eta}), \tag{4.47}$$

а это выражение равно 0 вследствие уравнений Бете 4.40. Следовательно, строки матрицы $T_{ik}^{(\nu\mu)}(r)$ линейно зависимы и $\det T_{ik}^{(\nu\mu)}(r) = 0$, значит Бете вектора, зависящие от несовпадающих наборов $\bar{v}$ и $\bar{u}$ ортогональны.

5 Заключение

Мы получили ответ для скалярного произведения двух on-shell Бете векторов в случае неоднородной 8-вершинной модели для параметра анизотропии η, равного $\frac{2P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q}\tau$, где P_1, P_2, Q – целые числа, в виде

$$\langle \Psi_\mu(\bar{v}) | \Psi_\nu(\bar{u}) \rangle = \phi^{(\nu,\mu)}(\bar{u}, r) \frac{\det\limits_{n\times n} T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)}{W_n(\bar{v}, \bar{u})} \tag{5.1}$$

Выражение содержит определитель матрицы $T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)$ и некую случайную функцию $\phi^{(\nu,\mu)}(\bar{u}, r)$. Стоит отметить, что матрица $T_{ij}^{(\nu\mu)}(r)$ совпадает с таковой для случая $\eta = \frac{2P}{Q}$ ([1]) и для 6-вершинной модели ([9]). В вычислениях использовался метод, предложенный в [1], однако, поскольку в случае параметра анизотропии, зависящего от τ, свойства всех функций при сдвигах усложняются, составлять систему уравнений необходимо было другим путем. Итоговая система для on-shell Бете векторов не обладает случайным параметром, позволяющим в какой-то мере избавиться от неоднозначности скалярного произведения. Вероятно, исследование свойств при сдвигах по s, t и $\bar{u}$ позволит сделать необходимые выводы для достаточного определения, например, нормализованного скалярного произведения. Однако, даже с учетом возникших сложностей, возможным оказалось доказательство ортогональности on-shell Бете векторов для двух различных наборов переменных.

Список литературы

[1] N Slavnov, A Zabrodin, A Zotov, Scalar products of Bethe vectors in the 8-vertex model - Journal of High Energy Physics, 2020 - Springer

[2] B. Sutherland, Two-dimensional hydrogen bonded crystals without the ice rule, J. Math. Phys. 11 (1970) 3183–3186.

[3] Lavis D.A., Bell G.M. (1999) The Eight-Vertex Model. In: Statistical Mechanics of Lattice Systems. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg.

[4] R. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 832- 833.

[5] W. Heisenberg, Zur Theorie des Ferromagnetismus, Zeitschrift für Physik, 49 (1928) 619–636.

[6] S. Belliard and N. Slavnov, Why scalar products in the algebraic Bethe ansatz have determinant representation, J. High Energy Phys. 10 (2019) 103, arXiv:1908.00032.

[7] S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta vocabulary I, Journal of Geometry and Physics 94 (2015) 19–31, arXiv:1502.04603.

[8] L. Takhtajan and L. Faddeev, The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XY Z model, Russ. Math. Surveys 34 (1979), no. 5 11-68.

[9] N.A. Slavnov, Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic Bethe Ansatz, Theor. Math. Phys. 79 (1989) 502-508.