

Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)"

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Исследование фазового перехода
конфайнмент-деконфайнмент в $SU(3)$ глюодинамике**
Выпускная квалификационная работа
(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Студент:

Кузнецов Денис Денисович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Брагута Виктор Валериевич

Москва, 2021

Содержание

1	Введение	2
2	Теоретическая постановка	5
2.1	Термодинамический ансамбль для вращающейся системы	5
2.2	Решеточная постановка задачи	6
2.3	Граничные условия	7
2.4	Определение критической температуры	8
3	Результаты	12
3.1	Открытые граничные условия	12
3.2	Периодические граничные условия	17
3.3	Граничные условия Дирихле	20
4	Обсуждение результатов и заключение	23
A	Анализ эффектов конечного объема для открытых граничных условий и граничных условий Дирихле	25
A.1	Открытые граничные условия	25
A.2	Граничные условия Дирихле	25
B	Конфигурации решеток, использованных в работе	26
C	Переход от большого канонического ансамбля к Евклидову интегралу по по путям для случая вращающейся системы	28

1 Введение

В настоящее время исследование влияния экстремальных внешних условий на фазовую диаграмму и наблюдаемые в квантовой хромодинамике (КХД) является чрезвычайно актуальной и активно изучаемой областью, как с помощью теоретических и численных подходов, так и на эксперименте. Под экстремальными внешними условиями обычно понимают высокую температуру, сильные магнитные поля, большую барионную и киральную плотность. Релятивистское вращение является одним из частных случаев экстремальных условий, и, в отличие от перечисленных, выше примеров рассмотрение эффектов, вызываемых вращением, - достаточно молодая область деятельности. Данная работа как раз посвящена рассмотрению влияния ненулевой угловой скорости на свойства термодинамической системы.

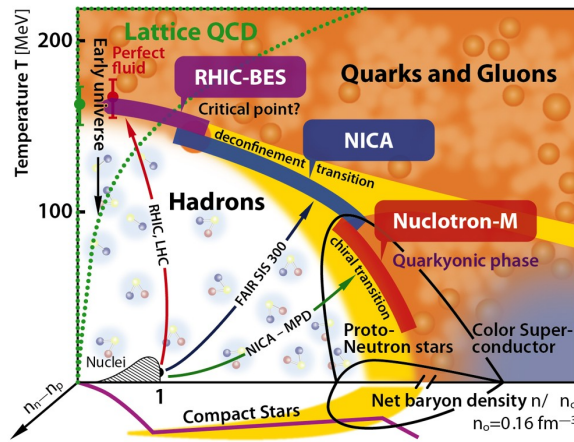


Рис. 1: Фазовая диаграмма КХД и области значений параметров μ_B, T , которые будут исследованы в грядущих экспериментах на ускорителях

В качестве примера систем, для которых характерно образование большого углового момента, можно привести эксперименты по соударению тяжелых ионов на ускорителях. Так как соударения в большинстве случаев являются существенно нецентральными, образуется кварк-глюонная плазма с угловым моментом $10^3 - 10^5 \hbar$, и угловая скорость вращения может достигать порядка 10 МэВ. Другим важным примером быстро вращающейся системы являются ядра компактных звезд.

Вращение вызывает ряд интересных явлений, которые можно наблюдать на эксперименте. Среди наиболее значимых приведем киральный вихревой эффект [1–4] - возникновение аксиального тока в системе с фермионами, и поляризацию частиц вдоль углового момента (эксперимент *STAR* [5]).

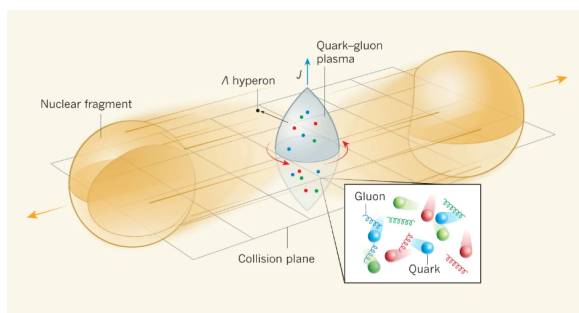


Рис. 2: Формирование кварк глюонной плазмы с большим угловым моментом при нецентральной соударении тяжелых ионов [5]

Влияние вращения на фазовый переход в КХД рассматривалось в ряде теоретических работ (в частности, в [6–13]). В основном данные исследования проведены в рамках модели Намбу-Йона-Лазиньо (NJL) [14, 15] и в качестве объекта изучения выступает влияние вращения на нарушение/восстановление киральной симметрии в КХД. Результаты этих работ, несмотря на различие в некоторых технических деталях и постановке, приходят к одному выводу - вращение подавляет киральный конденсат, что приводит к понижению критической температуры с увеличением угловой скорости. Вероятное объяснение данного эффекта было предложено в работе [8]: вращение стремится направить угловые моменты отдельных частиц вдоль суммарного углового момента. Таким образом, образование состояний с ненулевым угловым моментом становится более выгодным энергетически, чем с нулевым, в связи с чем скалярный конденсат подавляется.

Серьезным недостатком с точки зрения релевантности по отношению к настоящей КХД результатов полученных для NJL, является тот факт, что NJL описывает лишь кварковые степени свободы, в то время как глюонные степени свободы, за счет которых и возникает конфайнмент, напрямую не входят в действие теории, а возникают косвенно, после интегрирования по калибровочным полям. Поэтому в рамках этих подходов затруднительно исследовать фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент. Глюоны являются частицами со спином 1, и можно предполагать, что при наличии вращения у глюонов возникнет поляризация и данное свойство может оказать существенное влияние на фазовую диаграмму. Но для того, чтобы оценить и измерить эффекты релятивистского вращения на КХД требуется подход/модель, включающие в себя как кварковые, так и глюонные степени свободы. В недавних работах [12, 16] были проведены исследования эффектов, вносимых вращением, для голографических моделей. Кроме того, зависимость критической температуры изучалась в работе [11] для компактной КЭД в $2 + 1$ измерениях, для которой существует фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент, и в работе [13] для низко-энергетической модели адронного резонансного газа. Согласно результатам, полученным в этих исследованиях, температура фазового перехода понижается с увеличением угловой скорости вращения.

Тем не менее, упомянутые методы могут давать хорошее описание только в ограниченной области параметров, и во многих случаях сложно определить, насколько полученный результат согласуется с тем, что происходит на самом деле в глюодинамике и КХД. На данный момент наиболее надежным и зарекомендовавшим себя подходом к изучению сильно-взаимодействующих систем является метод численного моделирования на решетке.

В центре внимания настоящей работы исследование влияния вращения на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в $SU(3)$ глюодинамике (калибровочной

теории Янга-Миллса без фермионов). Впервые исследование вращающейся КХД было проведено в работе [17], но без изучения влияния вращения на фазовую диаграмму КХД. В данной диссертации мы воспользуемся решеточной формулировкой задачи, предложенной в [17], с модификациями, о которых будет сказано ниже. Результаты изучения влияния вращения на фазовый переход в глюодинамике также представлены в следующих работах [18], [19].

Структура работы следующая:

- В разделе 2 приведена решеточная постановка задачи изучения глюодинамики при ненулевой угловой скорости и определены все виды граничных условий, использованных в работе.
- В разделе 3 представлены результаты численного моделирования для каждого из граничных условий.
- В заключении 4 обсуждаются полученные результаты.
- В приложении А представлен анализ эффектов конечного объема и шага дискретизации для открытых граничных условий и граничных условий Дирихле. В приложении В приведена сводная таблица решеточных конфигураций, использованных для измерения наблюдаемых. В приложении С показан переход от канонического ансамбля для вращающейся системы к Евклидовому функциональному интегралу.

2 Теоретическая постановка

2.1 Термодинамический ансамбль для вращающейся системы

Для того, чтобы проводить изучение вращающейся системы, следуя работам [6–10, 17], мы переходим во вращающуюся систему отсчета. Рассмотрение в лабораторной системе отсчета является нестационарной задачей на данный момент не разработан общий подход для моделирования динамических задач методами решеточной КХД. Пусть система вращается вокруг оси z . Вращающаяся система отсчета является неинерциальной, поэтому при переходе в нее возникает гравитационное поле. Метрический тензор задается следующим выражением:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - r^2\Omega^2 & \Omega y & -\Omega x & 0 \\ \Omega y & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от данной точки до оси вращения. Заметим, что метрический тензор не зависит от времени.

Рассмотрение системы с сохраняющейся энергией и угловым моментом является частным случаем более общего понятия - *большого канонического ансамбля*. Пусть в рассматриваемой системе сохраняется энергия и еще некоторый набор зарядов Q_i , с соответствующими им химическими потенциалами μ_i . В силу сохранения зарядов - соответствующие им операторы коммутируют с Гамильтонианом. Тогда статсумма записывается в следующем виде:

$$\mathcal{Z} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{Q}^i)}, \quad (2.2)$$

в качестве пар (заряд, химпотенциал) могут выступать барионная плотность N_B и барионный химпотенциал μ_B и, в интересующем нас случае, угловой момент J и скорость Ω .

Обратим внимание на следующий важный момент. Определив $T(r) = 1/\beta\sqrt{g_{00}}$, перепишем статсумму в следующем виде:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} \exp \left[- \int dV \frac{\hat{\epsilon}(r)}{T(r)} \right]. \quad (2.3)$$

Эффективная температура $T(r)$ при наличии гравитационного поля является не постоянной, а функцией от положения в пространстве - $T(r)\sqrt{g_{00}} = 1/\beta = \text{const}$. Последнее выражение известно в литературе как *Эффект Толмана-Эренфеста* [20], согласно которому температура в термодинамическом равновесии зависит от точки. Для случая вращения $T(r)\sqrt{1 - \Omega^2 r^2} = 1/\beta = T(r = 0)$. Поэтому, в некотором смысле, можно сказать, что вращение разогревает систему $T(r) > T(r = 0)$. В дальнейшем под температурой системы мы будем понимать температуру на оси вращения $T(r = 0) = 1/\beta$ и обозначать T .

Статсумма для Глюодинамики в гравитационном поле записывается в следующем виде:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_G[A_\mu, g]}. \quad (2.4)$$

где Евклидово действие определено следующим выражением [17]:

$$S_G = \frac{1}{4g^2} \int d^4x \sqrt{g_E} g_E^{\mu\nu} g_E^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a. \quad (2.5)$$

Евклидов метрический тензор $(g_E)_{\mu\nu}$ в последнем выражении (2.1) получается из исходного поворотом Вика $t \rightarrow i\tau$. Интегрирование проводится по всему пространству времени, где мнимое время принимает значения на отрезке $\tau \in (0, \beta)$ а глюонные степени свободы удовлетворяют периодическим граничным условиям $A_\mu(0, \mathbf{x}) = A_\mu(\beta, \mathbf{x})$ во временном направлении.

Подставим метрический тензор $(g_E)_{\mu\nu}$ в выражение 2.5:

$$S_G = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \left[(1-r^2\Omega^2)F_{xy}^a F_{xy}^a + (1-y^2\Omega^2)F_{xz}^a F_{xz}^a + (1-x^2\Omega^2)F_{yz}^a F_{yz}^a + F_{x\tau}^a F_{x\tau}^a + F_{y\tau}^a F_{y\tau}^a + F_{z\tau}^a F_{z\tau}^a - 2iy\Omega(F_{xy}^a F_{y\tau}^a + F_{xz}^a F_{z\tau}^a) + 2ix\Omega(F_{yx}^a F_{x\tau}^a + F_{yz}^a F_{z\tau}^a) - 2xy\Omega^2 F_{xz}^a F_{zy}^a \right]. \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что действие не является действительным. На практике данное обстоятельство делает численное моделирование на решетке невозможным, в связи с тем, что показатель экспоненты имеет осциллирующее, а не экспоненциально спадающее поведение при удалении от седловых точек. Это проявление так называемой *проблемы знака*. В настоящий момент не существует эффективного и универсального решения данной проблемы. Чтобы обойти данную проблему, мы в дальнейшем будем проводить исследование с мнимой угловой скоростью $\Omega_I = -i\Omega$ вместо действительной Ω . Предполагая аналитическое поведение статсуммы и связанных с ней наблюдаемых в окрестности $\Omega_I = 0$ мы будем проводить разложение по Ω_I , как по малому параметру в ряд, и затем результаты для действительной угловой скорости будут получены через аналитическое продолжение. Отметим, что вышеописанный подход успешно применяется для решения проблемы знака в КХД с ненулевым барионным химпотенциалом.

2.2 Решеточная постановка задачи

Для того, чтобы проводить исследование на решетке, необходимо дискретизовать действие (2.6). В настоящей работе мы будем использовать действие, предложенное в [17]:

$$S_G = \frac{2N_c}{g^2} \sum_x \left((1+r^2\Omega_I^2) \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } \bar{U}_{xy}\right) + (1+y^2\Omega_I^2) \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } \bar{U}_{xz}\right) + (1+x^2\Omega_I^2) \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } \bar{U}_{yz}\right) + 3 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } (\bar{U}_{x\tau} + \bar{U}_{y\tau} + \bar{U}_{z\tau}) - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } (y\Omega_I(\bar{V}_{xy\tau} + \bar{V}_{xz\tau}) - x\Omega_I(\bar{V}_{yx\tau} + \bar{V}_{yz\tau}) + xy\Omega_I^2 \bar{V}_{xzy}) \right), \quad (2.7)$$

где $\bar{U}_{\mu\nu}$ обозначает clover-type (клеверообразное) среднее по четырем плакетам. Для системы в плоском пространстве запись действия через плакеты и клеверообразное среднее эквивалента. Но для случая пространственно-неоднородной метрики данная модификация позволяет уменьшить ошибки дискретизации и задает локальное выражения для тензора напряженности $F_{\mu\nu}$.

Чтобы реализовать $F_{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$ на решетке мы используем антисимметричные средние $\bar{V}_{\mu\nu\rho}$ от 8 "стульев" (см Рис. 4). Данную процедуру можно понять исходя из следующих соображений: $F_{\mu\nu}(F_{\nu\rho})$ в действии соответствует некоторый цикл в $\mu\nu$ ($\nu\rho$) плоскости, соответственно. Стул - простейший калибровочно инвариантный объект на решетке, лежащий в $\mu\nu$ и $\nu\rho$ плоскостях одновременно. "Стул" составлен из 6 ребер, любой другой цикл будет состоять не менее чем из 8-ми.

$$\bar{U}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} \\ \mu \\ \nu \end{array} \right\}$$

Рис. 3: Клеверообразное среднее по 4 плакетам.

$$\bar{V}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8} \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \rho \\ \nu \\ \mu \end{array} \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} \rho \\ \nu \\ \mu \end{array} \end{array} \right\}$$

Рис. 4: Антисимметричное среднее по 8 "стульям".

Так как у нас имеются два выделенных направления на решетке - временное и вдоль оси вращения, то мы будем рассматривать решетки следующего вида: $N_t \times N_z \times N_x \times N_y = N_t \times N_z \times N_s^2$ ($N_s = N_x = N_y$). А именно, размеры системы в пространственных направлениях, перпендикулярных оси вращения z , одинаковы, но могут отличаться от размеров во временном направлении и вдоль оси вращения. Ось вращения z проходит через середину xy -плоскости. Для всех решеток угловая скорость и размер удовлетворяют условию причинности: $(\Omega N_s a / \sqrt{2} < 1)$. В большинстве случаев справедливо даже более сильное условие $\Omega N_s a \ll 1$.

2.3 Граничные условия

В связи с необходимостью соблюдать принцип причинности $\Omega r \geq 1$ возможна постановка настоящей задачи только в ограниченной в направлениях x, y системе. Поэтому необходимо аккуратно определить граничные условия. В термодинамическом пределе в большинстве случаев граничные эффекты будут подавлены по сравнению с объемом, но так как любая задача на решетке проводится в конечной системе - граничные артефакты могут оказывать существенное влияние на полученный результат. Для того, чтобы оценить эффект граничных условий мы провели измерения с различными видами граничных условий.

Для калибровочного поля мы накладываем во всех случаях периодические граничные условия вдоль осей τ, z , так как трансляционная инвариантность по направлению оси вращения остается ненарушенной. Для направлений x, y были рассмотрены следующие граничные условия:

1. *Открытые граничные условия (о.г.у)*. Для данного вида граничных условий в действие (2.7) входят только плакеты и стулья, которые лежат целиком внутри рассматриваемой решетки. Иначе говоря, те циклы, которые частично или

целиком лежат вне решетки обращаются в нуль. Дополнительных ограничений на линки на границе не накладываемся. Такой вид граничных условий был применен в работах [21, 22], но из других соображений - для преодоления топологического "замерзания" системы при переходе к непрерывному пределу.¹

Отметим, что о.г.у не нарушают \mathbb{Z}_3 симметрию относительно центра калибровочной группы и согласуются с полем скоростей вращающегося системы. Поэтому, данные граничные условия можно считать в некотором смысле наиболее физическими.

Зануление плакетов и ступней вне исследуемой системы можно интерпретировать, как наличие внешнего окружения с нулевой температурой. Поле Янга-Миллса принимает фиксированное значение на границе, удовлетворяющее классическим уравнениям движения.

2. *Периодические граничные условия (п.г.у)*. Данный вид граничных условий наиболее широко распространен в задачах решеточного моделирования, так как в большинстве случаев исследуются пространственно однородные и изотропные системы. Но при наличии вращения трансляционная симметрия в направлениях x и y нарушается явно, и поле скоростей не периодически. В то же время, такой вид граничных условий не нарушает \mathbb{Z}_3 симметрии.
3. *Граничные условия Дирихле (д.г.у)*. В данном случае, все линки на границе фиксируются единичной матрицей : $U_\mu(x) = 1$.² Выходящие из объема линки не входят в решеточное действие. Граничные условия Дирихле были использованы в работе [17] для изучения вращающейся КХД. В непрерывном пределе д.г.у соответствуют наложению нулевых граничных условий на калибровочное поле:

$$A_\mu(\vec{x}, \tau)|_{x=\pm R/2} = 0, \quad \mu = 0, 2, 3, \quad (2.8a)$$

$$A_\mu(\vec{x}, \tau)|_{y=\pm R/2} = 0, \quad \mu = 0, 1, 3, \quad (2.8b)$$

где R - размер решетки в направлениях x и y .

2.4 Определение критической температуры

В центре внимания настоящей работы изучение влияния релятивистского вращения на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в глюодинамике. В качестве параметра порядка для теории Янга-Миллса обычно выступает *петля Полякова*. Решеточная дискретизация выражения для Петли Полякова имеет следующий вид:

$$L(\vec{x}) = \text{Tr} \left[\prod_{\tau=0}^{N_t-1} U_4(\vec{x}, \tau) \right], \quad (2.9)$$

где $U_4(\vec{x}, \tau)$ - это линк (калибровочное поле, сидящее на ребре решетки) во временном направлении.

¹В работах [21–23] плакеты, выходящие из объема решетки входят в действие с весом $1/2$. Мы проводили сравнение между нашей постановкой граничных условий, и предложенной в этих работах и не обнаружили заметных различий в значениях наблюдаемых.

²Можно зафиксировать граничные линки любым элементом из \mathbb{Z}^3 . Но в связи с тем, что все выборы физически эквиваленты, мы берем единичный элемент из центра калибровочной группы как наиболее естественный.

Для невращающейся глюодинамики петля Полякова является параметром порядка. Фазе конфайнмента отвечает ненарушенная \mathbb{Z}_3 симметрия, следовательно в силу:

$$\langle L \rangle = e^{2\pi i/3} \langle L \rangle = e^{-2\pi i/3} \langle L \rangle = 0 \quad (2.10)$$

среднее значение петли Полякова равно 0. В фазе деконфайнмента \mathbb{Z}_3 симметрия нарушается и $\langle L \rangle \neq 0$.

Приведенные выше рассуждения справедливы и для вращающейся системы. Действие (2.7) инвариантно относительно \mathbb{Z}_3 симметрии - следовательно петля Полякова точно так же является параметром порядка.

В дальнейшем фазу, в которой находится система, мы будем определять в зависимости от значения петли Полякова. В связи с пространственной неоднородностью задачи, мы будем различать *локальную петлю Полякова*, определенную на прямой $x, y = \text{const}$, и усредненной по всему пространству

$$L = \frac{1}{N_s^2 N_z} \sum_{\vec{x}} L(\vec{x}), \quad (2.11)$$

В окрестности фазового перехода восприимчивость петли Полякова

$$\chi = N_s^2 N_z (\langle |L|^2 \rangle - \langle |L| \rangle^2), \quad (2.12)$$

имеет резкий пик. Значение критической температуры удобно определять по положению пика критической температуры.

$$\chi(T) = A + B \exp\left(-\frac{(T - T_c)^2}{2\delta T^2}\right). \quad (2.13)$$

Можно было бы подумать, что из-за сильной зависимости предъявленных ниже результатов от выбора граничных условий и пространственной неоднородности задачи, петлю Полякова и соответствующую ей восприимчивость не следует считать параметрами порядка. Тем не менее, мы убеждены что данные наблюдаемые являются критериями перехода конфайнмент/деконфайнмент в силу следующих причин:

- Открытые граничные условия явно нарушают трансляционную симметрию даже при нулевой угловой скорости. Тем не менее, так как о.г.у сохраняют \mathbb{Z}_3 симметрию, в фазе конфайнмента петля Полякова обращается в 0 во всем объеме. В фазе деконфайнмента петля Полякова принимает ненулевое значение в точках, не лежащих на границе. Таки образом, усредненная по пространству петля Полякова (2.11) и ее восприимчивость (2.12) могут быть использованы для определения критической температуры. В приложении будет показано, что в пределе бесконечного объема критическая температура для периодических и открытых граничных условий стремятся к одному и тому же значению.
- Граничные условия Дирихле (д.г.у), подобно о.г.у, нарушают трансляционную симметрию. Кроме того, в отличие от п.г.у и о.г.у, данные граничные условия нарушают \mathbb{Z}_3 даже при нулевой температуре. На границе решетки зафиксировано значение петли Полякова $L(\vec{x}) = 3$, следовательно в центре калибровочной группы есть выделенное направление вдоль оси $\arg z = 0$, т.е образованное элементами пропорциональными единичной матрице. Поэтому петля Полякова, предположительно, уже не является точным параметром порядка, и вместо истинного фазового перехода 1-го рода происходит кроссовер. Тем не менее, как и для упомянутых выше граничных условий можно определить критическую

температур как пик восприимчивости петли Полякова (2.12). При отсутствии вращения в пределе бесконечно большого объема и размеров системы в направлениях x, y граничные эффекты становятся пренебрежимо малыми и, следовательно, переход конфайнмент/деконфайнмент должен восстанавливаться. Однако, при наличии вращения нельзя перейти к пределу $N_s \rightarrow \infty$. Переход конфайнмент/деконфайнмент остается кроссовером даже в пределе бесконечного размера системы вдоль оси вращения $N_z \rightarrow \infty$.

- При ненулевой угловой скорости петля Полякова зависит от расстояния до оси вращения. В фазе конфайнмента для периодических и открытых граничных условий петля Полякова всюду обращается в ноль, так как \mathbb{Z}_3 симметрия не нарушена. В фазе деконфайнмента петля Полякова принимает ненулевое значение, зависящее от положения в пространстве. Таким образом, усредненная по объему петля Полякова (2.11) и ее восприимчивость (2.12) позволяют определить критическую температуру даже для вращающейся системы. Для граничных условий Дирихле петлю Полякова можно считать параметром порядка с некоторой условностью, но тем не менее по положению пика восприимчивости можно определить псевдокритическую температуру аналогично п.г.у и о.г.у.
- В настоящей работе все измерения приведены при мнимой угловой скорости и результаты для действительной угловой скорости получаются методом аналитического продолжения. Отметим, что метод аналитического продолжения является надежным и активно используемым приемом в задачах решеточного моделирования, например, в задачах с ненулевым химическим потенциалом и внешним электрическим полем. При рассмотрении системы конечного объема, функциональный интеграл является по существу интегрированием по произведению $\prod_{i=1}^{N_s^3 \times N_t} G$ компактных многообразий, отвечающих калибровочной группе $G = SU(3)$. Поэтому все наблюдаемые, петля Полякова, восприимчивость и другие производные величины от термодинамических потенциалов являются аналитическими функциями от угловой скорости Ω . В пределе бесконечного объема $N_z \rightarrow \infty$ можно было бы предполагать, что у перечисленные наблюдаемых могут возникнуть особенности, в силу которых невозможно будет провести процедуру аналитического продолжения. Тем не менее, аналитическое продолжение остается справедливым для критической температуры. В пределе бесконечного объема фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент становится переходом 1-го рода для периодических и открытых граничных условий. Критическая температура в конечном объеме стремится к температуре в пределе бесконечного объема по следующему закону [24]:

$$T(V) - T(\infty) \sim 1/V \quad (2.14)$$

Поэтому возможно провести аналитическое продолжение при конечном объеме, а затем перейти в предел бесконечного объема без необходимости анализировать сингулярности термодинамических потенциалов на комплексной плоскости Ω . Для граничных условий Дирихле в связи с тем, что при любых размерах системы N_z вдоль оси вращения z переход является кроссовером, термодинамические потенциалы не имеют особенностей и процедура аналитического продолжения полностью оправдана.

Отметим, что для всех рассмотренных в работе граничных условий полученное значение критической температуры $T_c(\Omega_I)$ содержит зависимость от эффектов гра-

ничного объема, зависящих от размера изучаемой системы N_s . Для того, чтобы нивелировать значение эффектор конечного объема и выделить непосредственно зависимость от угловой скорости мы будем строить отношение $T(\Omega_I)/T_c(0)$. Подробное описание параметров моделирования для каждого из рассмотренных граничных условий приведено в приложении.

3 Результаты

3.1 Открытые граничные условия

Из всех вышеупомянутых граничных условий открытые выглядят наиболее близкими к тому, что может быть реализовано в реальной физической системе. Поэтому результаты, полученные для этих граничных условий, представляют наибольший интерес.

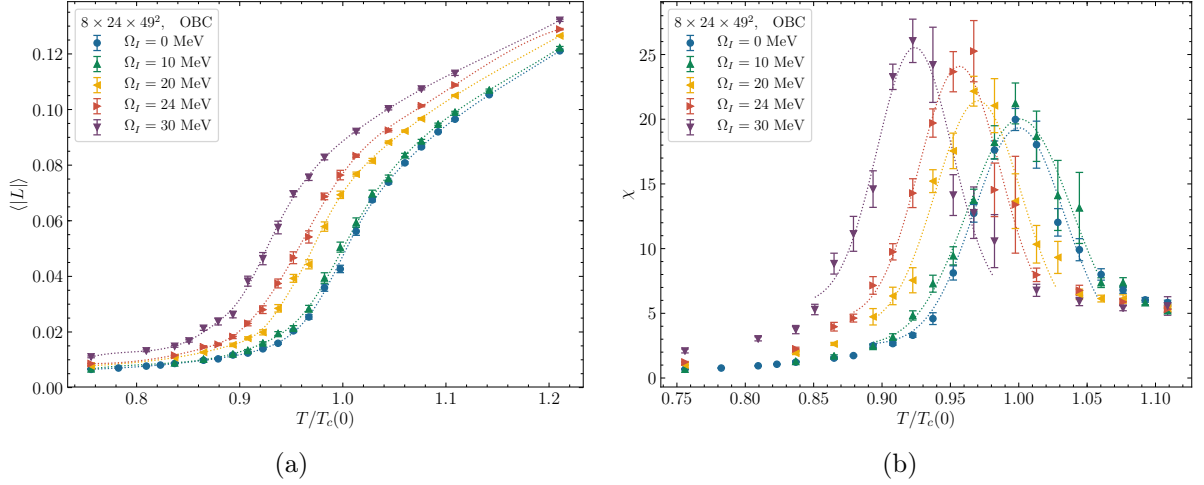


Рис. 5: Зависимость петли Полякова (а) и ее восприимчивости (б) от температуры для различных значений угловой скорости Ω_I . Представленные результаты получены на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ с о.г.у. Кривые, соответствующие приближению петли Полякова арктангенсом (а) нарисованы для большей наглядности. Зависимость восприимчивости петли Полякова (б) в окрестности фазового перехода неплохо описывается Гауссовой функцией (2.13).

Петля Полякова и соответствующая ей восприимчивость как функции от отношения $T/T_c(0)$ для различных значений (мнимой) угловой скорости Ω_I для фиксированной решетки $8 \times 24 \times 49^2$ показаны на Рис. 5. Данный размер решетки выбран в качестве опорной точки в связи с тем, что влияние эффектов граничного объема на значение критической температуры становится менее существенным, чем угловой скорости. Переход конфайнмент/деконфайнмент проявляется как быстрый рост значения петли Полякова с увеличением температуры и пик восприимчивости. Заметим, что согласно Рис. 5, значение критической температуры понижается с ростом (мнимой) угловой скорости Ω_I . Для определения температуры фазового перехода была использована функция Гаусса (2.13), и положение пика дает численную оценку для T_c . Погрешность χ^2/ndof аппроксимации $\sim 0.7 - 3$ для всех угловых скоростей Ω_I . Зависимость приведенной температуры $T_c(\Omega_I)/T_c(0)$ от Ω_I^2 представлена на Рис. 6(a).

В дальнейшем будет удобно ввести (мнимую) линейную скорость v_I в точках с координатами $x = \pm R/2$, $y = 0$, расположенными на границе решетки: $v_I = \Omega_I(N_s - 1)a/2$, и строить зависимость приведенной температуры $T_c(v_I)/T_c(0)$ как функции от v_I (см Рис. 6(b)).³ Чтобы оценить влияние эффектов конечного объема и систематические ошибки, на Рис. 6 предьявлены результаты для различных размеров решетки.

³С ростом температуры уменьшается шаг решетки a . Для определения v_I был использован шаг решетки при критической температуре $a = a(\beta_c)$.

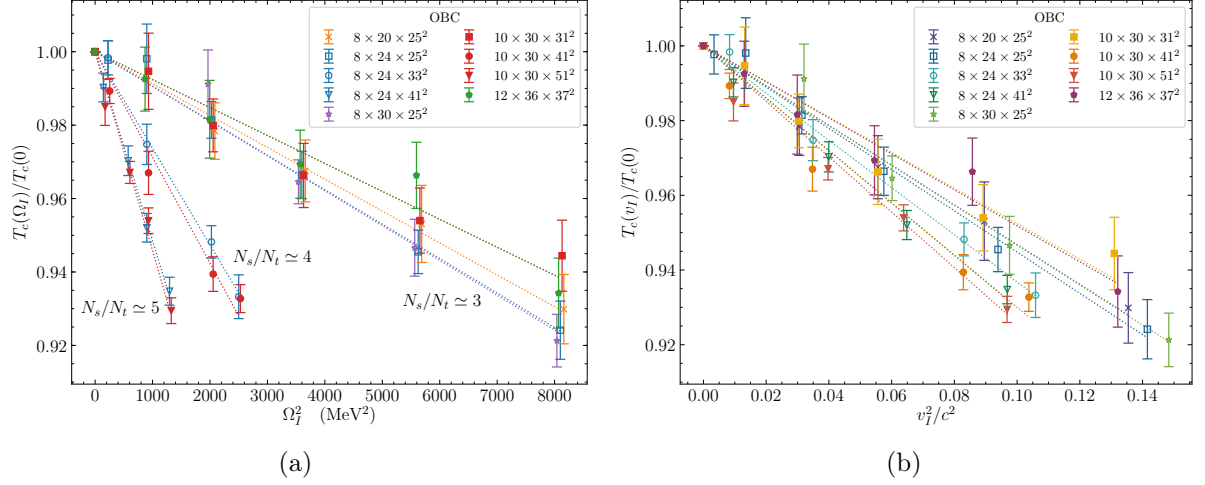


Рис. 6: Зависимость отношений $T_c/T_c(0)$, определенных по пику восприимчивости петли Полякова, от квадрата мнимой угловой скорости Ω_I^2 (a) и квадрата линейной скорости v_I^2 (b). На графиках приведены результаты для различных размеров решетки $N_t \times N_z \times N_s^2$ для о.г.у. Прямые соответствуют аппроксимации линейной функцией зависимостей $T_c(\Omega_I)/T_c(0) = 1 - C_2\Omega_I^2$ и $T_c(v_I)/T_c(0) = 1 - B_2v_I^2/c^2$

На основе результатов, представленных на Рис. 5 и Рис. 6, можно сделать следующие заключения:

- Критическая температура T_c уменьшается с ростом мнимой угловой скорости Ω_I . В исследованной области значений параметров зависимость $T_c(\Omega_I)$ от мнимой угловой скорости Ω_I может быть приближена квадратичной функцией ($\chi^2/\text{ndof} \sim 0.4 - 2$)

$$\frac{T_c(\Omega_I)}{T_c(0)} = 1 - C_2\Omega_I^2. \quad (3.1)$$

Что подтверждает исходное предположение о том, что угловые скорости, использованные в расчетах достаточно малы, чтобы зависимость то Ω_I носила аналитический характер, и разложение в ряд Тейлора по Ω_I было допустимо. После аналитического продолжения в область действительных значений угловой скорости $\Omega_I \rightarrow i\Omega$ получаем следующую зависимость температуры фазового перехода от угловой скорости Ω :

$$\frac{T_c(\Omega)}{T_c(0)} = 1 + C_2\Omega^2. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что $C_2 > 0$, следовательно: для о.г.у температура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент растет с ростом угловой скорости.

- Для определения зависимости полученных результатов от размера системы вдоль оси вращения N_z мы провели измерения на решетках размера $8 \times N_z \times 25^2$, $N_z = 20, 24, 30$. Полученные результаты согласуются друг с другом в пределах погрешности (см. Рис. 6(a)). Для того, чтобы оценить эффекты дискретизации, были проведены измерения на решетках $8 \times 24 \times 25^2$, $10 \times 30 \times 31^2$, $12 \times 30 \times 37^2$ фиксированного объема в физических единицах. Обратим внимание, что согласно Fig. 6(a), отношение $T_c(\Omega_I)/T_c(0)$ практически не зависит от шага решетки a . Далее рассмотрим зависимость результатов от размера N_s в перпендикулярных к оси вращения направлениях. Для этого зафиксируем значения N_t и N_z и будем изменять параметр N_s . Из Рис. 6(a) видно, что коэффициент

наклона прямой зависит от N_s . Зависимость наклона прямой (значение константы C_2) от размера N_s достаточно значительная (т.е. превышает статистическую погрешность).

Данное явление можно понять следующим образом : увеличение размера решетки в направлении, перпендикулярном оси вращения, приводит к соответствующему увеличению линейной скорости на границе вращающейся решетки. Так как в выражение для метрического тензора входит именно линейная скорость $\sim r\Omega$, а действие и любые физические наблюдаемые зависят от компонент метрического тензора, то логично предположить, что T_c является функцией от некоторого безразмерного параметра $\sim r\Omega$, имеющего смысл линейной скорости, а не напрямую от (мнимой) угловой скорости. Для того, чтобы проверить данную гипотезу на Рис. 6(b) мы построили зависимость $T(v_I)/T_c(0)$ от квадрата линейной скорости на границе v_I^2 . В отличие от левого графика, где по оси абсцисс отложен квадрат (мнимой) угловой скорости, даже для различных значений N_s точки ложатся в пределах погрешности на одну и ту же прямую. Зависимость достаточно хорошо может быть приближена квадратичной функцией

$$\frac{T_c(v_I)}{T_c(0)} = 1 - B_2 \frac{v_I^2}{c^2}, \quad (3.3)$$

что в терминах действительной линейной скорости отвечает:

$$\frac{T_c(v)}{T_c(0)} = 1 + B_2 \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.4)$$

Мы определили B_2 для различных значений параметров на Рис. 7. Коэффициент пропорциональности B_2 имеют умеренную зависимость от параметров рассматриваемой решетки. Он фактически не зависит от шага решетки a и медленно растет с увеличением размера решетки N_s в x - y -направлениях. Разумно предположить, что в пределе большого количества узлов решетки N_s и достаточно малой угловой скорости в решеточных единицах эффекты, обусловленные граничными условиями, будут подавлены по отношению ко всему объему системы. Мы полагаем, что выход B_2 на плато (см Рис. 7) при увеличении N_s/N_t является как раз проявлением уменьшения граничных эффектов при рассмотрении достаточно большой системы. Таким образом, мы делаем следующий вывод : *Зависимость критической температуры от линейной скорости v на границе имеет вид (3.4), с слабой зависимостью B_2 от параметров решетки. Предельное значение, получаемое при устремлении $N_s \rightarrow \infty$, для о.г.у коэффициента $B_2 \sim 0.7$.*

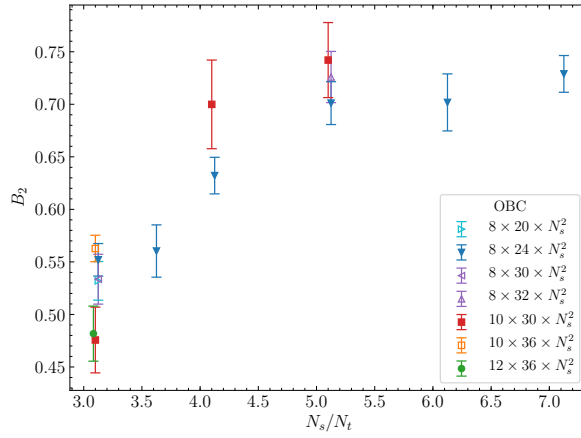


Рис. 7: Коэффициент B_2 в уравнении (3.3) как функция от отношения N_s/N_t для различных конфигураций решеток при о.г.у.

- Для о.г.у переход конфайнмент/деконфайнмент становится фазовым переходом 1-го рода только в пределе бесконечного объема. В силу необходимости соблюдать принцип причинности при фиксированном шаге решетки возможно только перейти к пределу $N_z \rightarrow \infty$ при фиксированном значении N_s . Так как полученные значения критической температуры не зависят от N_z в пределах погрешности, мы делаем заключение, что измеренные значения критической температуры близки к тем, что получаются в пределе $N_z \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что и коэффициенты C_2 и B_2 не зависят от размера N_z и принимают значения, близкие к тем, что были бы в системе бесконечного объема. Забегая вперед, заметим, что данный вывод будет справедлив для п.г.у и д.г.у (см. Разделы 3.2 и 3.3). В последнем случае переход конфайнмент/деконфайнмент остается кроссовером даже в пределе $N_z \rightarrow \infty$, но формулы (3.2), (3.4) для температуры кроссовера остаются тем не менее справедливыми. Коэффициенты C_2 и B_2 не зависят от N_z и точно так же выходят на плато при $N_z \rightarrow \infty$ (см. Раздел 3.3).
- Так как изучаемая система пространственно неоднородна кроме измерения петли Полякова, усредненной по всему объему, представляет интерес определение зависимости петли Полякова от расстояния до оси вращения. Так как граничные условия и ненулевая угловая скорость нарушают трансляционную инвариантность в x - и y - направлениях, но система остается пространственно однородной вдоль оси вращения z , мы введем петлю Полякова в плоскости x, y как среднее значение вдоль z

$$L(x, y) = \frac{1}{N_z} \sum_z L(x, y, z), \quad (3.5)$$

где $L(x, y, z) = L(\vec{x})$ определено в (2.9) и измерим среднее на достаточно большом числе решеточных конфигураций (среднее по ансамблю). На Рис. 8 показана зависимость локальной петли Полякова $|\langle L(x, y = 0) \rangle|$ как функции от координаты x для решетки $8 \times 24 \times 49^2$. Результаты, изображенные на графике, получены при следующих значениях приведенной температуры: $T/T_c(0) = 0.76$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.21$ в фазе деконфайнмента. Кроме того, чтобы сравнить величину граничных эффектов и вызванных вращением, мы провели измерения локальной петли Полякова для $\Omega_I = 0$ МэВ (Fig. 8(a)) и $\Omega_I = 24$ МэВ (Рис. 8(b)).

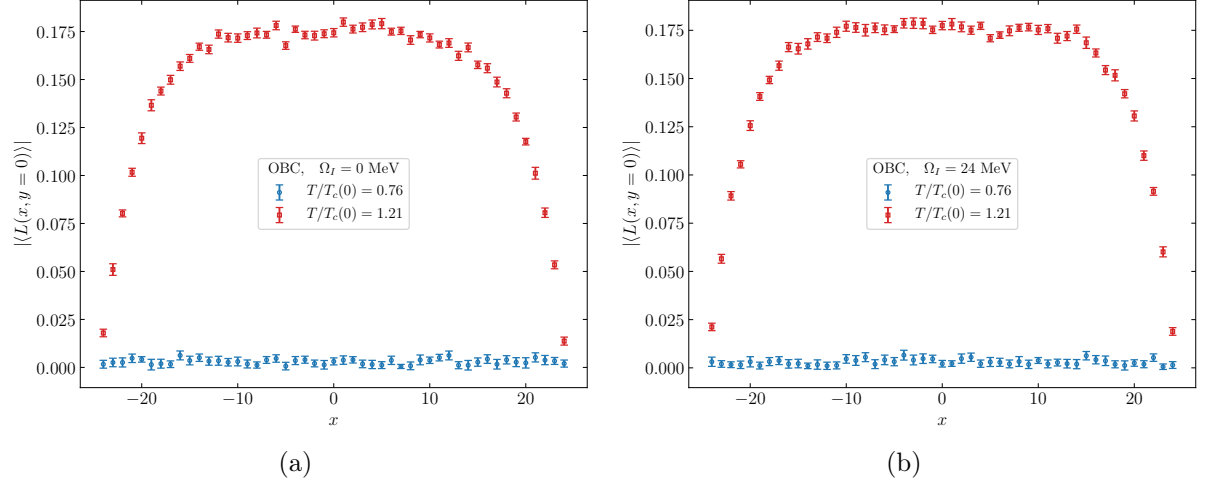


Рис. 8: Локальная петля Полякова $|\langle L(x, y = 0) \rangle|$ как функция от координаты x для о.г.у и $\Omega_I = 0$ МэВ (а), $\Omega_I = 24$ МэВ (б). Результаты были получены на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ для двух температур: $T/T_c(0) = 0.76$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.21$ в фазе деконфайнмента.

Рис. 8 дает наглядную иллюстрацию характерных свойств петли Полякова, отмеченных в Разделе 2.4. Петля Полякова $|\langle L(x, y) \rangle|$ обращается в ноль во всем объеме пространства, как в отсутствие, так и при наличии вращения. Таким образом, среднее значение петли Полякова по объему является критерием фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент для открытых граничных условий. В фазе деконфайнмента петля Полякова нетривиально зависит от положения в пространстве. В основном данная зависимость обусловлена влиянием граничных условий. При удалении от границы вглубь, в силу конечной корреляционной длины, для калибровочных полей в теории Янга-Миллса эффекты границы экранируются.

3.2 Периодические граничные условия

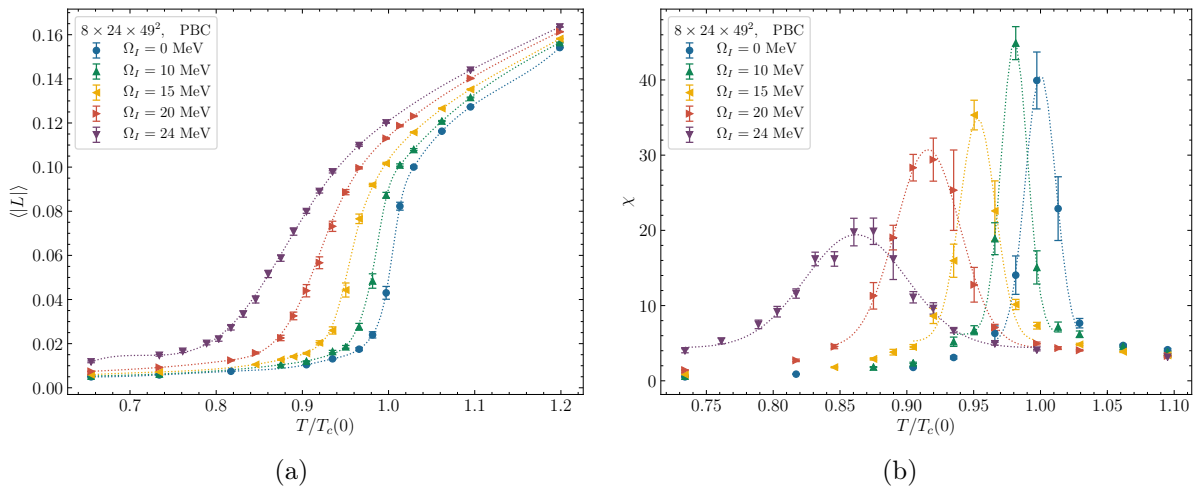


Рис. 9: Зависимость петли Полякова (a) и ее восприимчивости (b) от температуры для различных значений угловой скорости Ω_I . Представленные результаты получены на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ с п.г.у. Кривые, соответствующие приближению петли Полякова арктангенсом (a), нарисованы для большей наглядности. Зависимость восприимчивости петли Полякова (b) в окрестности фазового перехода неплохо описывается Гауссовой функцией (2.13).

В данном разделе мы представим анализ влияния вращения на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент для периодических граничных условий. Несмотря на то, что п.г.у наиболее распространены при моделировании глюодинамики и КХД на решетке, так как в большинстве случаев изучаемая система пространственно однородна, в контексте настоящей проблемы данные граничные условия могут быть неподходящими с физической точки зрения в силу озвученных выше проблем. Тем не менее целесообразно провести эксперименты для этих граничных условий для того, чтобы оценить величину граничных эффектов.

На Рис. 9 зависимость петли Полякова и ее восприимчивости от температуры от (мнимой) угловой скорости Ω_I для решетки $8 \times 24 \times 49^2$. Как и в предыдущем случае, критическая температура убывает с увеличением мнимой угловой скорости.

Критическая температура определяется через приближение гауссовой функцией в окрестности фазового перехода (2.13). На Рис. 10 показана зависимость приведенной критической температуры $T_c/T_c(0)$ от мнимой угловой скорости Ω_I (Fig. 10(a)) и соответствующей ей линейной скорости на границе v_I (Рис. 10(b)) для различных конфигураций решеток.

Таким образом, влияние вращения на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент для периодических граничных условий примерно такое же, как и для открытых. Отметим следующие характерные особенности:

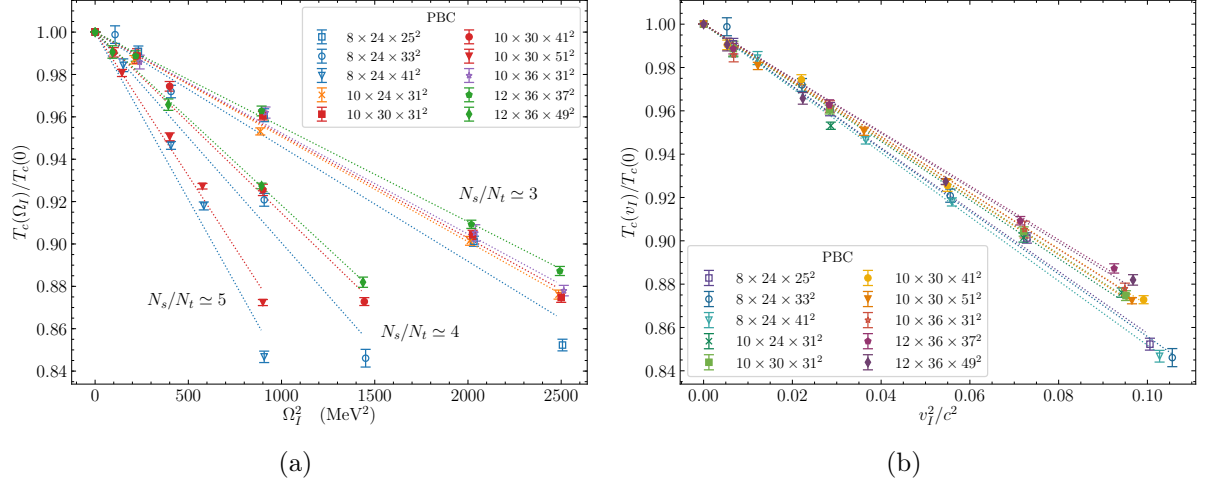


Рис. 10: Зависимость отношений $T_c/T_c(0)$, определенных по пику восприимчивости петли Полякова, от квадрата мнимой угловой скорости Ω_I^2 (a) и квадрата линейной скорости v_I^2 (b). На графиках приведены результаты для различных размеров решетки $N_t \times N_z \times N_s^2$ для о.г.у. Прямые соответствуют аппроксимацией линейной функцией зависимостей $T_c(\Omega_I)/T_c(0) = 1 - C_2\Omega_I^2$ и $T_c(v_I)/T_c(0) = 1 - B_2v_I^2/c^2$

- На Рис. 10(a) представлена зависимость приведенной температуры $T_c(\Omega_I)/T_c(0)$ от мнимой угловой скорости Ω_I . Данная зависимость с хорошей точностью может быть приближена квадратичной: $T_c(\Omega_I)/T_c(0) = 1 - C_2\Omega_I^2$, с $C_2 > 0$. Проведя аналитическое продолжение на действительную ось, мы делаем заключение, что для п.г.у температура фазового перехода растет с увеличением угловой скорости.
- Были проведены измерения при нескольких конфигурациях размеров решетки для того, чтобы оценить эффекты конечного объема. Заметим, что погрешности для периодических граничных условий меньше, чем для открытых, так как менее существенно влияние граничных эффектов.

Проведя измерения для решеток различного размера вдоль оси вращения при постоянном размере в перпендикулярных пространственных направлениях $10 \times N_z \times 31^2$, $N_z = 24, 30, 36$, мы делаем вывод, что эффекты конечного размера вдоль z -направления малы. На основе результатов, полученных для решеток с различным количеством шагов $8 \times 24 \times 25^2$, $10 \times 30 \times 31^2$ и $12 \times 36 \times 37^2$ при фиксированном физическом объеме можно утверждать, что зависимость от шага решетки незначительна. Тем не менее, при изменении параметра N_s отношение $T_c(\Omega_I)/T_c(0)$ меняется значительно. Кроме того, подобно случаю о.г.у, зависимость $T_c(v_I)/T_c(0)$ от линейной скорости на границе решетки v_I^2 (см Рис. 10(b)): $T_c(v_I)/T_c(0) = 1 - B_2v_I^2/c^2$ становится универсальной для всех конфигураций решеток.

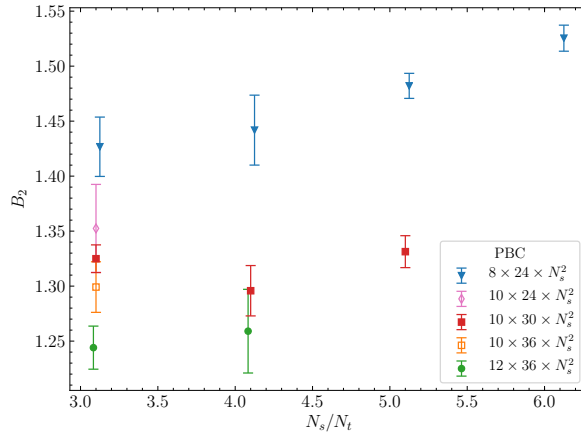


Рис. 11: Зависимость B_2 в ур. (3.3) от отношения N_s/N_t для нескольких конфигураций решеток с п.г.у

На Рис. 11 представлены значения B_2 для разных конфигураций решеток. Нетрудно заметить, что значение коэффициента B_2 для $N_t = 8$ несколько больше, чем для $N_t = 10$ и 12 , которые в свою очередь различаются на величину порядка погрешности измерений. Предположительно, данный результат является следствием эффектов конечного объема и в пределе $N_t \rightarrow \infty$ значение B_2 стремится к фиксированному пределу. Для решеток с $N_t = 8$ зависимость B_2 медленно растет при увеличении N_s . Для решеток с $N_t = 10, 12$ B_2 можно считать постоянной функцией от N_s . Таким образом, можно утверждать, что для п.г.у условия приведенная критическая температура линейно зависит от квадрата линейной угловой скорости (3.4) с коэффициентом пропорциональности $B_2 \sim 1.3$.

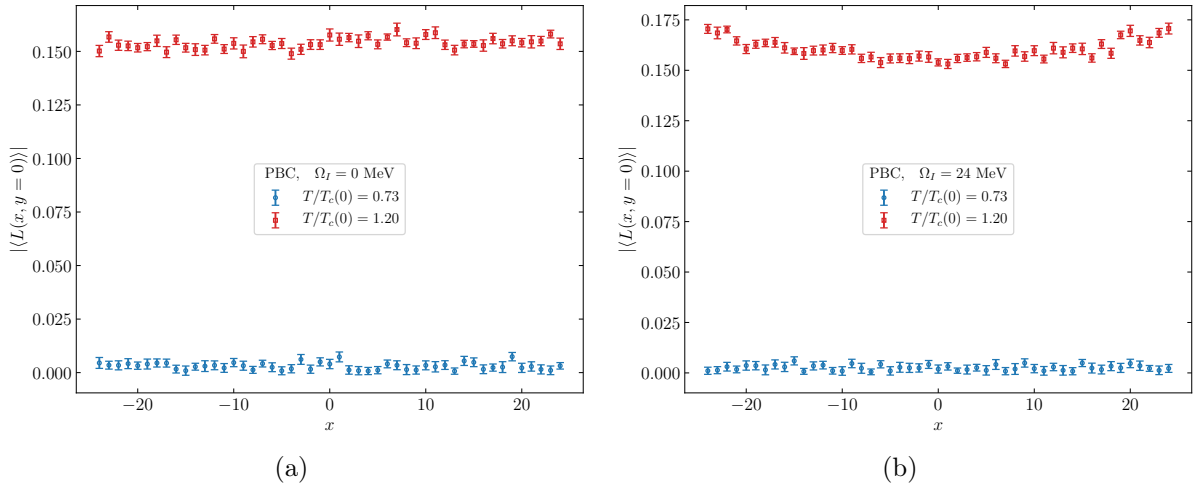


Рис. 12: Зависимость петли Полякова $|\langle L(x, y = 0) \rangle|$ от координаты x для п.г.у $\Omega_I = 0$ МэВ (a), $\Omega_I = 24$ МэВ (b). На графиках представлены результаты на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ для двух значений температур: $T/T_c(0) = 0.73$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.20$ в фазе деконфайнмента.

- Как и на Рис. 8, на Рис. 12 построена зависимость локальной петли Полякова $|\langle L(x, y = 0) \rangle|$ от координаты x для заданной решетки $8 \times 24 \times 49^2$ с п.г.у. Были проведены эксперименты для двух значений температуры: $T/T_c(0) = 0.73$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.20$ в фазе деконфайнмента. Для того, чтобы

сопоставить величину граничных эффектов и влияние вращения, мы предъявляем результаты при нулевой угловой скорости $\Omega_I = 0$ МэВ (Рис. 12(a)) и при конечной $\Omega_I = 24$ МэВ (Рис. 12(b)). Как и для невращающейся, так и для вращающейся системы петля Полякова обращается в нуль в фазе конфайнмента и принимает ненулевое значение в фазе деконфайнмента. Сравнивая графики для нулевой (см. Рис. 12(a)) и ненулевой (см. Рис. 12(b)), можно заметить, что петля Полякова принимает несколько большее значение для вращающейся системы в среднем, и ее величина на оси вращения совпадает в пределах точности измерений для вращающейся и неподвижной системы.

3.3 Граничные условия Дирихле

В данном разделе мы приводим результаты для фазовой диаграммы глюодинамики для граничных условий Дирихле. Как было сказано выше, данные граничные условия явно нарушают \mathbb{Z}_3 симметрию, и данное обстоятельство оказывает серьезное влияние на результаты, полученные в конечном объеме. Тем не менее, в термодинамическом пределе влияние граничных эффектов пропадает (см. Приложение А). В силу явного нарушения центральной симметрии, следует ожидать, что переход конфайнмент/деконфайнмент будет менее ярко выражен по сравнению с о.г.у и п.г.у.

На Рис. 13 представлена зависимость приведенной температуры $T/T_c(0)$ для фиксированной решетки $8 \times 24 \times 49^2$. Существенное различие между д.г.у и другими граничными условиями в том, что петля Полякова не обращается в нуль в фазе конфайнмента как следствие явного нарушения центральной симметрии. Тем не менее, существует точка перегиба в зависимости петли Полякова от температуры и пик восприимчивости. Приближая функцией Гаусса зависимость восприимчивости от температуры в окрестности пика (2.13), мы определяем значение критической температуры, тем же способом, что и раньше (см Рис. 14(a)). На Рис. 14(b) представлена зависимость приведенной температуры фазового перехода $T_c(v_I)/T_c(0)$ от (мнимой) скорости на границе решетки v_I .

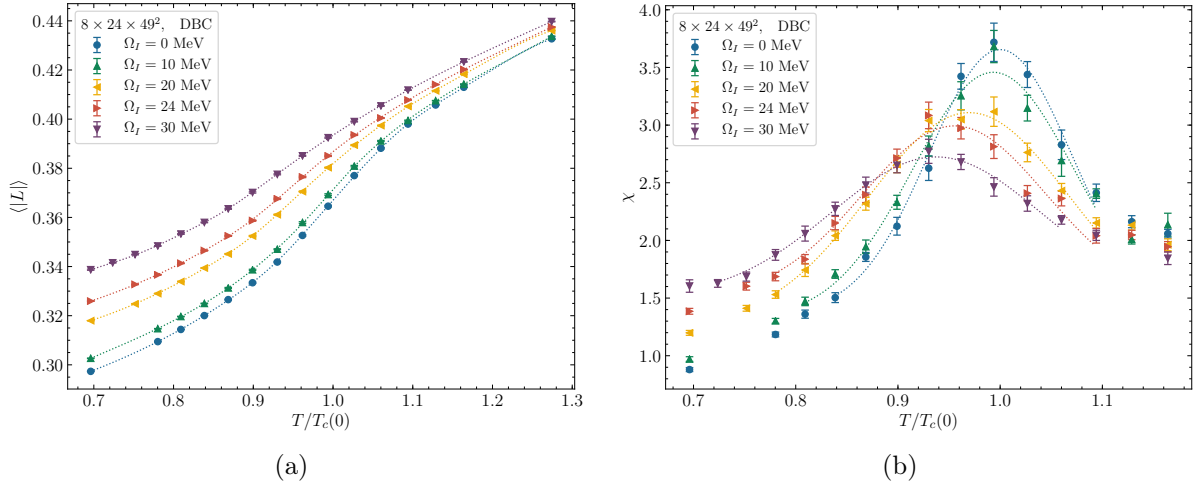


Рис. 13: Зависимость петли Полякова (a) и ее восприимчивости (b) от температуры для различных значений угловой скорости Ω_I . Представленные результаты получены на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ с п.г.у. Кривые, соответствующие приближению петли Полякова арктангенсом (a) нарисованы для большей наглядности. Зависимость восприимчивости петли Полякова (b) в окрестности фазового перехода неплохо описывается Гауссовой функцией (2.13).

Зависимость критической температуры кроссовера T_c от угловой скорости для п.г.у подобна зависимости для о.г.у и п.г.у:

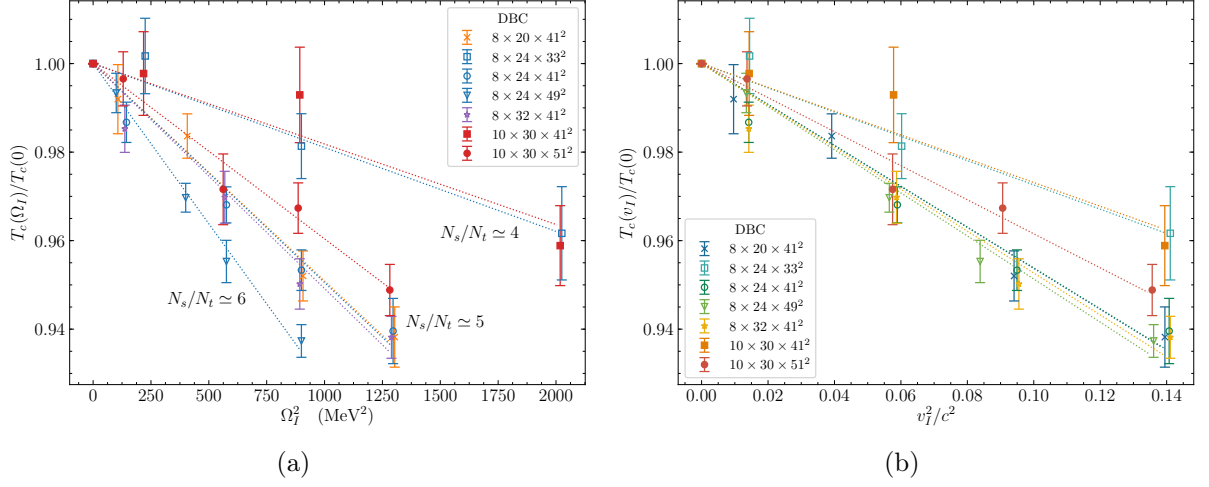


Рис. 14: Зависимость отношения $T_c/T_c(0)$, определенных по пику восприимчивости петли Полякова, от квадрата мнимой угловой скорости Ω_I^2 (a) и квадрата линейной скорости v_I^2 (b). На графиках приведены результаты для различных размеров решетки $N_t \times N_z \times N_s^2$ для о.г.у. Прямые соответствуют аппроксимации линейной функцией зависимостей $T_c(\Omega_I)/T_c(0) = 1 - C_2\Omega_I^2$ и $T_c(v_I)/T_c(0) = 1 - B_2v_I^2/c^2$

- Приведенная температура $T_c(\Omega_I)/T_c(0)$ имеет квадратичную зависимость от мнимой угловой скорости $T_c(\Omega_I)/T_c(0) = 1 - C_2\Omega_I^2$, с $C_2 > 0$. Следовательно, для д.г.у температура кроссовера конфаинмент/деконфаинмент растет с увеличением действительной угловой скорости.

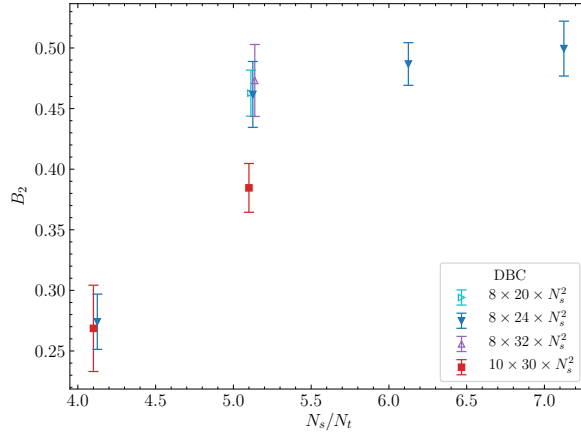


Рис. 15: Зависимость коэффициента B_2 в ур. (3.3) от отношения N_s/N_t для различных конфигураций решеток при д.г.у.

- Коэффициент C_2 практически не зависит от шага решетки и размера системы вдоль оси вращения N_z , но как и для о.г.у и п.г.у существенно зависит от N_s . Зависимость $T_c(v_I)/T_c(0)$ от линейной скорости v_I значительно меньше зависит от размера системы в поперечном направлении N_s (см Рис. 14(b)). Кроме того, исходя из Рис. 14(b) можно сделать вывод, что погрешность определения B_2 больше, чем для о.г.у и п.г.у, и прямые, отвечающие различным отношениям N_s/N_t расходятся (т.е зависимость не является универсальной для

всех решеток). Значения B_2 , определенные для разных конфигураций решеток, представлены на Рис. 15. Отсюда мы заключаем, что, аналогично о.г.у, для достаточно больших размеров решетки в поперечном направлении N_s влияние границы подавлено по сравнению с объемом и коэффициент B_2 выходит на плато к значению $B_2 \sim 0.5$.

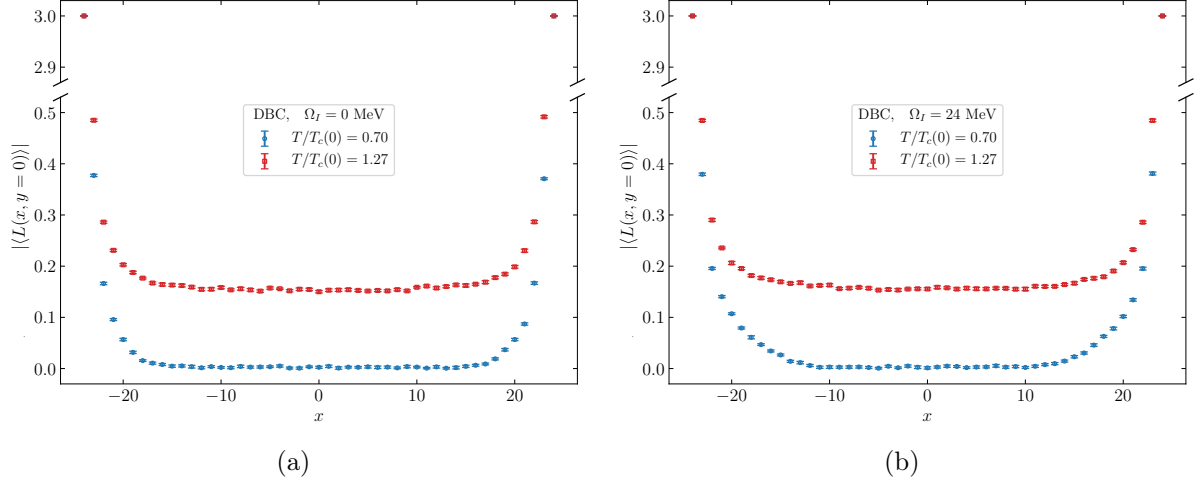


Рис. 16: Зависимость петли Полякова $|\langle L(x, y = 0) \rangle|$ от координаты x для д.г.у при $\Omega_I = 0$ МэВ и (а), $\Omega_I = 24$ МэВ (б). Результаты были получены на решетке $8 \times 24 \times 49^2$ для двух значений приведенной температуры $T/T_c(0) = 0.70$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.27$ в фазе деконфайнмента.

- На Рис. 16 показано распределение локальной петли Полякова по пространству для угловых скоростей $\Omega_I = 0$ МэВ, 24 МэВ. В качестве характерных приведенных температур взяты $T/T_c(0) = 0.70$ в фазе конфайнмента и $T/T_c(0) = 1.27$ в фазе деконфайнмента.

Для д.г.у значение петли Полякова $L(x, y) = 3$ на границе зафиксировано. Как и для о.г.у, в связи с конечной длиной распространения корреляций граничные эффекты экранируются, и при уходе вглубь решетки петля Полякова стремится к некоторому постоянному значению, равному нулю в фазе конфайнмента и ненулевому в деконфайнменте. Подобно о.г.у (см. Рис. 16(a) и Рис. 16(b)), неоднородность распределения петли Полякова, обусловленная вращением менее ярко выражена, чем граничные эффекты.

4 Обсуждение результатов и заключение

В данной работе было проведено изучение влияния вращения на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент.

Так как в настоящее время не существует эффективных алгоритмов для проведения численного моделирования глюодинамики в нестационарных случаях, измерения были проведены не в лабораторной системе отсчета, а во вращающейся. При данной постановке задачи, наличие ненулевой угловой скорости задается через метрический тензор, и вращение выступает в качестве внешнего поля. В связи с наличием проблемы знака для действительной угловой скорости измерения были проведены для мнимой угловой скорости. Результат для действительных значений Ω получается методом аналитического продолжения. При не слишком больших значениях угловой скорости, в том числе и порядка характерных для экспериментов по соударению тяжелых ионов, по всей видимости, метод аналитического продолжения можно считать применимым.

В связи с необходимостью соблюдать принцип причинности, возможно рассмотрение лишь системы, ограниченной в направлениях, перпендикулярных оси вращения. Поэтому выбор граничных условий является нетривиальным вопросом, требующим аккуратного рассмотрения. Так как любая задача решеточного моделирования подразумевает рассмотрение в конечном объеме, то граничные эффекты неизбежно оказывают влияние на результат эксперимента. Чтобы оценить влияние граничных условий, были проведены измерения с 3 видами граничных условий - открытыми граничными условиями (о.г.у), периодическими граничными условиями (п.г.у), граничными условиями Дирихле (д.г.у).

Основной целью работы является определение зависимости критической температуры от угловой скорости вращения. Значение температуры фазового перехода было определено по положению пика восприимчивости петли Полякова.

Согласно полученным результатам, после аналитического продолжения на действительную ось зависимость критической температуры $T_c(\Omega)$ от угловой скорости приближенно описывается квадратичной функцией

$$\frac{T_c(\Omega)}{T_c(0)} = 1 + C_2 \Omega^2, \quad (4.6)$$

с $C_2 > 0$ для всех рассмотренных граничных условий. Исходя из этого, мы делаем заключение, что *критическая температура перехода конфайнмент/деконфайнмент растет с увеличением угловой скорости*. Так как полученный результат справедлив для всех рассмотренных граничных условий и конфигураций решеток, можно утверждать, что рост критической температуры с увеличением угловой скорости является универсальным свойством глюодинамики.

Величина коэффициента пропорциональности C_2 зависит от граничных условий и размера решетки в направлении, перпендикулярном оси вращения $N_s = N_x = N_y$, но практически не зависит от размера вдоль оси вращения N_z и шага решетки. Зависимость коэффициента C_2 в формуле (4.6) от N_s , во всяком случае в лидирующем порядке, может быть устранена построением зависимости $T_c(v)$, где v - линейная скорость в центре грани решетки $v = \Omega (N_s - 1) a/2$:

$$\frac{T_c(v)}{T_c(0)} = 1 + B_2 \frac{v^2}{c^2}. \quad (4.7)$$

В последней формуле коэффициент B_2 является постоянным в пределах погрешности для рассмотренных значений N_s . Предположительно, тот факт, что зависимость

приведенной критической температуры является более универсальной в терминах линейной, (4.7) чем угловой скорости (4.6) вращения, обусловлен тем, что в компоненты метрического тензора входят только комбинации, составленные из линейной скорости. То есть наблюдаемые зависят от произведения $\Omega a(N_s - 1)/2$, но не угловой скорости Ω по отдельности. Кроме того, полученное значение коэффициента B_2 зависит от граничных условий : $B_2 \sim 0.7$ для о.г.у, $B_2 \sim 1.3$ для п.г.у и $B_2 \sim 0.5$ для д.г.у.

Можно было бы предполагать, что рост критической температуры с увеличением угловой скорости является следствием эффекта Толмана-Эренфеста. Но согласно данному закону, температура во вращающейся системе растет при удалении от оси вращения, то есть вращение эффективно разогревает изучаемую систему, и следовало бы ожидать уменьшения критической температуры. Результаты, полученные в настоящей работе дают противоположный результат - рост критической температуры во вращающейся системе по сравнению с неподвижной. Результат данной работы расходится с выводами, полученных в других работах по исследованию влияния вращения на фазовый переход в глюодинамике. В работе [11] для случая компактной КЭД было обнаружено понижение температуры фазового перехода для вращающейся системы в терминах конфайнмента монополей. В работе [12] с помощью голографического подхода в модели дилатона Эйнштейна-Максвелла, было сделано аналогичное заключение.

На данный момент у нас нет исчерпывающего объяснения полученным результатам. Можно предполагать, что наличие вращения способствует формированию векторного конденсата, как в работе, что и приводит к усилению конфайнмента. Более строгое и убедительное обоснование, а также эксперименты для теории с фермионами (КХД), планируется провести в последующей работе.

А Анализ эффектов конечного объема для открытых граничных условий и граничных условий Дирихле

В данном приложении мы рассмотрим влияние граничных условий на критическую температуру для невращающейся системы. Для всех г.у используются периодические граничные условия в z - и t -направлениях. Для поперечных к оси вращения пространственных x - и y -направлений были проведены эксперименты с периодическими граничными условиями (п.г.у), граничными условиями Дирихле (д.г.у) и открытыми (о.г.у) граничными условиями (см Раздел 2.2). Зависимость критической температуры была получена в различных работах, например, в [25]. По этой причине, в этом приложении мы будем рассматривать только о.г.у и д.г.у.

А.1 Открытые граничные условия

Значения критической температуры перехода конфайнмент/деконфайнмент определенные по положению пика восприимчивости представлены в сводной таблице 1. Можно заметить, что для всех рассмотренных решеток критическая температура для о.г.у выше, чем для п.г.у. $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.6383(55)$ [25].⁴ По всей видимости, данное явление обусловлено следующей причиной - при о.г.у плакетты, выходящие из решетки, не входят в действие, или, эквивалентно, значение плакета фиксируется равным единице. С физической точки зрения это соответствует занулению квантовых флуктуаций и фиксации нулевой температуры на границе. Иначе говоря, граница выступает в качестве внешнего холодильника, и требуется более высокая температура для перевода системы в фазу деконфайнмента.

Для того, чтобы получить результаты для системы бесконечного объема, мы аппроксимировали данные для решеток $8 \times N_s^3$ функцией

$$T_c(N_s/N_t) = T_0 + A(N_t/N_s)^3 \quad (\text{A.1})$$

где T_0 - критическая температура для системы бесконечного объема. Полученное предельное значение - $T_0/\sqrt{\sigma} = 0.6420(18)$. Данный результат согласуется с опорным результатом для п.г.у, полученным экстраполяцией $T_0/\sqrt{\sigma} = 0.6383(55)$ в упомянутой ранее работе [25].

Граничные эффекты для о.г.у повышают температуру фазового перехода. Тем не менее, при увеличении объема, влияние граничных условий экранируется и критическая температура приближается к известному результату для п.г.у [25]. Экранирование границы довольно заметно на Рис. 8(a).

А.2 Граничные условия Дирихле

Результаты определения критической температуры для граничных условий Дирихле представлены в Таблице 1. Что характерно, полученная температура ниже,

⁴В этом и следующем разделе в качестве опорного результата, с которым будет проводиться сравнение подразумевается результат перехода в предел бесконечного объема на решетке с $N_t = 8$ шагами по времени в работе [25]. В рамках данного раздела мы сравниваем это опорное значение, с результатами на решетках с $N_t = 8$.

Таблица 1: Измеренные критические температуры для о.г.у и д.г.у. Опорный результат для периодических граничных условий: $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.6383(55)$ [25].

	п.г.у	о.г.у
Решетка	$T_c/\sqrt{\sigma}$	$T_c/\sqrt{\sigma}$
8×40^3	0.6983(10)	0.5764(8)
8×48^3	0.6755(6)	0.5886(9)
8×56^3	0.6623(10)	0.5940(11)
8×64^3	0.6537(10)	0.6021(9)

чем для п.г.у [25]. В этом отношении эффект д.г.у противоположен влиянию от о.г.у. Фиксация петли Полякова на границе явно нарушает \mathbb{Z}_3 - симметрию. Несмотря на то, что фиксированное значение линков на границе соответствует обращению в нуль флуктуаций, тем не менее, с точки зрения параметра порядка граница выступает как внешний резервуар, находящийся в фазе деконфайнмента. Поэтому и следует ожидать понижение критической температуры для д.г.у.

Как и для о.г.у, были проведены измерения для нескольких значений N_s на решетках $8 \times N_s^3$ и аппроксимация той же самой зависимостью (A.1), где T_0 - температура в пределе бесконечного объема. Экстраполяция дает следующее значение - $T_0/\sqrt{\sigma} = 0.6086(22)$. Данный результат отличается от известного для п.г.у [25], но достаточно умеренно.

Таким образом, эффекты конечного объема для д.г.у приводят к понижению критической температуры, но для достаточно больших решеток полученный [25]. Как и для о.г.у имеет граничные эффекты экранируются при удалении вглубь исследуемой системы. Петля Полякова принимает максимальное фиксированное значение на границе и убывает при приближении к оси вращения.

Главный вывод этого и предыдущего раздела в том, что несмотря на то, что для конечных решеток граничные условия заметно изменяют полученное значение критической температуры, в пределе бесконечного объема влияние граничных эффектов уменьшается.

В Конфигурации решеток, использованных в работе

Конфигурации и параметры решеток, использованные в работе, приведены в таблицах 2, 3, 4. Для каждого размера решетки и угловой скорости температура и β . Для того, чтобы зафиксировать масштаб было использовано соотношение между шагом решетки и решеточной константой связи $(a\sqrt{\sigma})(\beta)$ из работы [26] (с натяжением струны $\sqrt{\sigma} = 440$ МэВ). Для генерации конфигураций был использован метод Монте-Карло, где шаг обновления "тепловой бани" (heatbath algorithm) сопровождается двумя шагами верхней релаксации (over-relaxation). Для каждого набора параметров была набрана статистика по 6000–12000 конфигурациям, разделенных 20 шагами алгоритма. Данный интервал взят для уменьшения авто-корреляции между соседними измерениями. Для определения погрешности измерений был использован jackknife метод.

Таблица 2: Решеточные конфигурации для о.г.у.

Решетка	Ω_I , МэВ
$8 \times 20 \times 25^2$	0, 30, 45, 60, 75, 90
$8 \times 24 \times 25^2$	0, 30, 45, 60, 75, 90
$8 \times 30 \times 25^2$	0, 30, 45, 60, 75, 90
$8 \times 24 \times 29^2$	0, 15, 30, 45, 60, 75
$8 \times 24 \times 33^2$	0, 15, 30, 45, 50
$8 \times 24 \times 41^2$	0, 12, 24, 30, 36
$8 \times 32 \times 41^2$	0, 12, 24, 30, 36
$8 \times 24 \times 49^2$	0, 10, 20, 24, 30
$8 \times 24 \times 57^2$	0, 10, 15, 20, 24
$10 \times 30 \times 31^2$	0, 30, 45, 60, 75, 90
$10 \times 36 \times 31^2$	0, 30, 45, 60, 90
$10 \times 30 \times 41^2$	0, 15, 30, 45, 50
$10 \times 30 \times 51^2$	0, 12, 24, 30, 36
$12 \times 36 \times 37^2$	0, 30, 45, 60, 75, 90

Таблица 3: Решеточные конфигурации для п.г.у.

Решетка	Ω_I , МэВ
$8 \times 24 \times 25^2$	0, 15, 30, 45, 50
$8 \times 24 \times 33^2$	0, 10, 20, 30, 38
$8 \times 24 \times 41^2$	0, 12, 20, 24, 30
$8 \times 24 \times 49^2$	0, 10, 15, 20, 24
$10 \times 24 \times 31^2$	0, 15, 30, 45, 50
$10 \times 30 \times 31^2$	0, 15, 30, 45, 50
$10 \times 36 \times 31^2$	0, 15, 30, 45, 50
$10 \times 30 \times 41^2$	0, 10, 20, 30, 38
$10 \times 30 \times 51^2$	0, 12, 20, 24, 30
$12 \times 36 \times 37^2$	0, 15, 30, 45, 50
$12 \times 36 \times 49^2$	0, 10, 20, 30, 38

Таблица 4: Решеточные конфигурации для д.г.у.

Решетка	Ω_I , МэВ
$8 \times 24 \times 33^2$	0, 15, 30, 45
$8 \times 20 \times 41^2$	0, 10, 20, 30, 36
$8 \times 24 \times 41^2$	0, 12, 24, 30, 36
$8 \times 32 \times 41^2$	0, 12, 24, 30, 36
$8 \times 24 \times 49^2$	0, 10, 20, 24, 30
$8 \times 24 \times 57^2$	0, 10, 15, 20, 24
$10 \times 30 \times 41^2$	0, 15, 30, 45
$10 \times 30 \times 51^2$	0, 12, 24, 30, 36

С Переход от большого канонического ансамбля к Евклидову интегралу по по путям для случая вращающейся системы

Статсумма для вращающейся системы имеет следующий вид:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta(H-\Omega J)} \quad (\text{C.2})$$

Где H - гамильтониан системы, J - угловой момент, β - обратная температура, а Ω - угловая скорость. Рассмотрение в данном разделе следует работе [27].

Пусть система находится в \mathbb{R}^4 . Будет проводить рассмотрение в цилиндрической системе координат (t, ϕ, r, z) , где t - время, ϕ - угол с некоторой заданной прямой, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, r - расстояние до этой оси, а z - координата на оси вращения. Функции Грина частиц при наличии углового момента удовлетворяют следующему, модифицированному, условию на периодичность:

$$G_{\beta, \Omega}(t, \phi, r, z) = (-1)^F G_{\beta, \Omega}(t + i\beta, \phi + i\beta\Omega, r, z) \quad (\text{C.3})$$

Здесь число F - равно нулю для бозонов и единице для фермионов, что соответствует периодическим (анти-периодическим) граничным условиям вдоль мнимого времени при нулевой угловой скорости. Таким образом, для КТП при температуре T и угловой скорости Ω возникает следующее правило отождествление координат:

$$(t, \phi, r, z) \sim (t + i\beta, \phi + i\beta\Omega, r, z) \quad (\text{C.4})$$

Перейдем во вращающуюся систему с координатами $\phi' = \phi - \Omega t, t' = t$, так чтобы в новых координатах условие периодичности функций Грина имело привычный вид:

$$(t', \phi, r, z) \sim (t' + i\beta, \phi, r, z) \quad (\text{C.5})$$

Новый Гамильтониан "поглощает" в некотором смысле угловой момент.

$$H' = i \frac{\partial}{\partial t'} = i \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \right) \frac{\partial}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \phi}{\partial t'} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} = i \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial \phi} = H + \Omega J \quad (\text{C.6})$$

В терминах мнимого углового времени $\tau = it$, после поворота Вика имеем периодичность как при рассмотрении термодинамической системы в невращающемся случае:

$$\tau \sim \tau + \beta \quad (\text{C.7})$$

Но теперь вместо известного выражения для плоского пространства в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = -dt^2 + r^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2 \quad (\text{C.8})$$

В новых координатах метрический тензор примет вид (2.1). После преобразования Лежандра, осуществляющего переход от Гамильтонова к Лагранжеву формализму имеем:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-I_E[\phi, g]} \quad (\text{C.9})$$

где в ϕ включены все бозонные и фермионные поля в теории, g - метрический тензор во вращающихся координатах, I_E - Евклидово действие.

Список литературы

- [1] A. Vilenkin. MACROSCOPIC PARITY VIOLATING EFFECTS: NEUTRINO FLUXES FROM ROTATING BLACK HOLES AND IN ROTATING THERMAL RADIATION. *Phys. Rev. D*, 20:1807–1812, 1979. doi:[10.1103/PhysRevD.20.1807](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.20.1807).
- [2] D.E. Kharzeev, J. Liao, S.A. Voloshin, and G. Wang. Chiral magnetic and vortical effects in high-energy nuclear collisions—A status report. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 88:1–28, 2016. arXiv:[1511.04050](https://arxiv.org/abs/1511.04050), doi:[10.1016/j.pnpnp.2016.01.001](https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2016.01.001).
- [3] G. Prokhorov, O. Teryaev, and V. Zakharov. Axial current in rotating and accelerating medium. *Phys. Rev. D*, 98(7):071901, 2018. arXiv:[1805.12029](https://arxiv.org/abs/1805.12029), doi:[10.1103/PhysRevD.98.071901](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.071901).
- [4] George Y. Prokhorov, Oleg V. Teryaev, and Valentin I. Zakharov. Effects of rotation and acceleration in the axial current: density operator vs Wigner function. *JHEP*, 02:146, 2019. arXiv:[1807.03584](https://arxiv.org/abs/1807.03584), doi:[10.1007/JHEP02\(2019\)146](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2019)146).
- [5] L. Adamczyk et al. Global Λ hyperon polarization in nuclear collisions: evidence for the most vortical fluid. *Nature*, 548:62–65, 2017. arXiv:[1701.06657](https://arxiv.org/abs/1701.06657), doi:[10.1038/nature23004](https://doi.org/10.1038/nature23004).
- [6] Shu Ebihara, Kenji Fukushima, and Kazuya Mameda. Boundary effects and gapped dispersion in rotating fermionic matter. *Phys. Lett. B*, 764:94–99, 2017. arXiv:[1608.00336](https://arxiv.org/abs/1608.00336), doi:[10.1016/j.physletb.2016.11.010](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.11.010).
- [7] M.N. Chernodub and Shinya Gongyo. Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics. *JHEP*, 01:136, 2017. arXiv:[1611.02598](https://arxiv.org/abs/1611.02598), doi:[10.1007/JHEP01\(2017\)136](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2017)136).
- [8] Yin Jiang and Jinfeng Liao. Pairing Phase Transitions of Matter under Rotation. *Phys. Rev. Lett.*, 117(19):192302, 2016. arXiv:[1606.03808](https://arxiv.org/abs/1606.03808), doi:[10.1103/PhysRevLett.117.192302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.192302).
- [9] Hui Zhang, Defu Hou, and Jinfeng Liao. Mesonic Condensation in Isospin Matter under Rotation. *Chin. Phys. C*, 44(11):111001, 2020. arXiv:[1812.11787](https://arxiv.org/abs/1812.11787), doi:[10.1088/1674-1137/abae4d](https://doi.org/10.1088/1674-1137/abae4d).
- [10] Xinyang Wang, Minghua Wei, Zhibin Li, and Mei Huang. Quark matter under rotation in the NJL model with vector interaction. *Phys. Rev. D*, 99(1):016018, 2019. arXiv:[1808.01931](https://arxiv.org/abs/1808.01931), doi:[10.1103/PhysRevD.99.016018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.016018).
- [11] M.N. Chernodub. Inhomogeneous confining-deconfining phases in rotating plasmas. 12 2020. arXiv:[2012.04924](https://arxiv.org/abs/2012.04924).
- [12] Xun Chen, Lin Zhang, Danning Li, Defu Hou, and Mei Huang. Gluodynamics and deconfinement phase transition under rotation from holography. 10 2020. arXiv:[2010.14478](https://arxiv.org/abs/2010.14478).
- [13] Yuki Fujimoto, Kenji Fukushima, and Yoshimasa Hidaka. Deconfining Phase Boundary of Rapidly Rotating Hot and Dense Matter and Analysis of Moment of Inertia. *Phys. Lett. B*, 816:136184, 1 2021. arXiv:[2101.09173](https://arxiv.org/abs/2101.09173), doi:[10.1016/j.physletb.2021.136184](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136184).

- [14] Yoichiro Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961. [doi:10.1103/PhysRev.122.345](https://doi.org/10.1103/PhysRev.122.345).
- [15] Yoichiro Nambu and G. Jona-Lasinio. DYNAMICAL MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES BASED ON AN ANALOGY WITH SUPERCONDUCTIVITY. II. *Phys. Rev.*, 124:246–254, 1961. [doi:10.1103/PhysRev.124.246](https://doi.org/10.1103/PhysRev.124.246).
- [16] Irina Ya. Aref’eva, Anastasia A. Golubtsova, and Eric Gourgoulhon. Holographic drag force in 5d kerr-ads black hole, 2021. [arXiv:2004.12984](https://arxiv.org/abs/2004.12984).
- [17] Arata Yamamoto and Yuji Hirono. Lattice QCD in rotating frames. *Phys. Rev. Lett.*, 111:081601, 2013. [arXiv:1303.6292](https://arxiv.org/abs/1303.6292), [doi:10.1103/PhysRevLett.111.081601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.081601).
- [18] V. V. Braguta, A. Yu. Kotov, D. D. Kuznedev, and A. A. Roenko. Study of the Confinement/Deconfinement Phase Transition in Rotating Lattice SU(3) Gluodynamics. *JETP Lett.*, 112(1):6–12, 2020. [doi:10.1134/S0021364020130044](https://doi.org/10.1134/S0021364020130044).
- [19] V. V. Braguta, A. Yu. Kotov, D. D. Kuznedev, and A. A. Roenko. Influence of relativistic rotation on the confinement/deconfinement transition in gluodynamics, 2021. [arXiv:2102.05084](https://arxiv.org/abs/2102.05084).
- [20] Richard C. Tolman. On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity. *Phys. Rev.*, 35:904–924, Apr 1930. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.35.904>, [doi:10.1103/PhysRev.35.904](https://doi.org/10.1103/PhysRev.35.904).
- [21] Martin Luscher and Stefan Schaefer. Lattice QCD without topology barriers. *JHEP*, 07:036, 2011. [arXiv:1105.4749](https://arxiv.org/abs/1105.4749), [doi:10.1007/JHEP07\(2011\)036](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2011)036).
- [22] Martin Lüscher. Step scaling and the Yang-Mills gradient flow. *JHEP*, 06:105, 2014. [arXiv:1404.5930](https://arxiv.org/abs/1404.5930), [doi:10.1007/JHEP06\(2014\)105](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2014)105).
- [23] Adrien Florio, Olaf Kaczmarek, and Lukas Mazur. Open-Boundary Conditions in the Deconfined Phase. *Eur. Phys. J. C*, 79(12):1039, 2019. [arXiv:1903.02894](https://arxiv.org/abs/1903.02894), [doi:10.1140/epjc/s10052-019-7564-z](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-7564-z).
- [24] M. E. Fisher and A. N. Berker. Scaling for first-order transitions in thermodynamic and finite systems. *Phys. Rev. B*, 26:2507–2513, 1982. [doi:10.1103/PhysRevB.26.2507](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.26.2507).
- [25] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier, and B. Petersson. Thermodynamics of SU(3) lattice gauge theory. *Nucl. Phys. B*, 469:419–444, 1996. [arXiv:hep-lat/9602007](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9602007), [doi:10.1016/0550-3213\(96\)00170-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00170-8).
- [26] R.G. Edwards, Urs M. Heller, and T.R. Klassen. Accurate scale determinations for the Wilson gauge action. *Nucl. Phys. B*, 517:377–392, 1998. [arXiv:hep-lat/9711003](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9711003), [doi:10.1016/S0550-3213\(98\)80003-5](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)80003-5).
- [27] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Action integrals and partition functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752–2756, May 1977. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2752>, [doi:10.1103/PhysRevD.15.2752](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752).