Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Факультет Молекулярной и Химической Физики

Выпускная квалификационная
работа бакалавра

Исследование уравнений с вариационными производными в полиномиальных теориях поля

выполнила студентка 743 группы
Огаркова Анна Анатольевна

научный руководитель
к.ф.-м.н. Огарков Станислав Леонидович

Долгопрудный
2021

Аннотация

В дипломной работе рассматриваются функциональное уравнение Гамильтона-Якоби (ГЯ), центральное уравнение голографической ренормализационной группы (ГРГ), функциональное уравнение Шрёдингера, функциональное уравнение Вильсона-Полчински (ВП), центральное уравнение функциональной ренормализационной группы (ФРГ), а также управляющее уравнение, частным случаем которого является уравнение ВП. Данные уравнения формулируются в D-мерном координатном представлении, а вместо дополнительных координат или ФРГ-масштаба используется "голографическое" скалярное поле Λ. Дополнительная координата или ФРГ-масштаб получаются с помощью дельта-полевой конфигурации Λ. Для рассматриваемых уравнений приводятся соответствующие иерархии (бесконечные системы зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений для соответствующих функций Грина). Преимущество иерархии ГЯ в том, что иерархия ГЯ распадается на независимые уравнения, следовательно, может быть решена в замкнутом виде. В работе также приводятся квантовое уравнение ГЯ и уравнение непрерывности, полученные из уравнения Шрёдингера. Формулируется (функциональное) квазиклассическое приближение. Предлагается схема аппроксимации уравнения ВП и управляющего уравнения. С использованием ступенчатого регулятора Литима приводятся аналитические выражения для трансляционно-инвариантных двухчастичной и четырёхчастичной ампутированных функций Грина. Наконец, анализируется функционал роста крупнозернистости мод. Общие выражения для функционала роста крупнозернистости мод в терминах функционала блокинга, представленные в дипломе, могут быть использованы для построения высших регуляторов метода ФРГ.

Ключевые слова: квантовая механика (КМ), квантовая теория поля (КТП), скалярная КТП, производящий функционал, функция Грина (ФГ), функциональная ренормализационная группа (ФРГ), голографическая ренормализационная группа (ГРГ), функциональное уравнение Гамильтона-Якоби (ГЯ), функциональное уравнение Шрёдингера, уравнение Вильсона-Полчински (ВП), иерархия функций Грина, функциональный ряд Тейлора, анти-де Ситтер/конформная теория поля (АдС/КфТП).

Содержание

Введение

Формализм функционального интегрирования лежит в основе многих современных научных теорий [1] – [14]. Поэтому вычисление функциональных интегралов является важныой математической задачей [15] – [23]. Поскольку прямое вычисление такого интеграла затруднительно, можно использовать факт, что функциональный интеграл в общем случае является решением некоторого функционального уравнения, в частности, решения дифференциального уравнения в частных производных (уравнения Шрёдингера в квантовой механике). В общем случае рассматривается уравнение, содержащее вариационные производные, решение которого может быть построенно в виде ряда. В простейшем случае такой ряд является функциональным рядом Тейлора. Такое предположение приводит нас к бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений (иерархии), зацепленных друг за друга. Решением такой иерархии является бесконечное семейство функций Грина (ФГ). Например, уравнение для двухчастичной ФГ содержит четырехчастичную ФГ в специальной кинематике и так далее.

В простейшем случае будем считать, что все ФГ нечетного порядка тождественно равны нулю. То есть, мы ищем четное решение функционального уравнения. Такое решение существует, например, при отсутствии спонтанного нарушения симметрии в полиномиальной теории φ^4. Этот случай удобен тем, что иерархия для ФГ включает минимальное количество возможных членов [24]. Уже в полиномиальной теории $\varphi^3+\varphi^4$ иерархия становится более громоздкой, появляются ФГ нечетного порядка, но математическая техника остается прежней.

Уравнение для четырехчастичной ФГ содержит шестичастичную ФГ (в специальной кинематике) и так далее. Это называется "проблемой $n, n+2$", и эта проблема является основной трудностью как для функциональной формулировки квантовой теории поля (КТП) в терминах функциональных уравнений Дайсона–Швингера и Швингера–Томонаги, так и для метода функциональной ренормализационной группы (ФРГ) [24] – [32]. Приблизительное решение иерархии основано, например, на обрезании иерархии в некотором заданном порядке n_0.

Функциональное уравнение Гамильтона-Якоби (ГЯ) обладает замечательным свойством: иерархия, порожденная этим уравнением, не связана (не содержит "проблему $n, n+2$") [33]. В дипломной работе мы сначала рассмотрим функциональное уравнение ГЯ. Это уравнение популярно сегодня, поскольку оно является основным уравнением метода голографической ренормгруппы (ГРГ) [33] – [40]. В свою очередь, ГРГ является предметом интенсивных исследований, так как она связана с понятием АдС/КфТП соответствия и голографическим принципом [41] – [44]. Однако в литературе до сих пор нет строгого вывода иерархии ГРГ. В дипломной работе мы частично восполняем этот пробел.

Мы рассматриваем функциональное уравнение ГЯ в терминах дополнительного "голографического" скалярного поля Λ (в духе статьи [45]). Это поле позволяет сделать вывод иерархии ГЯ строгим и общим. Затем, исследуя разнличные полевые конфигурации Λ, можно исследовать ряд задач ГРГ. Поскольку функционал Гамильтона является частным случаем функционала роста крупнозернистости мод, содержащим только первую вариационную производную решения уравнения ГЯ, его называют "голографическим" или "геометрическим" функционалом роста крупнозернистости мод. Также мы иллюстрируем теорию в координатном представлении и в конденсированных обозначениях (абстрактное пространство). Это позволяет развить геометрическую интуицию относительно функционального уравнения ГЯ и иерархии ГЯ. Наконец, функционал, удовлетворяющий уравнению ГЯ, а также соответствующие ФГ, называются голографическим функционалом и голографическими ФГ, соответственно.

С помощью формулы, позволяющей восстановить функционал по заданной первой вариационной производной (функционального обобщения формулы Ньютона–Лейбница (НЛ)), мы находим трансляционно-инвариантное решение для двухчастичной ФГ. Отметим, что вывод такой формулы интересен сам по себе, потому что этот вывод аналогичен вводу в случае потоковых уравнений ФРГ. В двух предельных случаях (конфигурация поля в виде дельта-функции и конфигурация постоянного поля Λ) для двухчастичной ФГ получается уравнение Риккати. Это не доказывает, что уравнение Риккати можно получить для любой конфигурации Λ из соответствующего пространства полей, но позволяет нам утверждать существование такого подпространства. Мы также кратко обсудим специальное уравнение Риккати и автомодельное уравнение Риккати. Эти уравнения использовались во многих работах по ГРГ [33] – [40] без достаточно строгого вывода. В конце раздела, посвященного функциональному уравнению ГЯ, мы представляем сепарабельное решение для двухчастичной ФГ для дельта-полевой конфигурации Λ.

Как известно, из основного уравнения квантовой механики (КМ), уравнения Шрёдингера, выводится пара уравнений: уравнение непрерывности и квантовое уравнение ГЯ. Последнее содержит квантовую поправку к классическому потенциалу, которой можно пренебречь в квазиклассическом приближении. Этот подход является альтернативой приближению Вентцеля-Крамерса–Бриллюэна и по этой причине является одним из квазиклассических методов КМ. В дипломной работе этот вывод обощается на случай функционального уравнения Шрёдингера. Заметим, что это уравнение аналогично фукнциональному уравнению диффузии. Тем не менее, функциональное уравнение Шрёдингера существенно отличается из-за "безобидной" мнимой единицы. Мы даем строгий вывод пары иерархий для функционального уравнения непрерывности и квантового функционального уравнения ГЯ. Показываем, что функционал, соответствующий "квантовой поправке" к потенциалу, в квазиклассическом приближении равен нулю, поскольку он пропорционален $\hbar$, где $\hbar$ - "приведенная постоянная Планка" (в функциональном уравнении). Таким образом, мы приходим к функциональному квазиклассическому приближению. Такой подход позволяет сформулировать итерационную процедуру решения функционального уравнения Шрёдингера. Отметим, что последнее содержит "проблему $n, n+2$". Поэтому найти решение функционального уравнения Шредингера без квазиклассического приближения - довольно сложная задача.

В работе мы подробно изучаем отдельные уравнения трансляционно-инвариантной пары иерархий (предполагая дельта-полевую конфигурацию Λ): уравнения для вакуумного голографического среднего (нуль-частичные голографические ФГ), двухчастичной и четырехчастичной голографических ФГ, а также для вакуумного среднего и двухчастичной ФГ, отвечающих функциональному уравнению непрерывности. Трансляционная инвариантность пространства (пространства-времени) приводит к закону сохранения импульса (энергии–импульса) в теории, в частности, в диаграммах Фейнмана. Эта симметрия - одна из основных симметрий КТП. В случае вакуумного среднего из иерархии функционального уравнения непрерывности появляется бесконечная величина $(2\pi)^D\delta^{(D)}(0)$. Чтобы вычесть последнюю (регуляризовать уравнение), можно выбрать несколько стратегий. Мы предлагаем стратегию, основанную на "оптическом потенциале", поскольку она кажется наиболее естественной. Такой потенциал, будучи комплексным, содержит мнимую часть $\mathcal{W}$. Её можно разбить на сингулярную часть, поглощающую расходимости, и регулярную часть, соответствующую открытости рассматриваемой квантово-полевой системы. Оптический потенциал хорошо известен в КМ, где он позволяет преобразовать точное многочастичное уравнение Шрёдингера в эффективное одночастичное, которое используется в различных моделях ядерной физики.

Таким образом, мы приходим к важному выводу, что трансляционно-инвариантное функциональное уравнение Шрёдингера описывает открытую квантово-полевую систему (теория открытых квантово-полевых систем изложена, например, в главе V "Релятивистские квантовые процессы” в монографии [46], а также в статьях [47, 48]). Отдельно отметим, что действительность собственных значений гамильтониана следует из его эрмитовости. Обратное в общем случае неверно. Поэтому можно исследовать отдельную задачу: построение неэрмитового (функционального) гамильтониана с действительными собственными значениями (значениями энергии). Однако мы не ожидаем, что функциональное уравнение Шрёдингера в КТП является фундаментальным. Фундаментальные уравнения КТП - функциональные уравнения Дайсона–Швингера и Швингера–Томонаги [49] – [52]. Как мы отметили выше, оба уравнения содержат “проблему $n, n+2$”.

В основе метода ФРГ лежит ряд функциональных уравнений, хорошо известных в КТП, теории критических явлений и стохастической теории турбулентности. Вероятно, наиболее известными являются функциональные уравнения Вильсона–Полчински и Веттериха–Морриса [24] – [27]. Уравнение ВП может быть получено из линейного функционального уравнения диффузии для матрицы рассеяния ($\mathcal{S}$-матрицы), которое, как уже было отмечено выше, содержит “проблему $n, n+2$”. Однако, как подробно описано в обзоре [26], существует бесконечный класс функционалов роста крупнозернистости мод, которые приводят к уравнениям типа ВП (обобщенным уравнениям ВП). В дипломной работе мы исследуем некоторый подкласс таких функционалов. Этот подкласс имеет “геометрическую природу” (функционалы, которые зависят только от функционального импульса, но не от его производных). Последний наиболее прозрачен в конденсированных обозначениях (абстрактном пространстве) [24]. Справедливость наличия такого подкласса исследуется в соответствии с общим определением функционала роста крупнозернистости мод в терминах функционального интеграла, содержащего функционал блокинга. Это определение является отправной точкой для теории высших регуляторов. Также отметим, что это определение содержит дельта-функционал Дирака от весьма сложной конструкции, что делает его довольно сложным для прямого вычисления соответствующего функционального интеграла.

Несмотря на то, что уравнение ВП не содержит мнимую единицу, его также можно разделить на “классическую” и “квантовую” части. Следовательно, можно реализовать некий аналог функционального квазиклассического приближения. Однако такая квазиклассика отличается от квазиклассики для функционального уравнения Шрёдингера. Также в случае уравнения ВП требуется знание классического действия системы, как граничного условия. Последнее используется для аппроксимации квантовой части уравнения ВП. В дипломной работе мы получаем решение для приближенной иерархии ВП. В частности, мы аналитически находим трансляционно-инвариантные двухчастичную и четырехчастичную ампутированные ФГ (предполагается дельта-поле Λ). Например, уравнение для двухчастичной ампутированной ФГ является специальным уравнением Риккати, подобно ситуации в ГРГ. Решением последнего является комбинация модифицированных функций Бесселя. Для четырехчастичных ампутированных ФГ уравнение оказывается линейным, также подобно ситуации в ГРГ. Во всех расчетах мы используем оптимизированный регулятор (регулятор Литима) [24, 25]. Мы также обсуждаем физические (реализуемые непосредственно в скалярной КТП, что соответствует $\Lambda = 0$) двухчастичные и четырехчастичные ампутированные ФГ для различных значений константы связи в полиномиальной теории φ^4 в трехмерном пространстве с квадратичным безмассовым пропагатором. Отметим здесь, что полученное приближенное решение содержит информацию о критических экспонентах (показателях скейлинга ФГ), соответствующих возникновению конформных теорий поля [1, 2].

Данная дипломная работа имеет следующую структуру. В разделе 1 исследуется функциональное уравнение Гамильтона–Якоби. Раздел 2 посвящен функциональному уравнению Шрёдингера. Раздел 3 посвящен общему уравнению Вильсона–Полчински. В заключении, в разделе 4 мы даем итоговое обсуждение всех результатов, полученных в работе, и выделяем дальнейшие возможные области исследований.

Основными результатами, полученными и представленными в дипломной работе, являются: строгий вывод иерархии функционального уравнения ГЯ, решение первых уравнений иерархии для произвольного поля Λ, строгий вывод иерархии функционального уравнения Шрёдингера (иерархии функциональных уравнений непрерывности и квантового ГЯ), квазиклассическое решение первых уравнений иерархий (с оптическим потенциалом), строгий вывод функционального уравнения ВП из функционального управляющего (мастер) уравнения (уравнения, содержащего функционал роста крупнозернистости мод), квазиклассическое решение первых уравнений иерархии функционального уравнения ВП (с регулятором Литима), строгий вывод условий, когда функционал роста крупнозернистости мод является геометрическим.

1. Функциональное уравнение Гамильтона – Якоби и его иерархия

В данном разделе рассматривается функциональное уравнение ГЯ. Мы проводим параллели между координатным представлением и конденсированными обозначениями. Это удобно, так как изложение функционального уравнения Шрёдингера до определенного момента будет в терминах конденсированных обозначений. В соответствии с разделом "Введение" мы будем использовать термины "голографическое" поле, "голографические" ФГ и т.д. Это удобно, так как функциональное уравнение ГЯ применется в методе ГРГ [33] – [40]. Тем не менее, само уравнение появилось намного раньше метода ГРГ, и область его применения намного шире.

1.1. Функциональное уравнение Гамильтона – Якоби

Введем следующие обозначения: φ - скалярное поле, которое является функцией пространственной координаты x, Λ - голографическое (также скалярное) поле, которое является функцией пространственной координаты z, ϖ - функциональный импульс, который является функцией пространственной координаты x и функционалом поля Λ. Примем, что зависимость функционала от функции обозначается квадратными скобками, а зависимость функции от ее аргумента - круглыми скобками. Функциональное уравнение ГЯ для голографического функционала $\mathcal{S}$ в координатном представлении задается следующим обманчиво простым выражением ($x, y, z \in \mathbb{R}^D$, хотя в общем случае z может относиться к *другому* пространству с другим значением D):

$$\frac{\delta \mathcal{S}[\Lambda, \varphi]}{\delta \Lambda(z)} = \mathcal{H}[\Lambda, \varphi, \varpi](z), \quad \varpi(x) = \frac{\delta \mathcal{S}[\Lambda, \varphi]}{\delta \varphi(x)}. \tag{1}$$

Функциональное уравнение ГЯ в конденсированных обозначениях имеет вид (α, μ, ν - абстрактные или формальные индексы, которые могут включать непрерывные переменные (пространственную координату, время, импульс, частоту), дискретные переменные (спин, изоспин, аромат) и т. д.):

$$\frac{\delta \mathcal{S}[\Lambda, \varphi]}{\delta \Lambda_\alpha} = \mathcal{H}_\alpha[\Lambda, \varphi, \varpi], \quad \varpi_\mu = \frac{\delta \mathcal{S}[\Lambda, \varphi]}{\delta \varphi_\mu}. \tag{2}$$

Голографический функционал $\mathcal{S}$ является решением уравнения ГЯ, а функционал Гамильтона $\mathcal{H}$ является голографическим или геометрическим функционалом роста. Он может быть разложен в функциональный ряд Тейлора по полю ϖ. В координатном представлении имеем:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}[\Lambda, \varphi, \varpi](z) = \mathcal{H}^{(0)}[\Lambda, \varphi](z) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \dots \int d^D x_n \mathcal{H}^{(n)}[\Lambda, \varphi](z; x_1, \dots, x_n) \varpi(x_1) \dots \varpi(x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

В конденсированных обозначениях:

$$\mathcal{H}_\alpha[\Lambda, \varphi, \varpi] = \mathcal{H}_\alpha^{(0)}[\Lambda, \varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mu_1} \dots \int_{\mu_n} \mathcal{H}^{(n)}_{\alpha, \mu_1 \dots \mu_n}[\Lambda, \varphi] \varpi_{\mu_1} \dots \varpi_{\mu_n}. \tag{4}$$

Имитирую классическую физику (аналитическую механику), мы ограничиваемся нулевым и вторым слагаемыми (предполагая симметрию $\varpi \to -\varpi$, следовательно, $\mathcal{H}^{(1)} = 0$)

в выражении (3). Таким образом, мы получаем следующее выражение в координатном представлении (при $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{U}$ и $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{T}$):

$$\frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \mathit{\Lambda}\left(z\right)} = \mathcal{U}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z\right) + \frac{1}{2}\int d^D x_1 \int d^D x_2 \mathcal{T}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z; x_1, x_2\right) \frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_1\right)} \frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_2\right)}. \tag{5}$$

Ограничиваясь нулевым и вторым слагаемыми (предполагается симметрия $\varpi \to -\varpi$, что означает отсутствие линейного по функциональному импульсу члена в функционале Гамильтона. Это обычная ситуация в классической физике, когда нет диссипативных сил в системе) в разложении (4), мы приходим к следующему уравнению в конденсированных обозначениях:

$$\frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \mathit{\Lambda}_\alpha} = \mathcal{U}_\alpha\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right] + \frac{1}{2}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2} \mathcal{T}_{\alpha, \mu_1 \mu_2}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right] \frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi_{\mu_1}} \frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi_{\mu_2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим решение уравнения (5) в виде функционального ряда Тейлора по полю φ в координатном представлении:

$$\mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right] = \mathcal{S}^{(0)}\left[\mathit{\Lambda}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int d^D y_1 \ldots \int d^D y_n \, \mathcal{S}^{(n)}\left[\mathit{\Lambda}\right]\left(y_1, \ldots, y_n\right) \varphi\left(y_1\right) \ldots \varphi\left(y_n\right), \tag{7}$$

где функции $\mathcal{S}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ - семейство голографических ФГ, то есть решение иерархии ГЯ. В конденсированных обозначениях выражение (7) имеет вид:

$$\mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right] = \mathcal{S}^{(0)}\left[\mathit{\Lambda}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{\nu_1} \ldots \int_{\nu_n} \mathcal{S}^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_n}\left[\mathit{\Lambda}\right] \varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_n}. \tag{8}$$

Чтобы понять дальнейший вывод, рассмотрим вариационные производные $\mathcal{S}$ по полю φ. Первая вариационная производная:

$$\frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x\right)} = \int d^D y \, \mathcal{S}^{(2)}\left[\mathit{\Lambda}\right]\left(x, y\right) \varphi\left(y\right) + \mathcal{O}\left[\varphi^3\right], \quad \frac{\delta \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi_\mu} = \int_\nu \mathcal{S}^{(2)}_{\mu\nu}\left[\mathit{\Lambda}\right] \varphi_\nu + \mathcal{O}\left[\varphi^3\right]. \tag{9}$$

Вторая вариационная производная:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x\right) \delta \varphi\left(y\right)} = \mathcal{S}^{(2)}\left[\mathit{\Lambda}\right]\left(x, y\right) + \mathcal{O}\left[\varphi^2\right], \quad \frac{\delta^2 \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi_\mu \delta \varphi_\nu} = \mathcal{S}^{(2)}_{\mu\nu}\left[\mathit{\Lambda}\right] + \mathcal{O}\left[\varphi^2\right]. \tag{10}$$

Таким образом, мы видим, что самый простой способ получить иерархию ГЯ - напрямую дифференцировать уравнения (5) или (6). Это мы делаем в следующем разделе.

1.2. Уравнение для двухчастичной функции Грина

Выведем уравнение для двухчастичной голографической ФГ. Эта функция - наиболее важная из всех ФГ, поскольку голографические ФГ высшего порядка можно получить из линейных уравнений, в которых двухчастичная голографическая ФГ играет роль коэффициентов уравнений. Сначала берем вторую вариационную производную уравнения ГЯ (5):

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \mathit{\Lambda}\left(z\right)} \frac{\delta^2 \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(y_1\right) \delta \varphi\left(y_2\right)} &= \frac{\delta^2 \mathcal{U}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z\right)}{\delta \varphi\left(y_1\right) \delta \varphi\left(y_2\right)} + \\ &+ \int d^D x_1 \int d^D x_2 \mathcal{T}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z; x_1, x_2\right) \frac{\delta^2 \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z\right)}{\delta \varphi\left(x_1\right) \delta \varphi\left(y_1\right)} \frac{\delta^2 \mathcal{S}\left[\mathit{\Lambda}, \varphi\right]\left(z\right)}{\delta \varphi\left(x_2\right) \delta \varphi\left(y_2\right)} + \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Точки в (11) обозначают члены, содержащие вариационные производные функционала $\mathcal{T}$ по полю φ. Определение голографических n-частичных ФГ в терминах вариационных производных в координатном представлении имеет вид [24]:

$$\left.\frac{\delta^n \mathcal{S}\left[\varLambda, \varphi\right]}{\delta\varphi\left(y_1\right)\ldots\delta\varphi\left(y_n\right)}\right|_{\varphi=0} = \mathcal{S}^{(n)}\left[\varLambda\right]\left(y_1, \ldots, y_n\right). \tag{12}$$

Определение голографической n-частичной ФГ в терминах вариационных производных в конденсированных обозначениях выглядит следующим образом [24]:

$$\left.\frac{\delta^n \mathcal{S}\left[\varLambda, \varphi\right]}{\delta\varphi_{\nu_1}\ldots\delta\varphi_{\nu_n}}\right|_{\varphi=0} = \mathcal{S}^{(n)}_{\nu_1\ldots\nu_n}\left[\varLambda\right]. \tag{13}$$

Согласно определению (12), положив поле $\varphi = 0$ в уравнении (11), мы приходим к следующему уравнению для двухчастичной голографической ФГ в координатном представлении:

$$\begin{gathered}\frac{\delta\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(y_1, y_2\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)} = \mathcal{U}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(z; y_1, y_2\right) + \\ + \int d^D x_1 \int d^D x_2 \mathcal{T}^{(0)}\left[\varLambda\right]\left(z; x_1, x_2\right)\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(x_1, y_1\right)\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(x_2, y_2\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Уравнение для двухчастичной голографической ФГ в конденсированных обозначениях имеет вид:

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}\left[\varLambda\right]}{\delta\varLambda_\alpha} = \mathcal{U}^{(2)}_{\alpha,\nu_1\nu_2}\left[\varLambda\right] + \int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{T}^{(0)}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left[\varLambda\right]\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\left[\varLambda\right]\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2}\left[\varLambda\right]. \tag{15}$$

Уравнения (14) - (15) – сложные интегро-дифференциальные уравнения. Однако наличие дополнительных симметрий в системе может значительно упростить их. В следующем подразделе мы рассмотрим некоторые такие симметрии.

1.3. Трансляционно-инвариантное решение для функций Грина на дельта-полевой конфигурации

В КТП и теории критических явлений трансляционная инвариантность является наиболее естественной [1, 2]. Поэтому рассмотрим трансляционно-инвариантную задачу в координатном представлении:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(z; y_1, y_2\right) &= \mathcal{U}\left[\varLambda\right]\left(z; y_1 - y_2\right) = \int_k e^{ik(y_1-y_2)}\mathcal{U}\left[\varLambda\right]\left(z; k\right), \\ \mathcal{T}^{(0)}\left[\varLambda\right]\left(z; y_1, y_2\right) &= \mathcal{T}\left[\varLambda\right]\left(z; y_1 - y_2\right) = \int_k e^{ik(y_1-y_2)}\mathcal{T}\left[\varLambda\right]\left(z; k\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Для преобразования Фурье мы используем компактные обозначения для D-мерного интегрирования по импульсному пространству $\mathbb{R}^D$:

$$\int_k \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} = \int\frac{dk_1}{2\pi}\ldots\int\frac{dk_D}{2\pi} \Rightarrow \int_k (2\pi)^D\delta^{(D)}\left(k\right) = 1. \tag{17}$$

Поскольку симметрия решения часто сохраняет симметрию коэффициентов уравнения, рассмотрим трансляционно-инвариантную двухчастичную голографическую ФГ в координатном представлении:

$$\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(y_1, y_2\right) = \mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(y_1 - y_2\right) = \int_k e^{ik(y_1-y_2)}\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right). \tag{18}$$

Уравнение (14) для двухчастичной голографической ФГ для трансляционно-инвариантной задачи (16) в координатном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(y_1-y_2\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}&=\mathcal{U}\left[\varLambda\right]\left(z;y_1-y_2\right)+\\&+\int d^Dx_1\int d^Dx_2\mathcal{T}\left[\varLambda\right]\left(z;x_1-x_2\right)\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(x_1-y_1\right)\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(x_2-y_2\right).\end{aligned}\tag{19}$$

Уравнение (19) для двухчастичной голографической ФГ для трансляционно-инвариантной задачи в импульсном представлении является уравнением с "диагональной" правой частью (все суммирования или интегрирования исчезли):

$$\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}=\mathcal{U}\left[\varLambda\right]\left(z;k\right)+\mathcal{T}\left[\varLambda\right]\left(z;k\right)\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(-k\right)\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right).\tag{20}$$

В следующих подразделах, используя формулу интегрирования для функционалов, мы перепишем уравнение (20) без первой вариационной производной по $\varLambda$. Однако, в этом подразделе мы выбираем другую стратегию. Рассмотрим двухчастичную голографическую ФГ $\mathcal{S}$ как функционал поля $\varLambda$ и ее функциональный ряд Тейлора по $\varLambda$ в координатном представлении:

$$\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right)=\mathcal{S}^{(0)}\left(k\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^Dz_1\ldots\int d^Dz_n\,\mathcal{S}^{(n)}\left(z_1,\ldots,z_n;k\right)\varLambda\left(z_1\right)\ldots\varLambda\left(z_n\right).\tag{21}$$

Вариационная производная выражения (21):

$$\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}=\mathcal{S}^{(1)}\left(z;k\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int d^Dz_2\ldots\int d^Dz_n\,\mathcal{S}^{(n)}\left(z,z_2,\ldots,z_n;k\right)\varLambda\left(z_2\right)\ldots\varLambda\left(z_n\right).\tag{22}$$

Воспользуемся тем фактом, что мы можем выбирать разные конфигурации полей $\varLambda$. Мы вводим конфигурацию дельта-поля $\varLambda$ (w - произвольный параметр, D - размерность пространства, на котором определено поле $\varLambda$). С геометрической точки зрения мы выбираем направление в пространстве функций. Результаты, полученные при таком выборе, качественно остаются справедливыми для широкого класса функций и пространств функций:

$$\varLambda\left(z_l\right)=\varLambda\,\delta^{(D)}\left(z_l-w\right)\equiv\varLambda_{\delta,w}.\tag{23}$$

Для дельта-полевой конфигурации $\varLambda$ выражение (21):

$$\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right)\Big|_{\varLambda_{\delta,w}}=\mathcal{S}^{(0)}\left(k\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varLambda^n}{n!}\mathcal{S}^{(n)}\left(w,\ldots,w;k\right)\equiv\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right).\tag{24}$$

Для дельта-полевой конфигурации $\varLambda$ выражение (22) имеет следующий вид:

$$\left.\frac{\delta\mathcal{S}\left[\varLambda\right]\left(k\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}\right|_{\varLambda_{\delta,w}}=\mathcal{S}^{(1)}\left(z;k\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varLambda^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{S}^{(n)}\left(z,w,\ldots,w;k\right).\tag{25}$$

Выражения (24) - (25) показывают, что если мы выберем дельта-полевую конфигурацию $\varLambda$ в уравнении (20), а затем положим $z=w$, уравнение (20) станет замкнутым (с точностью до симметрии $k\to-k$) относительно функции $\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right)$ (24):

$$\frac{\partial\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right)}{\partial\varLambda}=\mathcal{U}\left(\varLambda;w;k\right)+\mathcal{T}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{S}\left(\varLambda;w;-k\right)\mathcal{S}\left(\varLambda;w;k\right).\tag{26}$$

Если коэффициентные функции $\mathcal{U}\left(\Lambda;w;k\right)$ и $\mathcal{T}\left(\Lambda;w;k\right)$ являются четными функциями от k, получаем замкнутое относительно функции $\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)$ (24) уравнение. Это означает, что соответствующие функционалы в левых частях равенства (16) являются четными функционалами по отношению к перестановке y_1 и y_2. Последнее верно всегда, поскольку эти функционалы являются коэффициентами функционального ряда Тейлора. Чтобы иметь возможность рассматривать нечетные функционалы, следует изменить саму постановку задачи. Таким образом, мы получаем к следующеее уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)}{\partial \Lambda} = \mathcal{U}\left(\Lambda;w;k\right) + \mathcal{T}\left(\Lambda;w;k\right)\mathcal{S}^2\left(\Lambda;w;k\right). \tag{27}$$

Уравнение (27) является уравнением Риккати. Для произвольных четных коэффициентных функций $\mathcal{U}\left(\Lambda;w;k\right)$ и $\mathcal{T}\left(\Lambda;w;k\right)$ уравнение Риккати не может быть проинтегрировано в квадратурах. Некоторые частные случаи уравнения Риккати, возникающие в ГРГ и ФРГ, приведены ниже.

1.3.1. Специальное уравнение Риккати

Рассмотрим случай специального уравнения Риккати. Для получения специального уравнения Риккати функционалы $\mathcal{U}\left[\Lambda\right](z;k)$ и $\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;k)$ следует выбрать следующим образом (с произвольными функциями $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и произвольными параметрами a и b):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;k) &= -\left\{\int d^D z' \mathcal{A}^{\frac{1}{a}}\left(z';z;k\right)\Lambda\left(z'\right)\right\}^a, \\ \mathcal{U}\left[\Lambda\right](z;k) &= +\left\{\int d^D z' \mathcal{B}^{\frac{1}{b}}\left(z';z;k\right)\Lambda\left(z'\right)\right\}^b. \end{aligned} \tag{28}$$

Для дельта-полевой конфигурации Λ и $z = w$ выражение (28) примет следующий вид:

$$\mathcal{T}\left(\Lambda;w;k\right) = -\mathcal{A}\left(w;w;k\right)\Lambda^a, \quad \mathcal{U}\left(\Lambda;w;k\right) = +\mathcal{B}\left(w;w;k\right)\Lambda^b. \tag{29}$$

Уравнение (27) переходит в специальное уравнение Риккати (зависимости w и k опущены для компактности дальнейших выражений):

$$\frac{\partial \mathcal{S}\left(\Lambda\right)}{\partial \Lambda} = \mathcal{B}\Lambda^b - \mathcal{A}\Lambda^a\mathcal{S}^2\left(\Lambda\right). \tag{30}$$

Общее решение специального уравнения Риккати (30) в терминах модифицированных функций Бесселя I и K имеет следующий вид ($\mathcal{C}$ - это "постоянная" интегрирования - функция, независящая от Λ):

$$\mathcal{S}\left(\Lambda\right) = \mathcal{B}\Lambda^{b+1}\frac{\mathcal{C}K_d\left(X\right) + I_d\left(X\right)}{\mathcal{C}\tilde{K}_d\left(X\right) + \tilde{I}_d\left(X\right)}. \tag{31}$$

В выражении (31) используются компактные обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_d\left(X\right) &= \left(b+1\right)K_d\left(X\right) - \frac{a+b+2}{2}XK_{d+1}\left(X\right), \\ \tilde{I}_d\left(X\right) &= \left(b+1\right)I_d\left(X\right) + \frac{a+b+2}{2}XI_{d+1}\left(X\right), \\ X &= \frac{2\sqrt{\mathcal{A}\mathcal{B}}\Lambda^{\frac{a+b+2}{2}}}{a+b+2}, \quad d = \frac{b+1}{a+b+2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Решение (32) можно найти в литературе в статьях по ГРГ [33] – [40]. Мы также столкнемся с ним при решении уравнений приближенной иерархии Вильсона-Полчински.

1.3.2. Автомодельное уравнение Риккати

Рассмотрим случай автомодельного уравнения Риккати. В этом случае уравнение (27) имеет решение $\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)$ вида (параметр a - каноническая размерность функции $\mathcal{S}$, а функция $\widetilde{\mathcal{S}}$ является безразмерной функцией новых автомодельных переменных ω и $\varkappa$):

$$\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)=\Lambda^{a}\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega\left(\Lambda;w\right);\varkappa\left(\Lambda;k\right)\right). \tag{33}$$

Левая часть уравнения (27) - полная производная функции $\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)$ по Λ, может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)}{\partial\Lambda}=\Lambda^{a-1}\left\{a+\Lambda\frac{\partial\omega}{\partial\Lambda}\frac{\partial}{\partial\omega}+\Lambda\frac{\partial\varkappa}{\partial\Lambda}\frac{\partial}{\partial\varkappa}\right\}\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega;\varkappa\right). \tag{34}$$

По определению, автомодельное решение $\widetilde{\mathcal{S}}$ не зависит явно от Λ, поэтому для такого решения уравнение (27) может быть переписано в виде:

$$\left\{a+\beta_1\left(\Lambda;\omega\right)\frac{\partial}{\partial\omega}+\beta_2\left(\Lambda;\varkappa\right)\frac{\partial}{\partial\varkappa}\right\}\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega;\varkappa\right)=u\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)+t\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)\widetilde{\mathcal{S}}^{2}(\omega;\varkappa). \tag{35}$$

В выражении (35) мы используем следующие сокращенные обозначения для “бета-функций” такой теории [1, 2]:

$$\beta_1\left(\Lambda;\omega\right)=\Lambda\frac{\partial\omega\left(\Lambda;\omega\right)}{\partial\Lambda},\quad\beta_2\left(\Lambda;\varkappa\right)=\Lambda\frac{\partial\varkappa\left(\Lambda;\varkappa\right)}{\partial\Lambda}. \tag{36}$$

Если бета-функции и коэффициентные функции $u\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)$ и $t\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)$

$$u\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)=\frac{\mathcal{U}\left(\Lambda;w,k\right)}{\Lambda^{a-1}},\quad t\left(\Lambda;\omega;\varkappa\right)=\Lambda^{a+1}\mathcal{T}\left(\Lambda;w;k\right) \tag{37}$$

не зависят явно от Λ, уравнение (35) действительно имеет автомодельное решение. Рассмотрим степенную зависимость функций ω и $\varkappa$ (b и c - произвольные параметры):

$$\omega\left(\Lambda;w\right)=\Lambda^{b}w,\quad\varkappa\left(\Lambda;k\right)=\Lambda^{c}k. \tag{38}$$

В этом случае выражение для бета-функций $\beta_1\left(\Lambda;\omega\right)$ и $\beta_2\left(\Lambda;\varkappa\right)$ выглядит следующим образом:

$$\beta_1\left(\Lambda;\omega\right)=\beta_1\left(\omega\right)=b\omega,\quad\beta_2\left(\Lambda;\varkappa\right)=\beta_2\left(\varkappa\right)=c\varkappa. \tag{39}$$

Таким образом, мы приходим к автомодельному уравнению Риккати:

$$\left\{b\omega\frac{\partial}{\partial\omega}+c\varkappa\frac{\partial}{\partial\varkappa}\right\}\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega;\varkappa\right)=u\left(\omega;\varkappa\right)-a\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega;\varkappa\right)+t\left(\omega;\varkappa\right)\widetilde{\mathcal{S}}^{2}(\omega;\varkappa). \tag{40}$$

Для заданных коэффициентных функций $u\left(\omega;\varkappa\right)$ и $t\left(\omega;\varkappa\right)$ уравнение (40) можно решить. После этого можно перейти к более общему вычислению критических экспонент. Если точное уравнение Риккати имеет уравнение (40) как предельный случай, можно рассматривать возмущение решения уравнения (40) в виде:

$$\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right)=\Lambda^{a}\widetilde{\mathcal{S}}\left(\omega\left(\Lambda;w\right);\varkappa\left(\Lambda;k\right)\right)+\delta\mathcal{S}\left(\Lambda;w;k\right). \tag{41}$$

Точное уравнение Риккати следует линеаризовать относительно второго члена в правой части выражения (41). Эта линеаризация определяет значение критических экспонент в системе. Это стандартная методика ФРГ [24] – [27]: масштабированная форма уравнений потока ФРГ (соответствующая задача Коши) наиболее удобна для исследования неподвижных точек ренормализационной группы.

1.4. Формула интегрирования для функционалов

В этом пункте мы выводим формулу интегрирования (функциональное обобщение формулы Ньютона - Лейбница или НЛ) для функционалов. Подробное обсуждение вывода формулы НЛ интересно, потому что уравнения потока ФРГ (Вильсона-Полчински или Веттериха-Морриса) выводятся аналогичным способом [24]. Действительно, введение любого t-деформированного функционала с последующим дифференцированием по масштабу t и преобразование полученного результата в выражение через функциональные производные по аргументу функционала являются ключевыми моментами в выводе формулы НЛ, а также различных уравнений потока ФРГ. Можно сказать, что формула НЛ - частный случай ФРГ.

Проведем вывод для некоторого функционала $\mathcal{F}[\varLambda]$. Первый шаг: добавляем приращение $\varDelta_t$, зависящее от параметра t, к аргументу $\varLambda$ функционала $\mathcal{F}[\varLambda]$. Второй шаг: мы можем переписать приращение в терминах функционального оператора трансляции. Третий шаг: взяв производную от полученного выражения по масштабу t и снова используя оператор функциональной трансляции, мы приходим к следующему выражению:

$$\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_t]=e^{\left(\varDelta_t\middle|\frac{\delta}{\delta\varLambda}\right)}\mathcal{F}[\varLambda], \quad \frac{\partial\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_t]}{\partial t}=\left(\frac{\partial\varDelta_t}{\partial t}\middle|\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_t]}{\delta\varLambda}\right). \tag{42}$$

Проинтегрируем уравнение (42) по t в пределах от t_0 до t_1:

$$\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_{t_1}]-\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_{t_0}]=\int\limits_{t_0}^{t_1}dt\int d^Dz\,\frac{\partial\varDelta_t(z)}{\partial t}\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_t]}{\delta\varLambda(z)}. \tag{43}$$

Чтобы получить функциональную формулу НЛ в канонической форме, функцию $\varDelta_t$ нужно выбрать в простейшем виде $\varDelta_t=t\varDelta$. Размерности $\varDelta_t$ и $\varDelta$ совпадают, поскольку параметр t безразмерен. В этом случае мы получаем выражение:

$$\mathcal{F}[\varLambda+t_1\varDelta]-\mathcal{F}[\varLambda+t_0\varDelta]=\int\limits_{t_0}^{t_1}dt\int d^Dz\,\varDelta(z)\,\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta_t]}{\delta\varLambda(z)}. \tag{44}$$

Выберем $t_0=0$ и $t_1=1$. В этом случае мы получаем каноническую формулу НЛ для функционалов:

$$\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta]-\mathcal{F}[\varLambda]=\int\limits_0^1 dt\int d^Dz\,\varDelta(z)\,\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+t\varDelta]}{\delta\varLambda(z)}. \tag{45}$$

Полученная формула интегрирования (45) восстанавливает функционал по его первой функциональной производной. Для самосогласованности полученной конструкции необходимо выполнение нескольких дополнительных условий. В частности, вторая функциональная производная функционала $\mathcal{F}[\varLambda]$ не должна зависеть от порядка дифференцирования. Эти условия выполняются во всех конструкциях, рассмотренных в данной работе.

Практическое применение формулы интегрирования (45) основывается на двух дополнительных выражениях: на преобразовании трансляции переменных и на функциональном уравнении для первой вариационной производной:

$$\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+t\Delta]}{\delta(\varLambda+t\Delta)(z)}=\frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda+t\Delta]}{\delta\varLambda(z)}, \quad \frac{\delta\mathcal{F}[\varLambda]}{\delta\varLambda(z)}=\mathcal{G}[\varLambda](z)\,. \tag{46}$$

Подставляя выражение (46) в (45), мы получаем формулу для восстановления функционала по его первой вариационной производной:

$$\mathcal{F}[\varLambda+\varDelta]-\mathcal{F}[\varLambda]=\int\limits_0^1 dt\int d^Dz\,\varDelta(z)\,\mathcal{G}[\varLambda+t\varDelta](z)\,. \tag{47}$$

В следующих подразделах мы будем часто использовать формулу для восстановления функционала (47, чтобы доказать важный результат: решения и выводы, полученные для конфигурации дельта-поля Λ, остаются в силе для широкого класса полевых конфигураций.

1.5. Трансляционно-инвариантное функциональное решение для ФГ

Воспользуемся формулой восстановления функционала (47, чтобы проинтегрировать функциональное уравнение (20):

$$\mathcal{S}\left[\Lambda+\Delta\right](k)-\mathcal{S}\left[\Lambda\right](k)=\int\limits_0^1 dt\left\{\mathcal{U}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k)+\mathcal{T}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k)\left|\mathcal{S}\left[\Lambda+t\Delta\right](k)\right|^2\right\}. \qquad (48)$$

Функционалы в правой части уравнения (47) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k)&\equiv\int d^Dz\,\Delta\left(z\right)\mathcal{U}\left[\Lambda+t\Delta\right](z;k)\,,\\ \mathcal{T}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k)&\equiv\int d^Dz\,\Delta\left(z\right)\mathcal{T}\left[\Lambda+t\Delta\right](z;k)\,.\end{aligned} \qquad (49)$$

Функционалы (49) представляют собой функциональные коэффициенты уравнения (48), причем функции Λ и Δ зависят от пространственной координаты z. Функционалы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{T}$ в правой части равенств (49) могут явно зависеть от одной и той же координаты z. Далее мы выберем дельта-полевые конфигурации для функций Λ и Δ. Соответствующие амплитуды мы обозначим Λ и Δ. Выражение (52) поясняет это подробнее.

Теперь рассмотрим функционалы (49) и получим предельное решение для $\mathcal{S}$, когда $\|\Lambda\|\ \to+\infty$, $\|\Delta\|<+\infty$. Этот предельный случай важен, так как функциональный ряд Тейлора представляет собой разложение по степеням поля Λ. Другая сторона асимптотики представляет особый интерес. Она имеет следующий вид:

$$\left|\mathcal{S}\left[\Lambda\right](k)\right|=\sqrt{-\frac{\int d^Dz\,\Delta\left(z\right)\mathcal{U}\left[\Lambda\right](z;k)}{\int d^Dz\,\Delta\left(z\right)\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;k)}}. \qquad (50)$$

Используя теорему о среднем значении с $\tau\in(0,1)$, можно представить уравнение (48) в следующей форме:

$$\mathcal{S}\left[\Lambda+\Delta\right](k)-\mathcal{S}\left[\Lambda\right](k)=\int\limits_0^1 dt\,\mathcal{U}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k)+\left|\mathcal{S}\left[\Lambda+\tau\Delta\right](k)\right|^2\int\limits_0^1 dt\,\mathcal{T}\left[\Lambda;\Delta\right](t;k). \qquad (51)$$

Уравнение (51) даёт возможность сделать различные оценки для функционального уравнения (48). Это также отправная точка для приближенного решения уравнения (48).

Рассмотрим далее дельта-полевые конфигурации Λ и Δ (соответствующие амплитуды мы также обозначим как Λ и Δ). Таким образом, мы выбираем определенные направления в пространстве функций:

$$\Lambda\left(z\right)=\Lambda\,\delta^{(D)}\left(z-w\right)\equiv\Lambda_{\delta,w},\quad\Delta\left(z\right)=\Delta\,\delta^{(D)}\left(z-w\right)\equiv\Delta_{\delta,w}. \qquad (52)$$

Дополнительно положим $\Lambda=\Lambda_0$, $\Delta=\Lambda_1-\Lambda_0$ и $t\Delta=\Lambda_t-\Lambda_0$. Тогда функциональное уравнение (48) становится интегральным уравнением для некоторой функции $\mathcal{S}\left(\Lambda_t;w;k\right)$:

$$\mathcal{S}\left(\Lambda_1;w;k\right)-\mathcal{S}\left(\Lambda_0;w;k\right)=\int\limits_{\Lambda_0}^{\Lambda_1}d\Lambda_t\left\{\mathcal{U}\left(\Lambda_t;w;k\right)+\mathcal{T}\left(\Lambda_t;w;k\right)\left|\mathcal{S}\left(\Lambda_t;w;k\right)\right|^2\right\}. \qquad (53)$$

Выражение для функции $\mathcal{S}\left(\Lambda_t; w; k\right)$, входящей в интегральное уравнение (53), имеет вид:

$$\mathcal{S}\left(\Lambda_t; w; k\right) = \mathcal{S}^{(0)}\left(k\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_t^n}{n!}\, \mathcal{S}^{(n)}\left(w, \ldots, w; k\right), \quad \Lambda_t = t\left(\Lambda_1 - \Lambda_0\right) + \Lambda_0. \tag{54}$$

Продифференцируем интегральное уравнение (53) по верхнему пределу интегрирования Λ_1, предполагая, что нижний предел Λ_0 - константа. В результате мы приходим к уравнениям Риккати (26) или (27), которые были получены ранее другим способом. Таким образом, приведенный выше вывод является независимой проверкой ранее полученных результатов. В следующем подразделе мы получим уравнение для других конфигураций полей Λ и Δ - постоянных полей. Это позволит нам сделать важный вывод о природе функционального уравнения (48).

1.6. Трансляционно-инвариантное решение для ФГ в постоянном поле

Вернёмся к функциональному уравнению (48) и его функциональным коэффициентам (49). Мы рассматриваем конфигурации постоянного поля: $\Lambda\left(z\right) = \Lambda$ и $\Delta\left(z\right) = \Delta$. Как и раньше, положим $\Lambda = \Lambda_0$, $\Delta = \Lambda_1 - \Lambda_0$ и $t\Delta = \Lambda_t - \Lambda_0$. Функциональное уравнение (48) становится интегральным уравнением для некоторой функции $\mathcal{S}\left(\Lambda_t; k\right)$:

$$\mathcal{S}\left(\Lambda_1; k\right) - \mathcal{S}\left(\Lambda_0; k\right) = \int\limits_{\Lambda_0}^{\Lambda_1} d\Lambda_t \int d^D z \left\{\mathcal{U}\left(\Lambda_t; z; k\right) + \mathcal{T}\left(\Lambda_t; z; k\right) \left|\mathcal{S}\left(\Lambda_t; k\right)\right|^2\right\}. \tag{55}$$

Выражение для функции $\mathcal{S}\left(\Lambda_t; k\right)$, входящей в интегральное уравнение (55), имеет вид:

$$\mathcal{S}\left(\Lambda_t; k\right) = \mathcal{S}^{(0)}\left(k\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_t^n}{n!} \int d^D z_1 \ldots \int d^D z_n\, \mathcal{S}^{(n)}\left(z_1, \ldots, z_n; k\right). \tag{56}$$

Продифференцируем интегральное уравнение (55) по верхнему пределу интегрирования Λ_1, предполагая, что нижний предел Λ_0 - константа. В результате мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{S}\left(\Lambda_1; k\right)}{\partial \Lambda_1} = \int d^D z\, \mathcal{U}\left(\Lambda_1; z; k\right) + \left|\mathcal{S}\left(\Lambda_1; k\right)\right|^2 \int d^D z\, \mathcal{T}\left(\Lambda_1; z; k\right). \tag{57}$$

Если коэффициентные функции $\mathcal{U}\left(\Lambda_1; z; k\right)$ и $\mathcal{T}\left(\Lambda_1; z; k\right)$ четные функции k, получаем замкнутое относительно функции $\mathcal{S}\left(\Lambda_1; k\right)$ уравнение Риккати:

$$\frac{\partial \mathcal{S}\left(\Lambda_1; k\right)}{\partial \Lambda_1} = \mathcal{U}\left(\Lambda_1; k\right) + \mathcal{T}\left(\Lambda_1; k\right) \mathcal{S}^2\left(\Lambda_1; k\right). \tag{58}$$

Функции в правой части уравнения (58) определяются следующим образом:

$$\mathcal{U}\left(\Lambda_1; k\right) \equiv \int d^D z\, \mathcal{U}\left(\Lambda_1; z; k\right), \quad \mathcal{T}\left(\Lambda_1; k\right) \equiv \int d^D z\, \mathcal{T}\left(\Lambda_1; z; k\right). \tag{59}$$

Мы снова получили уравнение Риккати. Таким образом, в двух предельных случаях (для дельта-полевой конфигурации и для постоянных полей Λ и Δ) мы получаем уравнение Риккати для двухчастичной голографической ФГ. Это не доказывает, что уравнение Риккати может быть получено для любой конфигурации Λ и Δ из соответствующего пространства полей. Однако по полученным результатам можно утверждать, что такое подпространство действительно существует. Таким образом, уравнение (48) является "стабильным" относительно выбора полей Λ и Δ. В конце данного подраздела сделаем одно замечание. Технически уравнения (57) и (58) могут быть получены путем интегрирования функционального уравнения (20) по z, а затем выбором конфигурации постоянного поля для Λ.

1.7. Сепарабельное решение для ФГ при дельта-полевой конфигурации

Рассмотрим сепарабельную задачу. Сепарабельные задачи часто встречается в моделях квантовой механики, ядерной физики и в теории сверхпроводимости. В координатном представлении сепарабельная задача выглядит так:

$$\mathcal{T}^{(0)}\left[\Lambda\right](z;y_1,y_2)=\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;y_1)\,\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;y_2)\,,\quad \mathcal{U}^{(2)}\left[\Lambda\right](z;y_1,y_2)=0. \tag{60}$$

Поскольку симметрия решения часто сохраняет симметрию коэффициентов уравнения, мы рассматриваем сепарабельную двухчастичную голографическую ФГ в координатном представлении:

$$\mathcal{S}^{(2)}\left[\Lambda\right](y_1,y_2)=\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_1)\,\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_2)\,. \tag{61}$$

Кроме того, уравнение (14) для двухчастичной голографической ФГ сепарабельной задачи (60) в координатном представлении имеет вид:

$$\frac{\delta}{\delta\Lambda(z)}\left\{\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_1)\,\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_2)\right\}=\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_1)\,\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y_2)\left\{\int d^Dx\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;x)\,\mathcal{S}\left[\Lambda\right](x)\right\}^2. \tag{62}$$

Уравнение (62) для двухчастичной голографической ФГ можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\delta\mathcal{S}^{(2)}\left[\Lambda\right](y_1,y_2)}{\delta\Lambda(z)}=\mathcal{K}^2\left[\Lambda\right](z)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\Lambda\right](y_1,y_2)\,. \tag{63}$$

Выражение для функционала $\mathcal{K}$, входящего в уравнение (63):

$$\mathcal{K}\left[\Lambda\right](z)=\int d^Dx\mathcal{T}\left[\Lambda\right](z;x)\,\mathcal{S}\left[\Lambda\right](x)\,. \tag{64}$$

Принимая во внимание результаты, полученные в предыдущих разделах, для дальнейшего вывода решения уравнения (63) мы выбираем стратегию, основанную на дельта-полевой конфигурации Λ. Поэтому двухчастичную голографическую ФГ $\mathcal{S}$ можно рассматривать как функционал поля Λ, а ее функциональный ряд Тейлора по Λ в координатном представлении имеет вид:

$$\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y)=\mathcal{S}^{(0)}(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^Dz_1\ldots\int d^Dz_n\,\mathcal{S}^{(n)}(z_1,\ldots,z_n;y)\,\Lambda(z_1)\ldots\Lambda(z_n)\,. \tag{65}$$

Вариационная производная выражения (65):

$$\frac{\delta\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y)}{\delta\Lambda(z)}=\mathcal{S}^{(1)}(z;y)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int d^Dz_2\ldots\int d^Dz_n\,\mathcal{S}^{(n)}(z,z_2,\ldots,z_n;y)\,\Lambda(z_2)\ldots\Lambda(z_n)\,. \tag{66}$$

Для дельта-полевой конфигурации Λ выражение (65):

$$\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y)\Big|_{\Lambda_{\delta,w}}=\mathcal{S}^{(0)}(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda^n}{n!}\,\mathcal{S}^{(n)}(w,\ldots,w;y)\equiv\mathcal{S}(\Lambda;w;y)\,. \tag{67}$$

Для дельта-полевой конфигурации Λ выражение (66) имеет вид:

$$\left.\frac{\delta\mathcal{S}\left[\Lambda\right](y)}{\delta\Lambda(z)}\right|_{\Lambda_{\delta,w}}=\mathcal{S}^{(1)}(z;y)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathcal{S}^{(n)}(z,w,\ldots,w;y)\,. \tag{68}$$

Выражения (67) - (68) демонстрируют, что если мы выберем дельта-полевую конфигурацию $\mathit{\Lambda}$ в уравнении (63), а затем положим $z = w$, уравнение (63) станет замкнутым (с точностью до симметрии $k \to -k$) относительно произведения функций $\mathcal{S}\left(\mathit{\Lambda}; w; y\right)$ (67):

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(2)}\left(\mathit{\Lambda}; w; y_1, y_2\right)}{\partial \mathit{\Lambda}} = \mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right)\mathcal{S}^{(2)}\left(\mathit{\Lambda}; w; y_1, y_2\right). \tag{69}$$

Уравнение (69) является псевдолинейным уравнением: коэффициент $\mathcal{K}$ уравнения (69) зависит от функции $\mathcal{S}^{(2)}$, что видно из равенства (64). Такое уравнение можно переписать в интегральной форме, повторив решение линейного уравнения ($\mathcal{C}$ - "постоянная" интегрирования - функция, не зависящая от $\mathit{\Lambda}$):

$$\mathcal{S}^{(2)}\left(\mathit{\Lambda}; w; y_1, y_2\right) = \mathcal{C}\left(w; y_1, y_2\right) e^{\int_{\mathit{\Lambda}_0}^{\mathit{\Lambda}} d\mathit{\Lambda}' \mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}', w\right)}. \tag{70}$$

Функция $\mathcal{C}$ должна быть сепарабильной:

$$\mathcal{C}\left(w; y_1, y_2\right) = \mathcal{C}\left(w; y_1\right)\mathcal{C}\left(w; y_2\right). \tag{71}$$

По определению (64),

$$\mathcal{K}\left(\mathit{\Lambda}; w\right) = \int d^D x \mathcal{T}\left(\mathit{\Lambda}; w; x\right)\mathcal{S}\left(\mathit{\Lambda}; w; x\right), \tag{72}$$

применеяя интегральный оператор с ядром

$$\int d^D y_1 \int d^D y_2 \mathcal{T}\left(\mathit{\Lambda}; w; y_1\right)\mathcal{T}\left(\mathit{\Lambda}; w; y_2\right) \tag{73}$$

к обеим частям интегрального уравнения (70) получаем замкнутое интегральное уравнение для функции $\mathcal{K}^2$:

$$\mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right) = \mathcal{C}_1^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right) e^{\int_{\mathit{\Lambda}_0}^{\mathit{\Lambda}} d\mathit{\Lambda}' \mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}', w\right)}. \tag{74}$$

Выражение для функции $\mathcal{C}_1$, появляющейся в уравнении (74), имеет вид:

$$\mathcal{C}_1\left(\mathit{\Lambda}; w\right) = \int d^D y \mathcal{T}\left(\mathit{\Lambda}; w; y\right)\mathcal{C}\left(w; y\right). \tag{75}$$

Взяв логарифмическую производную выражения (74):

$$\frac{\partial \ln \mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right)}{\partial \mathit{\Lambda}} = \frac{\partial \ln \mathcal{C}_1^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right)}{\partial \mathit{\Lambda}} + \mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right). \tag{76}$$

мы получаем дифференциальное уравнение Бернулли. Последнее сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой функций и поэтому может быть проинтегрировано в квадратурах. Решение уравнения (76) выглядит следующим образом:

$$\mathcal{K}^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right) = \frac{\mathcal{C}_1^2\left(\mathit{\Lambda}; w\right)}{\mathcal{C}_2\left(w\right)\mathcal{C}_1^2\left(\mathit{\Lambda}_0; w\right) - \int_{\mathit{\Lambda}_0}^{\mathit{\Lambda}} d\mathit{\Lambda}' \mathcal{C}_1^2\left(\mathit{\Lambda}'; w\right)}, \quad \mathcal{C}_2\left(w\right) > 0. \tag{77}$$

Новая "константа" интегрирования $\mathcal{C}_2$ - функция, зависящая от w. Таким образом, мы получили решение для двухчастичной голографической ФГ $\mathcal{S}^{(2)}$ (из выражения (77) получаем функцию $\mathcal{K}$, из выраженяи (75) получаем функцию $\mathcal{C}_1$, наконец, из выражения (70) получаем функцию $\mathcal{S}^{(2)}$). В заключение подраздела отметим, что функциональное уравнение (63) также может быть исследовано с помощью формулы для восстановления функционалов (47). Установлено, что сепарабельная задача (60) обладает свойством "устойчивости" относительно выбора полей $\mathit{\Lambda}$ и $\mathit{\Delta}$, также как и трансляционно-инвариантная задача (16).

2. Функциональное уравнение Шрёдингера и квазиклассическое приближение

В этом разделе мы рассмотрим функциональное уравнение Шрёдингера. Как и в прошлом разделе, посвященном функциональному уравнению ГЯ, для ясности мы широко используем конденсированные обозначения [24]. В этом разделе мы представим строгий вывод квантового функционального уравнения ГЯ, содержащего квантовую поправку, и уравнения непрерывности из функционального уравнения Шрёдингера, а также дадим вывод функционального квазиклассического приближения.

2.1. Функциональное уравнение Шрёдингера

Прежде всего, сделаем важное замечание о разнице между квантовой механикой и квантовой теорией поля. В КМ волновая функция Ψ является "обычной" функцией нескольких переменных. Эти переменные - пространственная координата x и время t. В КТП роль волновой функции играет волновой функционал Ψ. Этот функционал зависит от своих аргументов - полей Λ (аналог времени t) и φ (аналог пространственной координаты x). Пространственная координата x и время t теперь являются аргументами полей Λ и φ (в дипломной работе мы рассматриваем время как одну из пространственных координат в D-мерном евклидовом пространстве). Поэтому уравнение Шрёдингера в КМ является уравнением в частных производных, тогда как в КТП оно является уравнением в вариационных производных. Таким образом, функциональное уравнение Шрёдингера в координатном представлении задается следующим выражением:

$$\frac{\delta\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\Lambda\left(z\right)}=i\hat{\mathcal{H}}\left(z\right)\Psi\left[\Lambda,\varphi\right],\quad\hat{\mathcal{H}}\left(z\right)=\mathcal{H}\left[\Lambda,\varphi,\hat{\varpi}\right]\left(z\right),\quad\hat{\varpi}\left(x\right)=\frac{\delta}{\delta\varphi\left(x\right)}.\tag{78}$$

Функционал Ψ, фигурирующий в уравнении (78), является волновым функционалом, φ - скалярным полем, которое является функцией пространственной координаты x, $\hat{\varpi}$ с точностью до мнимой единицы – оператор функционального импульса. В общем случае функциональный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ можно представить в виде функционального ряда Тейлора, но мы рассмотрим более специфический случай суммы функционалов кинетической и потенциальной энергии, как в стандартной КМ:

$$\hat{\mathcal{H}}\left(z\right)=\int d^{D}x_{1}\int d^{D}x_{2}\,\mathcal{K}\left[\Lambda,\varphi\right]\left(z;x_{1},x_{2}\right)\hat{\varpi}\left(x_{1}\right)\hat{\varpi}\left(x_{2}\right)+\mathcal{U}\left[\Lambda,\varphi\right]\left(z\right).\tag{79}$$

Как и в случае функционального уравнения ГЯ, все пространственные переменные $x,y,z\in\mathbb{R}^{D}$, хотя с геометрической точки зрения z может относиться к другому пространству с другим значением D. Функционал $\mathcal{K}$ является обобщением тензора обратных масс (со знаком минус, что удобно в данной работе). Сам тензор обратных масс возникает в задачах классической и квантовой механики. Например, уравнение Шрёдингера с тензором обратных масс часто встречается в задачах квантовой теории конденсированного состояния. Также в задачах классической и квантовой механики этот тензор может зависеть от координат (в случае функционального обобщения – от полуй). Например, уравнение Шрёдингера с массой, зависящей от x, также встречается в задачах квантовой теории конденсированного состояния.

Потенциальная энергия $\mathcal{U}$ в классической и квантовой механике является произвольной функцией пространственной координаты x и, возможно, времени t. Эта функция не является сверткой с какой-либо степенью импульса (в отличие от тензора обратных масс). Типичный пример этой функции - полином четвертой степени - ангармонический осциллятор. В случае функционального обобщения функционал потенциальной энергии $\mathcal{U}$ зависит от полей Λ (аналог времени t) и φ (аналог пространственной координаты x). Интегрирование по x_1 и x_2 в члене, соответствующем потенциальной энергии $\mathcal{U}$ в выражении (79), не требуется. Если мы выберем функционал $\mathcal{U}$ в виде полинома четвертой степени (по полю φ), мы получим функциональное обобщение ангармонического осциллятора.

В конденсированных обозначениях выражения (78) - (79) более прозрачны (напомним, что функциональный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ зависит от всех значений функционального оператора импульса $\hat{\varpi}$, поэтому аргумент $\hat{\varpi}$ не указан в квадратных скобках при $\hat{\mathcal{H}}$):

$$\frac{\delta\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\Lambda_\alpha}=i\hat{\mathcal{H}}_\alpha\Psi\left[\Lambda,\varphi\right],\quad \hat{\mathcal{H}}_\alpha=\mathcal{H}_\alpha\left[\Lambda,\varphi,\hat{\varpi}\right],\quad \hat{\varpi}_\mu=\frac{\delta}{\delta\varphi_\mu}, \tag{80}$$

где функциональный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$

$$\hat{\mathcal{H}}_\alpha=\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left[\Lambda,\varphi\right]\hat{\varpi}_{\mu_1}\hat{\varpi}_{\mu_2}+\mathcal{U}_\alpha\left[\Lambda,\varphi\right]. \tag{81}$$

2.2. Вывод функциональных уравнений непрерывности и квантового ГЯ

Будем читать, что $\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]\in\mathbb{C}$, параметризуем $\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]=\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]e^{i\mathcal{S}[\Lambda,\varphi]}$, где $\mathcal{A},\mathcal{S}\in\mathbb{R}$ и $\mathcal{A}>0$. Итак, вариационные производные волнового функционала в конденсированных обозначениях (точки означают вариационные производные высшего порядка):

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\Lambda_\alpha}&=e^{i\mathcal{S}[\Lambda,\varphi]}\left\{\frac{\delta\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\Lambda_\alpha}+i\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]\frac{\delta\mathcal{S}\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\Lambda_\alpha}\right\},\\ \frac{\delta\Psi\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\varphi_\mu}&=e^{i\mathcal{S}[\Lambda,\varphi]}\left\{\frac{\delta\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\varphi_\mu}+i\mathcal{A}\left[\Lambda,\varphi\right]\frac{\delta\mathcal{S}\left[\Lambda,\varphi\right]}{\delta\varphi_\mu}\right\}\ldots\end{aligned} \tag{82}$$

Опустим в обозначениях скобки $[\Lambda,\varphi]$, указывающие явную функциональную зависимость от Λ и φ, далее в этом подразделе. Множитель $e^{i\mathcal{S}}$ вынесем из-под знака интеграла (поскольку $\mathcal{S}$ не зависит ни от μ_1, ни от μ_2) в (80) - (81). Деление на него дает (далее для простоты дальнейших вычислений мы рассматриваем независящий от φ функционал $\mathcal{K}$):

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Lambda_\alpha}+i\mathcal{A}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Lambda_\alpha}=\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\bigg\{-\mathcal{A}\frac{\delta^2\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}-2\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}+\\ +i\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}-i\mathcal{A}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}\bigg\}+i\mathcal{A}\mathcal{U}_\alpha.\end{aligned} \tag{83}$$

Действительная часть выражения (83) дает функциональное уравнение непрерывности:

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left\{\mathcal{A}\frac{\delta^2\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}+2\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}\right\}=0. \tag{84}$$

Разделив мнимую часть выражения (83) на $i\mathcal{A}$, мы получим функциональное уравнение ГЯ с так называемой квантовой поправкой (квантовое функциональное уравнение ГЯ):

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\Lambda_\alpha}+\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_1}}\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\varphi_{\mu_2}}=\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{Quant})}+\mathcal{U}_\alpha, \tag{85}$$

где добавочное квантовое слагаемое $\mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})}$

$$\mathcal{U}_\alpha^{(\mathrm{Quant})}=\frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\mu_1}\int_{\mu_2}\mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\frac{\delta^2\mathcal{A}}{\delta\varphi_{\mu_1}\delta\varphi_{\mu_2}}. \tag{86}$$

Введём новую параметризацию положительного функционала $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}[\varLambda, \varphi] := e^{\mathcal{R}[\varLambda,\varphi]}$. Поскольку функционал $\mathcal{A}$ является производящим функционалом полных ФГ (включающих несвязанные диаграммы), а функционал $\mathcal{R}$ является производящим функционалом связанных ФГ, такая репараметризация является естественной. Тогда (точки обозначают вариационные производные высшего порядка)

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \varLambda_\alpha} = e^{\mathcal{R}} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \varLambda_\alpha} = \mathcal{A} \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \varLambda_\alpha} \dots \tag{87}$$

Разделив уравнение непрерывности (84) на $\mathcal{A}$, получим:

$$\frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \varLambda_\alpha} + \int_{\mu_1} \int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2} \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\mu_1} \delta \varphi_{\mu_2}} + 2 \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \varphi_{\mu_1}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\mu_2}} \right\} = 0. \tag{88}$$

Чтобы получить квазиклассическое приближение для функционального уравнения Шрёдингера, рассмотрим масштабирование ($\hbar$ - это формальная "приведенная постоянная Планка"):

$$\mathcal{S} \to \frac{\mathcal{S}}{\hbar}, \quad \mathcal{K} \to \hbar^2 \mathcal{K}, \quad \frac{\delta}{\delta \varLambda} \to \hbar \frac{\delta}{\delta \varLambda}. \tag{89}$$

Квантовое функциональное уравнение ГЯ не вяеется инвариантным относительно этого преобразования. Добавочное квантовое слагаемое масштабируется пропорционально $\hbar^2$:

$$\mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})} \to \hbar^2 \mathcal{U}^{(\mathrm{Quant})}. \tag{90}$$

Выражение (90) означает, что в пределе $\hbar \to 0$ (квазиклассическое приближение в КТП) квантовое функциональное уравнение ГЯ переходит в классическое, поскольку квантовая поправка обращается в нуль (дополнительных слагаемых, пропорциональных первой степени $\hbar$, не возникает):

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varLambda_\alpha} + \int_{\mu_1} \int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\mu_1}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_{\mu_2}} = \mathcal{U}_\alpha. \tag{91}$$

2.3. Иерархии функциональных уравнений ГЯ и непрерывности

Выведем первые три уравнения для ФГ, соответствующих иерархии функционального уравнения ГЯ. Для этого мы выполняем следующие операции (где "запятая" означает вычисление при последующем выборе $\varphi = 0$ в обеих частях выражения (91)):

$$\text{Eq.1)} \quad \varphi = 0; \quad \text{Eq.2)} \quad \frac{\delta^2}{\delta \varphi_{\nu_1} \delta \varphi_{\nu_2}}, \ \varphi = 0; \quad \text{Eq.3)} \quad \frac{\delta^4}{\delta \varphi_{\nu_1} \delta \varphi_{\nu_2} \delta \varphi_{\nu_3} \delta \varphi_{\nu_4}}, \ \varphi = 0. \tag{92}$$

Нечетные производные дадут нули, поскольку мы предполагаем, что все расматриваемые функционалы четные по полю φ. В КМ решение функционального уравнения Шрёдингера, четное по пространственной координате x, соответствует основному состоянию системы. Теорема о нулях волновой функции утверждает, что четность собственных состояний чередуется. Таким образом, мы находим как основное состояние, так и возбужденные: второе, четвертое и т.д. Отметим, что квазиклассическое приближение плохо подходит для нахождения основного состояния, но мы можем использовать его как первый шаг итерационной процедуры решения точного функционального уравнения Шрёдингера. Опуская в обозначениях скобки $[\varLambda]$, указывающие явную функциональную зависимость от $\varLambda$, далее в этом подразделе, получим следующие уравнения для ФГ:

$$\left. \frac{\delta^n \mathcal{S}[\varLambda, \varphi]}{\delta \varphi_{\nu_1} \dots \delta \varphi_{\nu_n}} \right|_{\varphi=0} = \mathcal{S}^{(n)}_{\nu_1 \dots \nu_n}[\varLambda], \quad \left. \frac{\delta^n \mathcal{R}[\varLambda, \varphi]}{\delta \varphi_{\nu_1} \dots \delta \varphi_{\nu_n}} \right|_{\varphi=0} = \mathcal{R}^{(n)}_{\nu_1 \dots \nu_n}[\varLambda]. \tag{93}$$

Уравнение 1):

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(0)}}{\delta \Lambda_\alpha} = \mathcal{U}^{(0)}_\alpha. \tag{94}$$

Уравнение 2):

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}}{\delta \Lambda_\alpha} + 2\int_{\mu_1}\int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2} = \mathcal{U}^{(2)}_{\alpha,\nu_1\nu_2}. \tag{95}$$

Уравнение 3):

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(4)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}{\delta \Lambda_\alpha} + 2\int_{\mu_1}\int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\Upsilon_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \mathcal{U}^{(4)}_{\alpha,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}, \tag{96}$$

где

$$\Upsilon_{\mu_1\mu_2,\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_2\nu_3\nu_4} + \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_3\nu_4} + \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_3}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_2\nu_4} + \mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\nu_4}\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3}. \tag{97}$$

Определение ФГ дается выражением (13). Заметим, что $\forall n > 2$ получаются линейные замкнутые уравнения относительно $\mathcal{S}^{(n)}$, и зацепления $n, n+2$ не происходит. Это можно получить для ФГ $\mathcal{S}^{(n)}$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. Также отметим, что функционал $\mathcal{K}$ не зависит от φ.

Получим первые два уравнения для ФГ, соответствующие иерархии функционального уравнения непрерывности. Для этого применим следующие операции к уравнению (88):

$$\text{Eq.1}') \quad \varphi = 0; \quad \text{Eq.2}') \quad \frac{\delta^2}{\delta\varphi_{\nu_1}\delta\varphi_{\nu_2}},\ \varphi = 0. \tag{98}$$

Таким образом, получаем следующие уравнения для ФГ (напомним, что функционал $\mathcal{S}$ - это фаза функционала Ψ, а функционал $\mathcal{R} = \ln|\Psi|$):

Уравнение $1'$):

$$\frac{\delta \mathcal{R}^{(0)}}{\delta \Lambda_\alpha} + \int_{\mu_1}\int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_1\mu_2} = 0. \tag{99}$$

Уравнение $2'$):

$$\frac{\delta \mathcal{R}^{(2)}_{\nu_1\nu_2}}{\delta \Lambda_\alpha} + \int_{\mu_1}\int_{\mu_2} \mathcal{K}_{\alpha,\mu_1\mu_2}\left\{\mathcal{S}^{(4)}_{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} + 2\mathcal{R}^{(2)}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_2} + 2\mathcal{R}^{(2)}_{\mu_1\nu_2}\mathcal{S}^{(2)}_{\mu_2\nu_1}\right\} = 0. \tag{100}$$

2.4. Трансляционно-инвариантное решение для ФГ

В этом подразделе мы представим точные трансляционно-инвариантные решения сначала для уравнений (94) - (96), а затем для уравнений (99) - (100). Отметим, что в КТП и в теории критических явлений трансляционная инвариантность пространства (пространства-времени) является наиболее естественной симметрией, поскольку эта инвариантность приводит к закону сохранения импульса (энергии-импульса) в теории, например, в диаграммах Фейнмана. Для получения точных трансляционно-инвариантных решений выбирается дельта-полевая конфигурация голографического поля Λ.

2.4.1. Иерархия функционального уравнения Гамильтона – Якоби

Для трансляционно-инвариантной задачи уравнение (94) остается неизменным:

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(0)}[\Lambda]}{\delta \Lambda(z)} = \mathcal{U}^{(0)}[\Lambda](z). \tag{101}$$

Как и раньше, рассмотрим дельта-полевую конфигурацию Λ (23). Напомним, что, используя формулу для восстановления функционалов (47), мы убедились, что решения и выводы, полученные для дельта-полевой конфигурации Λ, остаются справедливыми для широкого класса полей. Для дельта-полевой конфигурации Λ при условии $z = w$ выражение (101) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(0)}(\Lambda; w)}{\partial \Lambda} = \mathcal{U}^{(0)}(\Lambda; w). \tag{102}$$

Общее решение уравнения (102) имеет вид:

$$\mathcal{S}^{(0)}(\Lambda; w) = \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} d\Lambda' \, \mathcal{U}^{(0)}(\Lambda'; w) + \mathcal{S}^{(0)}(\Lambda_0; w). \tag{103}$$

Условие трансляционной инвариантности существенно упрощает рассматриваемые уравнения иерархии порядка выше нуля (вакуумного среднего). Для ФГ с более чем одним аргументом это лучше всего видно в импульсном представлении. Выполняя преобразование Фурье трансляционно-инвариантной n-частичной ФГ $\mathcal{S}^{(n)}$ в импульсных компактных обозначениях (17), мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{(n)}[\Lambda](y_1, \ldots, y_n) &= \int_{k_1} \ldots \int_{k_n} e^{i(k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n)} \tilde{\mathcal{S}}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n), \\
\tilde{\mathcal{S}}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n) &= (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + \ldots + k_n) \, \mathcal{S}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n).
\end{aligned} \tag{104}$$

Это справедливо и для трансляционно-инвариантной n-частичной ФГ $\mathcal{R}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(n)}[\Lambda](y_1, \ldots, y_n) &= \int_{k_1} \ldots \int_{k_n} e^{i(k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n)} \tilde{\mathcal{R}}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n), \\
\tilde{\mathcal{R}}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n) &= (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + \ldots + k_n) \, \mathcal{R}^{(n)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_n).
\end{aligned} \tag{105}$$

Для выражений (96) - (97) с условием транляционной инвариантности после простого переопределения в импульсном представлении получаем:

$$\frac{\delta \mathcal{S}^{(4)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_4)}{\delta \Lambda(z)} + 2\Upsilon[\Lambda](z; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{U}^{(4)}[\Lambda](z; k_1, \ldots, k_4), \tag{106}$$

где

$$\Upsilon[\Lambda](z; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{S}^{(4)}[\Lambda](k_1, \ldots, k_4) \sum_{j=1}^{4} \mathcal{K}[\Lambda](z; k_j) \, \mathcal{S}^{(2)}[\Lambda](-k_j). \tag{107}$$

Учитывая дельта-полевую конфигурацию Λ (23) и условие $z = w$, выражения (106) - (107) принимают вид:

$$\frac{\partial \mathcal{S}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4)}{\partial \Lambda} + 2\Upsilon(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{U}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4), \tag{108}$$

где

$$\Upsilon(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) = \mathcal{S}^{(4)}(\Lambda; w; k_1, \ldots, k_4) \sum_{j=1}^{4} \mathcal{K}(\Lambda; w; k_j) \, \mathcal{S}^{(2)}(\Lambda; w; -k_j). \tag{109}$$

Во всех выражениях (104) - (109) подразумевается специальная кинематика, удовлетворяющая закону сохранения импульса: $k_1 + \ldots + k_4 = 0$. Результирующее уравнение (108) - (109) является линейным неоднородным дифференциальным уравнениям первого порядка. Действительно, в правой части уравнения (108) – заданная функция $\mathcal{U}^{(4)}$ переменной Λ, а в левой части уравнения (108) фигурируют производная неизвестной функции $\mathcal{S}^{(4)}$

по Λ и произведение Υ (109) неизвестной функции $\mathcal{S}^{(4)}$ и функции $\mathcal{KS}^{(2)}$, известной из предыдущего уравнения иерархии. Решение такого уравнения можно получить в общем виде. Это решение можно найти в любом справочнике по дифференциальным уравнениям. Отметим, что линейные неоднородные дифференциальные уравнения также могут быть получены для ФГ высокого порядка $\mathcal{S}^{(n)}$. Только двухчастичная ФГ $\mathcal{S}^{(2)}$, задающая коэффициенты уравнения (108) - (109), удовлетворяет нелинейному уравнению (95). Что касается уравнения (95), это уравнение уже рассматривалось в разделе о функциональном уравнении ГЯ и его иерархии. Таким образом, все ФГ $\mathcal{S}^{(n)}$ могут быть получены в квадратурах. В следующем подразделе такая же ситуация возникает для ФГ $\mathcal{R}^{(n)}$.

2.4.2. Иерархия функционального уравнения непрерывности и оптический потенциал

Рассмотрим иерархию, соответствующую функциональному уравнению непрерывности. Условие трансляционной инвариантности не меняет уравнение (99), но создает бесконечное слагаемое: вакуумную петлю. Тот факт, что среднее значение вакуума пропорционально $(2\pi)^D\delta^{(D)}(0)$, является стандартным в КТП [8], [49]-[51]. Заметим, что среднее значение вакуума лишь в некотором смысле аналогично плотности энергии вакуума, вычисленной без обрезания на планковской длине, поскольку волновой функционал Ψ в общем случае не совпадает с матрицей рассеяния. Однако в дипломной работе нас интересует получение *конечного волнового функционала* Ψ. Поэтому мы выбираем следующую стратегию для решения функционального уравнения Шрёдингера: чтобы вычесть расходящуюся вакуумную петлю, мы используем перенормировку через так называемый (комплексный) оптический потенциал:

$$\mathcal{U}\left[\Lambda,\varphi\right](z) \to \mathcal{U}^{(\mathrm{Optic})}\left[\Lambda,\varphi\right](z) = \mathcal{U}\left[\Lambda,\varphi\right](z) - i\mathcal{W}\left[\Lambda,\varphi\right](z)\,. \tag{110}$$

Аналогично оптическому потенциалу в КМ, оптический потенциал $\mathcal{U}^{(\mathrm{Optic})}$ в КТП содержит информацию о вакууме теории. Далее, добавление оптического потенциала $\mathcal{U}^{(\mathrm{Optic})}$ в трансляционно-инвариантную версию общего уравнения (99) дает:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(0)}\left[\Lambda\right]}{\delta\Lambda(z)} + (2\pi)^D\delta^{(D)}(0)\int_k \mathcal{K}\left[\Lambda\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\Lambda\right](-k) = \mathcal{W}\left[\Lambda\right](z)\,. \tag{111}$$

Разбиение $\mathcal{W}$ на сумму сингулярной и регулярной частей $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\mathrm{sing}} + \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ и поглощение бесконечной вакуумной петли в сингулярной части $\mathcal{W}_{\mathrm{sing}}$ завершает регуляризацию:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(0)}\left[\Lambda\right]}{\delta\Lambda(z)} = \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}\left[\Lambda\right](z)\,. \tag{112}$$

Заметим, что этот выбор делает функциональное уравнение Шрёдингера *нелинейным относительно волнового функционала* Ψ. Действительно, согласно выражениям (111) - (112) сингулярная часть оптического потенциала $\mathcal{W}_{\mathrm{sing}}$ равна интегралу от функции $\mathcal{S}^{(2)}$. Функция $\mathcal{S}^{(2)}$, в свою очередь, является коэффициентом разложения в функциональный ряд Тейлора функционала $\mathcal{S}$. Последний является фазой функционала Ψ.

Эта ситуация в некотором смысле повторяет аналогичную ситуацию в КТП: затравочные параметры модели перенормируются в соответствии с расходимостями, порожденными интегралами от ФГ. Далее, учитывая дельта-полевую конфигурацию Λ (23) и выбирая после этого $z = w$, выражение (112) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial\mathcal{R}^{(0)}(\Lambda;w)}{\partial\Lambda} = \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}(\Lambda;w)\,. \tag{113}$$

Общее решение уравнения (113):

$$\mathcal{R}^{(0)}\left(\varLambda;w\right)=\int_{\varLambda_0}^{\varLambda}d\varLambda'\,\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}\left(\varLambda';w\right)+\mathcal{R}^{(0)}\left(\varLambda_0;w\right). \tag{114}$$

Для задачи, инвариантной относительно преобразования трансляции, общее уравнение (100) в импульсном представлении имеет вид:

$$\frac{\delta\mathcal{R}^{(2)}\left[\varLambda\right](k)}{\delta\varLambda\left(z\right)}+\int_q\mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;q)\,\mathcal{S}^{(4)}\left[\varLambda\right](q,-q,k,-k)+2\varSigma\left[\varLambda\right](z;k)=0, \tag{115}$$

где функция $\varSigma$

$$\varSigma\left[\varLambda\right](z;k)=\mathcal{K}\left[\varLambda\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda\right](k)\,\mathcal{R}^{(2)}\left[\varLambda\right](-k)+(k\rightleftarrows -k). \tag{116}$$

Для дельта-полевой конфигурации $\varLambda$ (23), если $z=w$, выражения (115) - (116) изменяются следующим образом:

$$\frac{\partial\mathcal{R}^{(2)}\left(\varLambda;w;k\right)}{\partial\varLambda}+\int_q\mathcal{K}\left(\varLambda;w;q\right)\mathcal{S}^{(4)}\left(\varLambda;w;q,-q,k,-k\right)+2\varSigma\left(\varLambda;w;k\right)=0, \tag{117}$$

где функция $\varSigma$

$$\varSigma\left(\varLambda;w;k\right)=\mathcal{K}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{S}^{(2)}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{R}^{(2)}\left(\varLambda;w;-k\right)+(k\rightleftarrows -k). \tag{118}$$

Предположим, что каждая функция четная:

$$\varSigma\left(\varLambda;w;k\right)=2\mathcal{K}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{S}^{(2)}\left(\varLambda;w;k\right)\mathcal{R}^{(2)}\left(\varLambda;w;k\right). \tag{119}$$

Уравнение (117) для двухчастичной ФГ $\mathcal{R}^{(2)}$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решение такого уравнения можно найти в любом справочнике по дифференциальным уравнениям. Отметим, что линейные неоднородные дифференциальные уравнения также могут быть получены для ФГ высшего порядка $\mathcal{R}^{(n)}$. Таким образом, задача иерархий полностью разрешима. В заключение этого подраздела сделаем еще одно важное замечание: решение функционального уравнения Шрёдингера может быть получено методом итераций, где первым шагом итерации является квазиклассическое решение.

2.4.3. Открытые квантово-полевые системы

Теперь применим полученную ранее формулу интегрирования (формулу восстановления) функционала (47) к уравнению (111), второму уравнению иерархии функционального уравнения непрерывности:

$$\mathcal{R}^{(0)}\left[\varLambda+\varDelta\right]-\mathcal{R}^{(0)}\left[\varLambda\right]+(2\pi)^D\,\delta^{(D)}(0)\,\mathrm{Loop}\left[\varLambda;\varDelta\right]=\int\limits_0^1dt\int d^Dz\,\varDelta\left(z\right)\mathcal{W}\left[\varLambda+t\varDelta\right](z)\,, \tag{120}$$

где функционал Loop

$$\mathrm{Loop}\left[\varLambda;\varDelta\right]\equiv\int\limits_0^1dt\int d^Dz\,\varDelta\left(z\right)\int_k\mathcal{K}\left[\varLambda+t\varDelta\right](z;k)\,\mathcal{S}^{(2)}\left[\varLambda+t\varDelta\right](-k)\,. \tag{121}$$

Мы видим, что сингулярный член, пропорциональный $(2\pi)^D\delta^{(D)}(0)$, возникает при любых конфигурациях поля Λ. Для полноты предыдущих результатов рассмотрим случай, противоположный случаю дельта-поля (постоянное поле): $\Lambda(z) = \Lambda$ и $\Delta(z) = \Delta$. Как и раньше, выбираем $\Lambda = \Lambda_0$, $\Delta = \Lambda_1 - \Lambda_0$ и $t\Delta = \Lambda_t - \Lambda_0$. Выражения (120) - (121) упрощаются:

$$\mathcal{R}^{(0)}(\Lambda_1) - \mathcal{R}^{(0)}(\Lambda_0) + (2\pi)^D \delta^{(D)}(0) \,\mathrm{Loop}(\Lambda_1; \Lambda_0) = \int\limits_{\Lambda_0}^{\Lambda_1} d\Lambda_t \int d^D z \,\mathcal{W}(\Lambda_t; z), \tag{122}$$

где функция Loop

$$\mathrm{Loop}(\Lambda_1; \Lambda_0) \equiv \int\limits_{\Lambda_0}^{\Lambda_1} d\Lambda_t \int d^D z \int_k \mathcal{K}(\Lambda_t; z; k)\, \mathcal{S}^{(2)}(\Lambda_t; -k). \tag{123}$$

Как и прежде, нас интересует получение конечного волнового функционала Ψ. По этой причине мы выбираем следующую регуляризацию:

$$\int\limits_{\Lambda_0}^{\Lambda_1} d\Lambda_t \int d^D z \,\mathcal{W}_{\mathrm{sing}}(\Lambda_t; z) = (2\pi)^D \delta^{(D)}(0) \,\mathrm{Loop}(\Lambda_1; \Lambda_0). \tag{124}$$

Такой выбор снова делает функциональное уравнение Шрёдингера нелинейным относительно волнового функционала Ψ. Таким образом, *сингулярная часть оптического потенциала $\mathcal{W}_{\mathrm{sing}}$ соответствует динамике вакуума квантово-полевой системы, а регулярная часть оптического потенциала $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ соответствует управляемому внешнему воздействию на квантово-полевую систему.*

В конце подраздела сделаем следующие замечания. Во-первых, если мы откажемся от требования конечности вакуумного среднего $\mathcal{R}^{(0)}$ и определим функцию r

$$\mathcal{R}^{(0)}(\Lambda) = (2\pi)^D \delta^{(D)}(0)\, r(\Lambda), \tag{125}$$

тогда мы можем принять $\mathcal{W} = 0$ (оптический потенциал не требуется). Уравнение для функции r имеет вид:

$$r(\Lambda_1) - r(\Lambda_0) + \mathrm{Loop}(\Lambda_1; \Lambda_0) = 0. \tag{126}$$

Такое уравнение можно решить. Во-вторых, если функциональный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ является неэрмитовым оператором, то собственные значения могут быть из $\mathbb{R}$. Однако, в общем случае, трансляционно-инвариантное функциональное уравнение Шрёдингера описывает открытую квантово-полевую систему. И здесь наличие трансляционной инвариантности существенно, так как, если мы от неё откажемся, мы можем получить конечное выражение для вакуумного среднего $\mathcal{R}^{(0)}$. Отметим, что несмотря на то, что теория открытых квантовых систем представлена, например, в [46] – [48], подробное исследование приложений функционального уравнения Шрёдингера в теории открытых квантовых систем, в частности, явного построения оптических потенциалов, может являться предметом дальнейших исследований.

3. Функциональное уравнение Вильсона – Полчински и функциональная ренормализационная группа

В этом разделе мы применяем опыт, полученный в двух предыдущих разделах, для изучения ФРГ потоковых уравнений [24] – [27]. В частности, устанавливается аналог квазиклассического приближения для функционального уравнения ВП. В этом приближении последнее сводится к функциональному уравнению ГЯ. Мы приведем подробное решение полученного уравнения. Также мы даем ответ на вопрос, когда функционал роста крупнозернистости мод можно рассматривать как чисто геометрический, другими словами, когда он зависит только от функционального импульса, но не от его производных.

3.1. Квантовая и классическая части уравнения ВП

Рассмотрим неоднозначность ФРГ потоковых процедур (с некоторыми незначительными отличиями в определении функционала роста крупнозернистости по сравнению с обзором [26]). Для определенности рассмотрим функциональное уравнение ВП для производящего функционала $\mathcal{G}$ ампутированных ФГ. Это уравнение является частным случаем более общей конструкции функционального потока, которая может быть сформулирована в форме неявного (по отношению к функционалу $\mathcal{G}$) функционального (управляющего) уравнения. В координатном представлении такое управляющее уравнение имеет вид:

$$\frac{\delta\mathcal{G}\left[\varLambda,\varphi\right]}{\delta\varLambda\left(z\right)}=\int d^Dx\,\frac{\delta\varPsi\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right](z;x)}{\delta\varphi\left(x\right)}+\int d^Dx\,\varPsi\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right](z;x)\,\varpi\left(x\right),\quad \varpi\left(x\right)=\frac{\delta\mathcal{G}\left[\varLambda,\varphi\right]}{\delta\varphi\left(x\right)}. \tag{127}$$

В конденсированных обозначениях управляющее уравнение выглядит так:

$$\frac{\delta\mathcal{G}\left[\varLambda,\varphi\right]}{\delta\varLambda_\alpha}=\int_\mu\frac{\delta\varPsi_{\alpha,\mu}\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right]}{\delta\varphi_\mu}+\int_\mu\varPsi_{\alpha,\mu}\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right]\varpi_\mu,\quad \varpi_\mu=\frac{\delta\mathcal{G}\left[\varLambda,\varphi\right]}{\delta\varphi_\mu}. \tag{128}$$

Объект $\varPsi$ имеет один "индекс" x и является функционалом от поля φ. Данный функционал называется функционалом роста крупнозернистости мод в методе ФРГ. Более того, он зависит от функционала $\mathcal{G}$, что делает функциональные потоковые уравнения (127) - (128) неявными. Смысл $\varPsi$ в параметризации процесса роста крупнозернистости степеней свободы в системе, другими словами, в параметризации той или иной ФРГ потоковой процедуры. В то же время $\varPsi$ удовлетворяет только общим условиям, а его конкретный вид зависит от конкретного случая. Также сделаем важное замечание: мы предполагаем, что $\varPsi$ зависит только от функционального импульса ϖ и не зависит от производных ϖ по φ. Такой функционал можно назвать геометрическим. Справедливость этого предположения мы покажем позже.

Чтобы получить функциональное уравнение ВП из (127) - (128), нам нужно сделать следующий выбор в координатном представлении:

$$\varPsi\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right](z;x)=\frac{1}{2}\int d^Dy\,\frac{\delta G\left[\varLambda\right](x,y)}{\delta\varLambda\left(z\right)}\,\varpi\left(y\right). \tag{129}$$

В конденсированных обозначениях такой выбор имеет вид:

$$\varPsi_{\alpha,\mu}\left[\varLambda,\varphi,\varpi\right]=\frac{1}{2}\int_\nu\frac{\delta G_{\mu\nu}\left[\varLambda\right]}{\delta\varLambda_\alpha}\,\varpi_\nu. \tag{130}$$

Интегральное ядро в выражениях (129) - (130) является вариационной производной некоторого функционала G ($\varLambda$-деформированного пропагатора) по полю $\varLambda$ и будет определено в следующем подразделе. Таким образом, функциональные уравнения (127) - (128) демонстрируют нам большую функциональную неоднозначность метода ФРГ. Тем не менее, эта двусмысленность - не недостаток, а возможность, которая может дать нам более глубокое понимание КТП. Таким образом, функциональное уравнение ВП для производящего функционала $\mathcal{G}$ ампутированных ФГ гласит [24] – [27]:

$$\frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \Lambda\left(z\right)} = \frac{1}{2} \int d^D x_1 \int d^D x_2 \, \frac{\delta G\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_1\right) \delta \varphi\left(x_2\right)} + \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_1\right)} \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_2\right)} \right\}. \quad (131)$$

В конденсированных обозначениях это уравнение имеет вид:

$$\frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \Lambda_\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\mu_1} \int_{\mu_2} \frac{\delta G_{\mu_1 \mu_2}\left[\Lambda\right]}{\delta \Lambda_\alpha} \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi_{\mu_1} \delta \varphi_{\mu_2}} + \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi_{\mu_1}} \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi_{\mu_2}} \right\}. \quad (132)$$

В некоторой литературе (например, [24]) функциональные уравнения (131) - (132) называются ФРГ потоковыми уравнениями ВП в координатном представлении и в абстрактной форме, соответственно. Для решения этих уравнений можно использовать разложение функционала $\mathcal{G}$ в функциональный ряд Тейлора по степеням поля φ. Это разложение порождает бесконечную иерархию связанных интегро-дифференциальных уравнений для соответствующих функций $\mathcal{G}^{(n)}$, которые являются коэффициентами разложения функционального ряда Тейлора. Например, уравнение для двухчастичной функции $\mathcal{G}^{(2)}$ содержит также четырехчастичную функцию $\mathcal{G}^{(4)}$ в специальной кинематике. Для простоты мы предполагаем, что функции нечетного порядка $\mathcal{G}^{(n)}$ тождественно равны нулю, что верно для теорий с лагранжианами взаимодействия четным по полю φ. Уравнение для четырехчастичной функции $\mathcal{G}^{(4)}$ содержит шестичастичную функцию $\mathcal{G}^{(6)}$ (в специальной кинематике) и т.д. Как отмечалось во введении, это называется “проблемой n, $n+2$ ”, и данная проблема является основной трудностью метода ФРГ.

Производящий функционал $\mathcal{G}$ ампутированных ФГ равен со знаком минус известному классическому действию взаимодействия S_{int} полевой теории в пределе $\Lambda \to +\infty$ [24]:

$$\mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right] \to -S_{\text{int}}\left[\varphi\right] = -\int d^D x \, g\left(x\right) V\left[\varphi\left(x\right)\right], \quad \Lambda \to +\infty. \quad (133)$$

Выражение (133) является более удобнй отправной точкой для приближений, чем нулевое начальное условие. Далее заменим квантовую часть функционального уравнения ВП следующим образом:

$$\frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \Lambda\left(z\right)} = \frac{1}{2} \int d^D x_1 \int d^D x_2 \, \frac{\delta G\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} \left\{ \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_1\right)} \frac{\delta \mathcal{G}\left[\Lambda, \varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_2\right)} - \frac{\delta^2 S_{\text{int}}\left[\varphi\right]}{\delta \varphi\left(x_1\right) \delta \varphi\left(x_2\right)} \right\}. \quad (134)$$

Таким образом, мы приходим к функциональному уравнению ГЯ специального вида. Как отмечалось во “Введении”, уравнения этого типа являются базовыми в методе ГРГ [33] – [40]. В следующих двух подразделах мы получим трансляционно-инвариантное решение соответствующей иерархии уравнений. Это возможно, поскольку функциональное уравнение (134) не содержит “проблемы n, $n+2$”.

3.2. Решение приближенного уравнения ВП: двухчастичная ФГ

Повторяя вычисления, представленные в разделе “Функциональное уравнение Гамильтона–Якоби и его иерархия”, легко вывести уравнение для двухчастичной ампутированной ФГ $\mathcal{G}^{(2)}$. В общем случае данное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{G}^{(2)}\left[\Lambda\right]\left(y_1, y_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} &= -\frac{1}{2} \int d^D x_1 \int d^D x_2 \, \frac{\delta G\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} \, S^{(4)}_{\text{int}}\left(x_1, x_2, y_1, y_2\right) + \\ &+ \int d^D x_1 \int d^D x_2 \, \frac{\delta G\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} \, \mathcal{G}^{(2)}\left[\Lambda\right]\left(x_1, y_1\right) \mathcal{G}^{(2)}\left[\Lambda\right]\left(x_2, y_2\right). \end{aligned} \quad (135)$$

Для трансляционно-инвариантной задачи в выражении (133) функция $g(x) = g$. Таким образом, уравнение (135) для двухчастичной ФГ в импульсном представлении выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta \mathcal{G}^{(2)}\left[\Lambda\right](k)}{\delta \Lambda\left(z\right)} = -\frac{1}{2}\int_{k'} \frac{\delta G\left[\Lambda\right](k')}{\delta \Lambda\left(z\right)} S^{(4)}_{\text{int}}\left(k', -k', k, -k\right) + \frac{\delta G\left[\Lambda\right](k)}{\delta \Lambda\left(z\right)} |\mathcal{G}^{(2)}\left[\Lambda\right](k)|^2. \tag{136}$$

Для дельта-полевой конфигурации Λ (23) и при $z = w$, выражение (136) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}\left(\Lambda; w; k\right)}{\partial \Lambda} = -\frac{1}{2}\int_{k'} \frac{\partial G\left(\Lambda; w; k'\right)}{\partial \Lambda} S^{(4)}_{\text{int}}\left(k', -k', k, -k\right) + \frac{\partial G\left(\Lambda; w; k\right)}{\partial \Lambda} |\mathcal{G}^{(2)}\left(\Lambda; w; k\right)|^2. \tag{137}$$

В дальнейшем мы опускаем зависимость от w. Для полиномиальной теории φ^4 начальное действие взаимодействия S_{int} (133) выглядит так:

$$S_{\text{int}}\left[\varphi\right] = g\int d^D x \varphi^4\left(x\right), \quad S^{(4)}_{\text{int}}\left(k', -k', k, -k\right) = g. \tag{138}$$

Для дальнейших вычислений необходимо указать интегральное ядро, фигурирующее в приведенных выше выражениях, начиная с (129) - (130). По этой причине будем считать, что Λ-деформированный пропагатор $G\left(\Lambda; k\right)$ рассматриваемой теории известен: деформация вносится в исходный пропагатор $G\left(k\right)$ так, чтобы выполнялось условие:

$$G\left(k\right) \to G\left(\Lambda; k\right), \quad G\left(\Lambda; k\right) \sim \begin{cases} G\left(k\right) & \text{for } \Lambda \to 0, \\ 0 & \text{for } \Lambda \to \infty. \end{cases} \tag{139}$$

Отметим, что мы используем обозначения функций, хотя для функционалов все остается в силе (в последнем случае, конечно, у нас больше возможностей). Как известно [24] – [27], существуют различные способы деформировать пропагатор теории. В качестве примера можно использовать следующую мультипликативную деформацию пропагатора с некоторой “обрезающей” функцией (мультипликативным регулятором) $\Theta\left(\Lambda; k\right)$:

$$G\left(\Lambda; k\right) = G\left(k\right)\Theta\left(\Lambda; k\right), \quad \Theta\left(\Lambda; k\right) \sim \begin{cases} 1 & \text{for } \Lambda \to 0, \\ 0 & \text{for } \Lambda \to \infty. \end{cases} \tag{140}$$

Другой пример - аддитивная деформация обратного пропагатора с некоторой обрезающей функцией (аддитивным регулятором) $R\left(\Lambda; k\right)$:

$$\frac{1}{G\left(\Lambda; k\right)} = \frac{1}{G\left(k\right)} + R\left(\Lambda; k\right), \quad R\left(\Lambda; k\right) \sim \begin{cases} 0 & \text{for } \Lambda \to 0, \\ \infty & \text{for } \Lambda \to \infty. \end{cases} \tag{141}$$

Мультипликативный регулятор $\Theta\left(\Lambda; k\right)$ и аддитивный регулятор $R\left(\Lambda; k\right)$ могут быть выражены друг через друга с помощью следующих выражений:

$$\Theta\left(\Lambda; k\right) = \frac{1}{1 + G\left(k\right) R\left(\Lambda; k\right)}, \quad R\left(\Lambda; k\right) = \frac{1}{G\left(k\right)}\left(\frac{1}{\Theta\left(\Lambda; k\right)} - 1\right). \tag{142}$$

На практике удобство применения того или иного регулятора зависит от задачи. Также от задачи зависит, какую функцию выбрать в качестве самого регулятора. В дипломной работе мы используем оптимизированный аддитивный регулятор (регулятор Литима) [24, 25], поскольку он обеспечивает аналитические выражения для Λ-зависимой ампутированной ФГ. Оптимизированный аддитивный регулятор имеет вид:

$$R\left(\Lambda; k\right) = \left(\frac{1}{G\left(\Lambda\right)} - \frac{1}{G\left(k\right)}\right)\Theta\left(\Lambda - k\right). \tag{143}$$

Отметим, что в рамках расматриваемой задачи неаналитическое поведение регулятора, ступенчатой функции Хевисайда $\Theta(\Lambda - k)$, не приводит к какому-либо нефизическому поведению ФГ. Для оптимизированного аддитивного регулятора (143) Λ-деформированный пропагатор $G(\Lambda; k)$ равен:

$$G(\Lambda; k) = \frac{G(k)}{1 + \left(\frac{G(k)}{G(\Lambda)} - 1\right)\Theta(\Lambda - k)}, \quad G(\Lambda; k) = \begin{cases} G(k) & \text{for } \Lambda < k, \\ G(\Lambda) & \text{for } \Lambda > k. \end{cases} \tag{144}$$

Одним из преимуществ оптимизированного аддитивного регулятора (143) является то, что производная от Λ-деформированного пропагатора $G(\Lambda; k)$ по Λ имеет простейший вид:

$$\frac{\partial G(\Lambda; k)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial G(\Lambda)}{\partial \Lambda}\Theta(\Lambda - k). \tag{145}$$

Производная (145) - интегральное ядро, которое мы хотели получить явно. Таким образом, оптимизированный аддитивный регулятор (143) обеспечивает простейшее интегральное ядро. Таким образом, исходя из выражения (137), мы приходим к следующему уравнению ФРГ потока для двухчастичной ампутированной ФГ $\mathcal{G}^{(2)}$, простейшему среди всех возможных уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda; k)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial G(\Lambda)}{\partial \Lambda}\left\{\Theta(\Lambda - k)\,|\mathcal{G}^{(2)}(\Lambda; k)\,|^2 - \frac{B_D(1) g \Lambda^D}{2(2\pi)^2}\right\}. \tag{146}$$

В правой части уравнения (146) $B_D(1)$ – объем D-мерного шара единичного радиуса. Дадим дополнительные определения и сделаем предположения о степенной зависимости пропагатора и четности функций (считаем, что $n \in \mathbb{N}$):

$$G(\Lambda) = \frac{1}{\Lambda^{2n}}, \quad g_D = \frac{B_D(1) g}{2(2\pi)^2}, \quad \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda; -k) = \mathcal{G}^{(2)}(\Lambda; k) = \mathcal{G}(\Lambda; k). \tag{147}$$

Отметим, что первое равенство в выражении (147) и выражение (144) не противоречат друг другу: если мы возьмем предел $\Lambda \to 0$ в выражении (144), ступенчатая функция $\Theta(-k)$ в знаменателе обращается в нуль ($k > 0$) и, таким образом, выражение (144) остается конечно.

После подстановки (147) уравнение (146) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\Lambda; k)}{\partial \Lambda} = \frac{2n}{\Lambda^{2n+1}}\left\{-\Theta(\Lambda - k)\,\mathcal{G}^2(\Lambda; k) + g_D \Lambda^D\right\}. \tag{148}$$

Необходимо отметить один важный момент. В литературе чаще исследуются перенормируемые теории. В этом случае граничное условие для решения $\mathcal{G}(\Lambda; k)$ уравнения (148) задается на бесконечности по Λ согласно выражению (133). Однако в общем случае теория неперенормируема. Последнее приводит к тому, что граничное условие для решения $\mathcal{G}(\Lambda; k)$ уравнения (148) задается при некотором конечном значении $\Lambda = \Lambda_0$, что является самым большим масштабом в теории [27]. Если теория окажется перенормируемой, существует осмысленный предел $\Lambda_0 \to \infty$ для всех полученных выражений. По этой причине мы формулируем задачу с конечным Λ_0, после чего рассматриваем предел $\Lambda_0 \to \infty$. В области $\Lambda < k < \Lambda_0$, решение $\mathcal{G}(\Lambda; k)$ уравнения (148) имеет следующий вид:

$$\mathcal{G}(\Lambda; k) = \frac{2n g_D}{D - 2n}\left(\Lambda^{D-2n} - k^{D-2n}\right) + \alpha(k). \tag{149}$$

"Константа" интегрирования $\alpha(k)$, фигурирующая в выражении (149) - это функция, независящая от Λ. Данная функция определяется из условия равенства (сшивки) решений в точке $\Lambda = k$. В области $k < \Lambda < \Lambda_0$, уравнение (148) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{G}\left(\Lambda; k\right)}{\partial \Lambda} = \frac{2n}{\Lambda^{2n+1}} \left\{ -\mathcal{G}^2\left(\Lambda; k\right) + g_D \Lambda^D \right\}. \tag{150}$$

Уравнение (150) является частным случаем выражений (30) - (32). Рассмотрим случай $n = 1$ и $D = 3$. В этом случае полиномиальная теория φ^4 (138) оказывается перенормируемой [1, 2]. Однако мы выводим это из общего решения, содержащего Λ_0:

$$\mathcal{G}\left(\Lambda; k\right) = \mathcal{G}\left(\Lambda\right) = \sqrt{g_3 \Lambda^3}\, \frac{I_1\left(\lambda_0\right) K_1\left(\lambda\right) - K_1\left(\lambda_0\right) I_1\left(\lambda\right)}{I_1\left(\lambda_0\right) K_2\left(\lambda\right) + K_1\left(\lambda_0\right) I_2\left(\lambda\right)}, \quad \lambda = \frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \lambda_0 = \frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{\Lambda_0}}. \tag{151}$$

Отметим, что решение (151) зависит только от Λ. Условие равенства (сшивки) решений в точке $\Lambda = k$ дает следующее выражение для функции $\alpha\left(k\right)$, входящей в решение (149):

$$\alpha\left(k\right) = \mathcal{G}\left(k\right) = \sqrt{g_3 k^3}\, \frac{I_1\left(\lambda_0\right) K_1\left(\kappa\right) - K_1\left(\lambda_0\right) I_1\left(\kappa\right)}{I_1\left(\lambda_0\right) K_2\left(\kappa\right) + K_1\left(\lambda_0\right) I_2\left(\kappa\right)}, \quad \kappa = \frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k}}. \tag{152}$$

Теперь мы можем переписать решение (149) в области $\Lambda < k < \Lambda_0$ следующим образом:

$$\mathcal{G}\left(\Lambda; k\right) = 2g_3\left(\Lambda - k\right) + \sqrt{g_3 k^3}\, \frac{I_1\left(\lambda_0\right) K_1\left(\kappa\right) - K_1\left(\lambda_0\right) I_1\left(\kappa\right)}{I_1\left(\lambda_0\right) K_2\left(\kappa\right) + K_1\left(\lambda_0\right) I_2\left(\kappa\right)}. \tag{153}$$

Отметим также, что зависимость решения (153) от Λ_0 проявляется через условие равенства (сшивки) решений в точке $\Lambda = k$. Далее, в соответствии с общими положениями метода ФРГ, физические n-частичные ампутированные ФГ - это значения Λ-зависимых n-частичных ампутированных ФГ при $\Lambda = 0$ Это утверждение является следствием того, что Λ-зависимый производящий функционал $\mathcal{G}$ ампутированных ФГ равен своему физическому (квантовому) аналогу при $\Lambda = 0$. Таким образом, для физической двухчастичной ампутированной ФГ $\mathcal{G}^{(\mathrm{Quant})}$ мы имеем следующее выражение:

$$\mathcal{G}\left(\Lambda = 0; k\right) = \mathcal{G}^{(\mathrm{Quant})}\left(k\right) = -2g_3 k + \sqrt{g_3 k^3}\, \frac{I_1\left(\lambda_0\right) K_1\left(\kappa\right) - K_1\left(\lambda_0\right) I_1\left(\kappa\right)}{I_1\left(\lambda_0\right) K_2\left(\kappa\right) + K_1\left(\lambda_0\right) I_2\left(\kappa\right)}. \tag{154}$$

Вычисляя предел $\Lambda_0 \to \infty$ в выражении (154), мы приходим к следующему результату:

$$\mathcal{G}\left(\Lambda = 0; k\right) = \mathcal{G}^{(\mathrm{Quant})}\left(k\right) = -2g_3 k + \sqrt{g_3 k^3}\, \frac{K_1\left(\kappa\right)}{K_2\left(\kappa\right)}. \tag{155}$$

Существование такого предела является независимой проверкой наших расчетов. Рассматриваемая теория, как и должно быть, оказывается перенормируемой. Возвращаясь назад, сделаем важное замечание: решение уравнения (150) в области $k < \Lambda < \Lambda_0$ “знает” о полюсе $D - 4$, и о $\ln \Lambda$-зависимости при $D = 4$. Это хорошо установленный факт из Теории критических явлений [1, 2]. Такое решение можно явно записать в терминах функций Бесселя. Таким образом, квазиклассическое приближение для функционального уравнения ВП дает надежные результаты. Эти результаты, конечно, можно улучшить, выполнив несколько последующих шагов итерационного решения функционального уравнения ВП, аналогичного итерационному решению функционального уравнения Шрёдингера, где первым шагом итерации также является квазиклассика.

3.3. Решение приближенного уравнения ВП: четырехчастичная ФГ

Повторяя вычисления, представленные в разделе “Функциональное уравнение Гамильтона – Якоби и его иерархия”, легко вывести уравнение для четырехчастичной ампутированной ФГ $\mathcal{G}^{(4)}$. В общем случае это уравнение имеет вид:

$$\frac{\delta \mathcal{G}^{(4)}\left[\Lambda\right]\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)} = \int d^D x_1 \int d^D x_2\, \frac{\delta G\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2\right)}{\delta \Lambda\left(z\right)}\, \Upsilon\left[\Lambda\right]\left(x_1, x_2; y_1, y_2, y_3, y_4\right). \tag{156}$$

Опуская в обозначениях скобки $[\varLambda]$ явной функциональной зависимости от $\varLambda$ для простоты записи, получим функционал $\varUpsilon$ в виде:

$$\varUpsilon\left(x_1,x_2;y_1,y_2,y_3,y_4\right)=\mathcal{G}^{(2)}\left(x_1,y_1\right)\mathcal{G}^{(4)}\left(x_2,y_2,y_3,y_4\right)+\left(y_1\rightleftarrows y_2\right)+\left(y_1\rightleftarrows y_3\right)+\left(y_1\rightleftarrows y_4\right). \tag{157}$$

Для трансляционно-инвариантной задачи выражения (156) - (157) в импульсном представлении имеют вид (специальная кинематика $k_1+k_2+k_3+k_4=0$):

$$\frac{\delta\mathcal{G}^{(4)}\left[\varLambda\right]\left(k_1,k_2,k_3,k_4\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}=\mathcal{G}^{(4)}\left[\varLambda\right]\left(k_1,k_2,k_3,k_4\right)\sum_{j=1}^{4}\frac{\delta G\left[\varLambda\right]\left(k_j\right)}{\delta\varLambda\left(z\right)}\mathcal{G}^{(2)}\left[\varLambda\right]\left(-k_j\right). \tag{158}$$

Далее, для дельта-полевой конфигурации $\varLambda$ (23) и при $z=w$, выражение (158) принимает следующий вид (без явной зависимости от w):

$$\frac{\partial\mathcal{G}^{(4)}\left(\varLambda;k_1,k_2,k_3,k_4\right)}{\partial\varLambda}=\mathcal{G}^{(4)}\left(\varLambda;k_1,k_2,k_3,k_4\right)\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial G\left(\varLambda;k_j\right)}{\partial\varLambda}\mathcal{G}^{(2)}\left(\varLambda;-k_j\right). \tag{159}$$

Решение уравнения (159), удовлетворяющее граничному условию (133) с начальным действием взаимодействия S_{int} из (138), имеет следующий вид:

$$\mathcal{G}^{(4)}\left(\varLambda;k_1,k_2,k_3,k_4\right)=-g\exp\left\{\sum_{j=1}^{4}\int_{\varLambda_0}^{\varLambda}d\varLambda'\,\frac{\partial G\left(\varLambda';k_j\right)}{\partial\varLambda'}\mathcal{G}^{(2)}\left(\varLambda';-k_j\right)\right\}. \tag{160}$$

Заметим, что решение (160) зависит только от модулей соответствующих векторов $k_1,\ldots,k_4$. Для оптимизированного аддитивного регулятора (143) двухчастичная ампутированная ФГ $\mathcal{G}^{(2)}\left(\varLambda;k\right)$ “заморожена”, поэтому решение (160) упрощается:

$$\mathcal{G}^{(4)}\left(\varLambda;k_1,k_2,k_3,k_4\right)=-g\exp\left\{\sum_{j=1}^{4}\int_{\varLambda_0}^{\max\{k_j,\varLambda\}}d\varLambda'\,\frac{\partial G\left(\varLambda'\right)}{\partial\varLambda'}\mathcal{G}^{(2)}\left(\varLambda'\right)\right\}. \tag{161}$$

Рассмотрим снова случай $n=1$, $D=3$ и предел $\varLambda_0\to\infty$ (этот предел существует, потому что полиномиальная теория φ^4 (138) перенормируема в данной размерности). Вычислим интеграл, фигурирующий в правой части выражения (161), с помощью замены переменных $\varLambda\to\lambda$ при $\varLambda=0$. В соответствии с общими положениями метода ФРГ мы получаем физическую четырехчастичную ампутированную ФГ $\mathcal{G}^{(\text{Quant})}$:

$$\mathcal{G}^{(\text{Quant})}\left(k_1,k_2,k_3,k_4\right)=-16g\prod_{j=1}^{4}\frac{1}{\kappa_j\left(\kappa_jK_0\left(\kappa_j\right)+2K_1\left(\kappa_j\right)\right)},\quad \kappa_j=\frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k_j}}. \tag{162}$$

В двойной специальной кинематике $k_1=k$, $k_2=-k$, $k_3=k'$, $k_4=-k'$, что часто встречается в уравнения для ФГ низкого порядка, как и в экспериментах по рассеянию, выражение (162) имеет вид:

$$\mathcal{G}^{(\text{Quant})}\left(k,-k,k',-k'\right)=\frac{-16g}{\left(\kappa\kappa'\right)^2\left(\kappa K_0\left(\kappa\right)+2K_1\left(\kappa\right)\right)^2\left(\kappa' K_0\left(\kappa'\right)+2K_1\left(\kappa'\right)\right)^2},\quad \kappa'=\frac{4\sqrt{g_3}}{\sqrt{k'}}. \tag{163}$$

В конце данного подраздела отметим еще одно важное преимущество двойной специальной кинематики: эта кинематика требуется для итерационного решения уравнения для двухчастичной ампутированной ФГ. Также отметим, что решения для ФГ в терминах функций Бесселя являются стандартными решениями в методе ГРГ [33] – [39].

3.4. Функционал роста крупнозернистости мод: строгий вывод

В этом последнем подразделе мы проверим справедливость утверждения о том, что функционал роста крупнозернистости мод $\varPsi$ зависит только от функционального импульса ϖ, но не зависит от его производных по полю φ, другими словами, насколько функционал $\varPsi$ можно считать "геометрическим". По этой причине введем так называемый функционал блокинга $\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi\right](x)$ (обозначения данного подраздела совпадают с обозначениями из обзора [26]). Важно отметить, что обратного функционала блокинга $\mathcal{B}_\varLambda^{-1}\left[\varphi\right](x)$ не существует. По этой причине вильсоновская ренормализационная группа является лишь полугруппой. В противном случае следующее определение было бы тривиальным. Определение вильсоновского эффективного действия $\mathcal{G}$ (мы используем те же обозначения, что и для производящего функционала ампутированных ФГ, но это не должно приводить к путанице, поскольку данный подраздел является заключительным) в терминах известного классического действия S и функционального интеграла с мерой интегрирования $\mathcal{D}\left[\varphi_0\right]$ имеет следующий вид [26]:

$$e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\varLambda}[\varphi]}=\int\mathcal{D}\left[\varphi_0\right]\,\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right]e^{-S[\varphi_0]}. \tag{164}$$

Определение функционала роста крупнозернистости мод $\varPsi$ в терминах функционала блокинга $\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi\right](x)$ формулируется с помощью выражения (164):

$$\varPsi_{\varepsilon,\varLambda}\left[\varphi\right](x)\,e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\varLambda}[\varphi]}=\int\mathcal{D}\left[\varphi_0\right]\,\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right]e^{-S[\varphi_0]}\varLambda\frac{\partial\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right](x)}{\partial\varLambda}. \tag{165}$$

Размытый (сглаженный) дельта-функционал Дирака $\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi\right]$ с нормировочной константой $\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[0\right]$, где сглаживание происходит на интервале порядка ε (мы можем восстановить точный дельта-функционал Дирака в пределе $\varepsilon\to0$):

$$\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi\right]=\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[0\right]e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(\varphi|\varphi)}. \tag{166}$$

Рассмотрим основное соотношение для вывода функционала $\varPsi$ в терминах функционала $\mathcal{G}$ ($\mathcal{F}$ - произвольный функционал). Это соотношение играет роль трюка с источником при выводе уравнений ФРГ потока Вильсона-Полчински и Веттериха-Морриса в [24]:

$$\mathcal{F}_\varLambda\left[\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}\right](x)\,\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right]=\mathcal{F}_\varLambda\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right](x)\,\delta_\varepsilon^{(\infty)}\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right]+\varepsilon\,\mathcal{O}\left[\ldots\right]. \tag{167}$$

Функционал $\varepsilon\,\mathcal{O}\left[\ldots\right]$ бесконечно мал в пределе $\varepsilon\to0$. По этой причине во всех последующих формулах этот функционал опускается. Далее, функционал $\mathcal{F}$ можно выбрать бесконечным числом способов. В качестве простейшего способа пусть $\mathcal{F}$ будет *линейным* функционалом по полю $\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_\varLambda\left[\varphi-\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right](x)=\mathcal{F}_\varLambda\left[\varphi\right](x)-\mathcal{F}_\varLambda\left[\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right](x)\,,\\&\mathcal{F}_\varLambda\left[\varphi\right](x)=\left(F_\varLambda(x)\,|\varphi\right)=\int d^Dy\,F_\varLambda(x,y)\;\varphi(y)\,.\end{aligned} \tag{168}$$

Потребуем выполнения следующего важного соотношения (это соотношение выражает неизвестный функционал $\mathcal{F}$ через известный функционал блокинга $\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi\right](x)$ и его производную по $\varLambda$):

$$\mathcal{F}_\varLambda\left[\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right]\right](x)=\varLambda\frac{\partial\mathcal{B}_\varLambda\left[\varphi_0\right](x)}{\partial\varLambda}. \tag{169}$$

В этом случае функционал Ψ в терминах функционала $\mathcal{G}$ имеет вид:

$$\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)=e^{\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}\mathcal{F}_{\Lambda}\left[\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}\right](x)\,e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}+\mathcal{F}_{\Lambda}\left[\varphi\right](x)\,. \tag{170}$$

Поскольку функционал $\mathcal{F}$ линейен, выполняется соотношение:

$$\mathcal{F}_{\Lambda}\left[\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}\right](x)\,e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}=-e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}\int d^{D}y\,F_{\Lambda}\left(x,y\right)\,\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(y\right)}. \tag{171}$$

Таким образом, мы получаем следующее выражение для функционала Ψ в терминах функционала $\mathcal{G}$:

$$\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)=-\int d^{D}y\,F_{\Lambda}\left(x,y\right)\,\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(y\right)}+\int d^{D}y\,F_{\Lambda}\left(x,y\right)\,\varphi\left(y\right). \tag{172}$$

Выражение (172) совпадает с выбором (129), поскольку линейный член в правой части выражения (172) можно легко занулить, если переопределить функционал $\mathcal{G}$. Таким образом, гипотеза о том, что функционал Ψ можно считать “геометрическим”, доказана в простейшем случае, когда $\mathcal{F}$ является линейным функционалом по полю $\varphi-\mathcal{B}_{\Lambda}\left[\varphi_0\right]$.

Напомним, что функционал Ψ называется геометрическим, если он зависит только от первой производной функционала $\mathcal{G}$ по полю φ, которая является функциональным импульсом ϖ. Если мы подставим такой функционал Ψ в управляющее уравнение (127) или (128) и пренебрежем квантовой частью уравнения, такой функционал Ψ приводит к функциональному уравнению ГЯ, возможно, содержащему высшие (третья и больше) степени импульса ϖ. В классической механике уравнения ГЯ изучаются методами дифференциальной и симплектической геометрии и поэтому имеют ряд геометрических интерпретаций. Поэтому функционал Ψ, содержащий только первую производную от $\mathcal{G}$, называется геометрическим (ожидается наличие геометрической интерпретации).

Выведем функциональное уравнение типа ВП, которому удовлетворяет вильсоновское эффективное действие $\mathcal{G}$ (для простоты следующих выражений мы используем компактное обозначение $\Phi=\varphi-\mathcal{B}_{\Lambda}\left[\varphi_0\right]$). Для этого вычислим следующие производные:

$$\varepsilon\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}=\int\mathcal{D}\left[\varphi_0\right]\,\delta_{\varepsilon}^{(\infty)}\left[\Phi\right]e^{-S[\varphi_0]}\int d^{D}x\,\Phi\left(x\right)\Lambda\frac{\partial\mathcal{B}_{\Lambda}\left[\varphi_0\right](x)}{\partial\Lambda}. \tag{173}$$

$$\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi\left(x\right)}\left\{\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)\,e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}\right\}=-\int\mathcal{D}\left[\varphi_0\right]\,\delta_{\varepsilon}^{(\infty)}\left[\Phi\right]e^{-S[\varphi_0]}\Phi\left(x\right)\Lambda\frac{\partial\mathcal{B}_{\Lambda}\left[\varphi_0\right](x)}{\partial\Lambda}. \tag{174}$$

Сравнивая выражения (173) и (174), мы получаем управляющее уравнение:

$$-\varepsilon\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}=\int d^{D}x\,\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi\left(x\right)}\left\{\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)\,e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}\right\}. \tag{175}$$

Управляющее уравнение (175) можно преобразовать к следующей псевдолинейной форме:

$$\varepsilon\Lambda\frac{\partial\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\partial\Lambda}=\int d^{D}x\left\{\varepsilon\frac{\delta\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)}{\delta\varphi\left(x\right)}-\Psi_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right](x)\,\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(x\right)}\right\}. \tag{176}$$

Управляющее уравнение (176) справедливо для любого функционала Ψ, определяемого уравнением (165). Таким образом, уравнение (176) является неявным уравнением для эффективного вильсоновского действия $\mathcal{G}$. Теперь воспользуемся выражением (172), чтобы получить явное уравнение для функционала $\mathcal{G}$. Такое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon\Lambda\frac{\partial\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\partial\Lambda}=\int d^{D}x\int d^{D}y\mathcal{F}_{\Lambda}\left(x,y\right)&\left\{\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(x\right)}\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(y\right)}-\right.\\&\left.-\,\varepsilon^{2}\frac{\delta^{2}\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(x\right)\delta\varphi\left(y\right)}-\varphi\left(y\right)\varepsilon\frac{\delta\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}\left[\varphi\right]}{\delta\varphi\left(x\right)}\right\}+\varepsilon\,\mathcal{O}\left[\ldots\right].\end{aligned} \tag{177}$$

Функционал $\varepsilon\,\mathcal{O}\,[\ldots]$ бесконечно мал в пределе $\varepsilon \to 0$. Поэтому это слагаемое никогда не учитывается в практических расчетах. Таким образом, мы получили функциональное уравнение типа ВП, которому удовлетворяет вильсоновское эффективное действие $\mathcal{G}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ будет *квадратичным* функционалом относительно поля $\varphi - \mathcal{B}_\Lambda\,[\varphi_0]$. Выражение (167) примет вид (мы используем компактную запись $\varPhi = \varphi - \mathcal{B}_\Lambda\,[\varphi_0]$):

$$\mathcal{F}_\Lambda \left[\varepsilon \frac{\delta}{\delta\varphi}\right](x)\,\delta_\varepsilon^{(\infty)}\,[\varPhi] = \left(\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)\delta_\varepsilon^{(\infty)}\,[\varPhi] = \delta_\varepsilon^{(\infty)}\,[\varPhi]\left(\varPhi\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\varPhi\right) + \varepsilon\,\mathcal{O}\,[\ldots]\,. \tag{178}$$

Квадратичная форма в правой части выражения (178) имеет вид:

$$\left(\varPhi\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\varPhi\right) = \int d^D y \int d^D z\, Q_\Lambda\,(x,y,z)\;\varPhi\,(y)\,\varPhi\,(z)\,. \tag{179}$$

Далее выражение (178) можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}+\varphi\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}+\varphi\right)\delta_\varepsilon^{(\infty)}\,[\varPhi] = \left(\mathcal{B}_\Lambda\,[\varphi_0]\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\mathcal{B}_\Lambda\,[\varphi_0]\right)\delta_\varepsilon^{(\infty)}\,[\varPhi] + \varepsilon\,\mathcal{O}\,[\ldots]\,. \tag{180}$$

Учитывая условие (169), приходим к следующему выражению для функционала $\varPsi$ в терминах функционала $\mathcal{G}$:

$$\varPsi_{\varepsilon,\Lambda}\,[\varphi]\,(x) = e^{\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]}\left(\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}+\varphi\middle|\hat{\mathcal{Q}}_\Lambda\,(x)\middle|\varepsilon\frac{\delta}{\delta\varphi}+\varphi\right)e^{-\mathcal{G}_{\varepsilon,\Lambda}[\varphi]} + \varepsilon\,\mathcal{O}\,[\ldots]\,. \tag{181}$$

Выражение (181) показывает, что функционал $\varPsi$ зависит не только от функционального импульса ϖ, но и от производных ϖ по полю φ. Однако, согласно идее квазиклассического приближения, эти производные следует заменить производными известного классического действия S. Таким образом, в рамках квазиклассического приближения, функционал $\varPsi$ действительно можно считать “геометрическим”.

В конце подраздела сделаем одно интересное замечание. Как известно, уравнение ГЯ - не единственный формализм классической механики. В качестве альтернативы можно использовать формализм Гамильтона. Таким образом, отдельный интерес представляет функциональное обобщение гамильтоновой механики (вывод функциональных уравнений Гамильтона для “канонических координат” $\varphi\,[\Lambda]$ и $\varpi\,[\Lambda]$) и его связь с функциональным уравнением ГЯ. Интересен также вопрос о роли функционального обобщения гамильтоновой механики в методах ФРГ и ГРГ. Заметим также, что такое обобщение было бы полезно для физики многих частиц.

Заключение

В этой дипломной работе мы представили обширное исследование функциональных уравнений в вариационных производных в координатном представлении и в конденсированных обозначениях: функциональное уравнение Гамильтона–Якоби, функциональное уравнение Шрёдингера и обобщенное функционалльное уравнение Вильсона–Полчински. В терминах голографического поля Λ приведён строгий вывод соответствующих иерархий. Получено трансляционно-инвариантное решение первых уравнений иерархии ГЯ для различных конфигураций Λ. Более того, полученная пара иерархий для квантовых (содержащих квантовую поправку к потенциалу) уравнений ГЯ и функциональных уравнений непрерывности является отправной точкой для приближенного решения функционального уравнения Шрёдингера. Для этого уравнения мы вывели функциональное квазиклассическое приближение и нашли трансляционно-инвариантное решение для различных ФГ. Мы также представили оптический потенциал для функционального уравнения Шрёдингера, которое должно описывать открытую квантово-полевую систему.

Далее в дипломной работе мы сформулировали квазиклассическое приближение для обобщенного уравнения ВП, описывающего ФРГ поток производящего функционала ампутированных ФГ. Мы подробно проанализировали функционал роста крупнозернистости мод, допускающий такое приближение в рамках определения в терминах функционального интеграла. Заметим, что "природа" этой квазиклассики существенно отличается от таковой для функционального уравнения Шрёдингера. С помощью оптимизированного регулятора (регулятора Литима) мы нашли трансляционно-инвариантное решение аппроксимированной иерархии ВП для двухчастичных и четырехчастичных ампутированных ФГ. Мы также рассмотрели физические ($\Lambda = 0$) двухчастичные и четырехчастичные ампутированные ФГ в различной кинематике.

Результаты этой работы обеспечивают прочную основу для исследований стохастической теории турбулентности, ядерной физики, теории критических явлений, квантовой теории магнетизма, физики плазмы, теории открытых квантовых систем, теории стохастических дифференциальных уравнений с частными производными и т.д. Отметим, что, поскольку алгебраическая квантовая теория поля также определяется в терминах ФГ, формализм, развитый в данной дипломной работе, также может быть к ней применен. Краткий список дальнейших возможных направлений исследований: скалярная КТП в искривленном пространстве-времени с дополнительными измерениями и компактификацией, N-компонентная скалярная модель, различные производящие функционалы, семейства ФГ и составные операторы уравнения ФРГ потока, аналитическое продолжение в пространство-время Минковского, Функциональные уравнения Дайсона-Швингера и Швингера-Томонаги и итерационная процедура их решения, некоммутативная скалярная КТП, высшие регуляторы в методе ФРГ, формулировка ФГР развитой турбулентности и даже такой амбициозный вопрос, как определение КТП с помощью функциональной задачи Коши (ФРГ потоковое уравнение и граничное условие) вместо исходного функционального интеграла.

В качестве примера к последнему утверждению: стандартное функциональное уравнение ВП может быть изучено в приближении локального потенциала [24, 53]. В этом приближении функциональное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению квантового гармонического осциллятора. Решение должно быть полиномиальным. Это приводит к квантованию размерности пространства, которая входит в уравнение как непрерывный параметр. Этот результат представлен в статье [53]. Поэтому возникает следующий вопрос: можно ли построить функциональное уравнение потока ФРГ, которое в приближении локального потенциала сводится, например, к обыкновенному дифференциальному уравнению с обобщенной гипергеометрической функцией? Кроме того, точное функциональное уравнение не должно разрушать решение, полученное в приближении локального потенциала. В заключение отметим, что эта иллюстрация не претендует на строгость, но, безусловно, дает некоторую “пищу для размышлений”.

Благодарности

Выражаю благодарность Станиславу Леонидовичу Огаркову, моему научному руководителю, за неоценимую помощь в написании дипломной работы, за наставничество и предоставленные возможности. Также хочу выразить благодарность Владимиру Сергеевичу Талисманову, без которого реализация индивидуального научного руководства была бы невозможной.

Список литературы

[1] Zinn-Justin, J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*; Clarendon: Oxford, UK, 1989.

[2] Vasiliev, A.N. *The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics*; Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, FL, USA, 2004.

[3] Popov, V.N. *Path Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*; Atomizdat: Moscow, Russia, 1976. (In Russian)

[4] Kleinert, H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: Singapore, 2009.

[5] Mosel, U. *Path Integrals in Field Theory. An Introduction*; Advanced Texts in Physics; Springer Verlag: Berlin/Heidelberg, Germany, 2004.

[6] Simon, B. *Functional Integration and Quantum Physics*; AMS Chelsea Publishing; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 2005.

[7] Efimov, G.V.; Ivanov, M.A. *The Quark Confinement Model of Hadrons*; Taylor and Francis Group: New York, NY, USA, 1993.

[8] Dineykhan, M.; Efimov, G.V.; Ganbold, G.; Nedelko, S.N. *Oscillator Representation in Quantum Physics*; Lecture Notes in Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1995.

[9] Brydges, D.C.; Martin, P.A. Coulomb Systems at Low Density: A Review. *J. Stat. Phys.* **1999**, *96*, 1163–1330.

[10] Rebenko, A.L. Mathematical Foundations of Equilibrium Classical Statistical Mechanics of Charged Particles. *Russ. Math. Surv.* **1988**, *43*, 65–116.

[11] Efimov, G.V. Strong Coupling in the Quantum Field Theory with Nonlocal Nonpolynomial Interaction. *Commun. Math. Phys.* **1977**, *57*, 235–258.

[12] Efimov, G.V. Vacuum Energy in g-Phi-4 Theory for Infinite g. *Commun. Math. Phys.* **1979**, *65*, 15–44.

[13] Efimov, G.V. Elastic Scattering and the Path Integral. *Theor. Math. Phys.* **2014**, *179*, 695–711.

[14] Efimov, G.V. Quantum Particle in a Random Medium. *Theor. Math. Phys.* **2015**, *185*, 1433–1444.

[15] Albeverio, S.A.; Høegh-Krohn, R.J.; Mazzucchi, S. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. An Introduction*; Lecture Notes in Mathematics; Springer Verlag: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008.

[16] Mazzucchi, S. *Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications*; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.: Singapore, 2009.

[17] Cartier, P.; DeWitt-Morette, C. *Functional Integration: Action and Symmetries*; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2006.

[18] Montvay, I,; Münster, G. *Quantum Fields on a Lattice*; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1994.

[19] Johnson, G.W.; Lapidus, M.L. *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*; Oxford Mathematical Monographs; Oxford University Press: Oxford, UK, 2000.

[20] Grosche, C.; Steiner, F. *Handbook of Feynman Path Integrals*; Springer Tracts in Modern Physics; Springer Verlag: Berlin/Heidelberg, Germany, 1998.

[21] Smolyanov, O.G.; Shavgulidze, E.T. *Path Integrals*; URSS: Moscow, Russia, 2015. (In Russian)

[22] Chebotarev, I.V.; Guskov, V.A.; Ogarkov, S.L.; Bernard, M. S-Matrix of Nonlocal Scalar Quantum Field Theory in Basis Functions Representation. *Particles* **2019**, *2(1)*, 103–139.

[23] Bernard, M.; Guskov, V.A.; Ivanov, M.G.; Kalugin, A.E.; Ogarkov, S.L. Nonlocal Scalar Quantum Field Theory — Functional Integration, Basis Functions Representation and Strong Coupling Expansion. *Particles* **2019**, *2(3)*, 385–410.

[24] Kopietz, P.; Bartosch, L.; Schütz, F. *Introduction to the Functional Renormalization Group*; Lecture Notes in Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2010.

[25] Wipf, A. *Statistical Approach to Quantum Field Theory*; Lecture Notes in Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2013.

[26] Rosten, O.J. Fundamentals of the Exact Renormalization Group. *Phys. Rep.* **2012**, *511*, 177–272.

[27] Igarashi, Y.; Itoh, K.; Sonoda, H. Realization of Symmetry in the ERG Approach to Quantum Field Theory. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **2009**, *181*, 1–166.

[28] Efimov, G.V. *Nonlocal Interactions of Quantized Fields*; Nauka: Moscow, Russia, 1977. (In Russian)

[29] Efimov, G.V. *Problems of the Quantum Theory of Nonlocal Interactions*; Nauka: Moscow, Russia, 1985. (In Russian)

[30] Petrina, D.Y.; Skripnik, V.I. Kirkwood–Salzburg Equations for the Coefficient Functions of the Scattering Matrix. *Theor. Math. Phys.* **1971**, *8*, 896–904.

[31] Rebenko, A.L. On Equations for the Matrix Elements of Euclidean Quantum Electrodynamics. *Theor. Math. Phys.* **1972**, *11*, 525–536.

[32] Fradkin, E.S. *Selected Papers on Theoretical Physics*; Papers in English and Russian; Nauka: Moscow, Russia, 2007.

[33] Lizana, J.M.; Morris, T.R.; Pérez-Victoria, M. Holographic Renormalisation Group Flows and Renormalisation from a Wilsonian Perspective. *JHEP* **2016**, *03*, 198 (62 pages).

[34] Akhmedov, E.T. A Remark on the AdS/CFT Correspondence and the Renormalization Group Flow. *Phys. Lett. B* **1998**, *442(1–4)*, 152–158

[35] De Boer, J.; Verlinde, E.; Verlinde, H. On the Holographic Renormalization Group. *JHEP* **2000**, *08*, 003 (16 pages).

[36] Verlinde, E.; Verlinde, H. RG-Flow, Gravity and the Cosmological Constant. *JHEP* **2000**, *05*, 034 (26 pages).

[37] Fukuma, M.; Matsuura, S.; Sakai, T. Holographic Renormalization Group. *Prog. Theor. Phys.* **2003**, *4(109)*, 489–562.

[38] Akhmedov, E.T. Notes on Multi-Trace Operators and Holographic Renormalization Group. arXiv:hep-th/0202055v3.

[39] Akhmedov, E.T.; Gahramanov, I.B.; Musaev, E.T. Hints on Integrability in the Wilsonian/Holographic Renormalization Group. *JETP Letters* **2011**, *93(3)*, 545–550.

[40] Heemskerk, I.; Polchinski, J. Holographic and Wilsonian Renormalization Groups. *JHEP* **2011**, *06*, 031 (28 pages).

[41] Maldacena, J.M. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *Int. J. Theor. Phys.* **1999**, *38(4)*, 1113–1133.

[42] Witten, E. Anti-de Sitter Space and Holography. *Adv. Theor. Math. Phys.* **1998**, *2*, 253–291.

[43] Gubser, S.S.; Klebanov, I.R.; Polyakov, A.M. Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory. *Phys. Lett. B* **1998**, *428(1)*, 105–114.

[44] Polchinski, J. *String Theory*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 1998.

[45] Doplicher, L. Generalized Tomonaga–Schwinger Equation from the Hadamard Formula. *Phys. Rev. D* **2004**, *70(6)*, 064037 (7 pages).

[46] Breuer, H.-P.; Petruccione, F. *The Theory of Open Quantum Systems*; Oxford University Press: Oxford, UK, 2002.

[47] Baidya, A.; Jana, C.; Loganayagam, R.; Rudra, A. Renormalization in Open Quantum Field Theory. Part I. Scalar Field Theory. *JHEP* **2017**, *11*, 204 (84 pages).

[48] Baidya, A.; Jana, C.; Rudra, A. Renormalization in Open Quantum Field Theory. Part II. Yukawa Theory and PV Reduction. arXiv:1906.10180v1.

[49] Bogoliubov, N.N.; Shirkov, D.V. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*; A Wiley-Intersciense Publication; John Wiley and Sons Inc.: New York City, USA, 1980.

[50] Bogoliubov, N.N.; Shirkov, D.V. *Quantum Fields*; Benjiamin/Cummings Publishing Company Inc.; San Francisco, USA, 1983.

[51] Bogolyubov, N.N.; Logunov, A.A.; Oksak, A.I.; Todorov, I.T. General Principles of Quantum Field Theory. In *Mathematical Physics and Applied Mathematics*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 1990.

[52] Guskov, V.A.; Ivanov, M.G.; Ogarkov, S.L. A Note on Efimov Nonlocal and Nonpolynomial Quantum Scalar Field Theory. arXiv:1711.08829v5.

[53] Felder, G. Renormalization Group in the Local Potential Approximation. *Commun. Math. Phys.* **1987**, *111*, 101–121.